Математический анализ

Программа курса
Новосибирский государственный университет
Механико–математический факультет

Лектор — профессор В. Н. Старовойтов

1-й семестр

1. Множества и отображения.

1.1. Множества. Множество и его элементы. Примеры множеств. Отношение включения и его свойства. Операции над множествами: пересечение, объединение, разность, симметрическая разность, декартово произведение. Свойства этих операций. Дополнение множества, законы де Моргана. Способы описания множеств. Пустое множество.

1.2. Утверждения. Понятие утверждения (высказывания). Конъюнкция, дизъюнкция, импликация и отрицание утверждений. Равносильность утверждений. Логическая символика. Кванторы. Законы де Моргана.

1.3. Отображения. Понятие отображения (функции). Область определения и множество значений отображения. Образ и прообраз. Сюръективные, инъективные и биективные отображения. Суперпозиция отображений. Прообраз множества. Понятие обратного отображения. Теорема о необходимом и достаточном условии существования обратного отображения. Единственность обратного отображения. Сужение и продолжение отображений. График отображения. Строгое определение понятия отображения через его график.

2. Числовые системы.

2.1. Вещественные числа. Понятия поля, упорядоченного поля, полного упорядоченного поля. Поле вещественных чисел и его основные арифметические свойства: единственность нуля, единицы, противоположного и обратного элементов, законы сокращения для сложения и умножения, умножение на 0 и на (-1). Порядковые свойства вещественных чисел: транзитивность, сложение и умножение неравенств, положительность квадрата числа. Модуль числа. Неравенство треугольника.

Точная верхняя (супремум) и точная нижняя (инфимум) грани множества чисел. Простейшие свойства супремума и инфимума. Существование супремума ограниченного сверху множества.

Понятие индуктивного множества. Множество натуральных чисел. Принцип математической индукции. Теорема о структуре множества натуральных чисел. Натуральная степень вещественного числа. Неравенство Бернулли. Принцип Архимеда (неограниченность сверху множества натуральных чисел) и его следствия.

Множество целых чисел. Целая и дробная части вещественного числа. Теорема о целой части вещественного числа. Чётные и нечётные целые числа.

Рациональные и иррациональные числа. Делитель целого числа, несократимые дроби, корень степени n. Теорема о существовании квадратного корня. Иррациональность $\sqrt{2}$. Неполнота упорядоченного поля рациональных чисел. Теорема о том, что между любыми двумя вещественными числами найдётся рациональное число.

Позиционные системы счисления. Представление числа десятичной и двоичной дробью.

2.2. Числовая прямая. Интерпретация вещественных чисел как точек на прямой. Расширенная числовая прямая. Отрезок, интервал, полуинтервал, промежуток, окрестность точки, расстояние между точками, длина промежутка. Понятие последовательности. Последовательность множеств. Теорема о вложенных отрезках. Покрытие множества на прямой системой интервалов. Теорема о конечном подпокрытии. Предельная точка множества на прямой. Теорема Больцано — Вейерштрасса.

Координатная плоскость. Евклидово расстояние между точками плоскости. Окружность. Понятие длины дуги окружности. Величина угла. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла.

2.3. Комплексные числа. Мнимая единица. Вещественная и мнимая части комплексного числа. Операция сопряжения. Арифметические операции над комплексными числами. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент. Формула Муавра.

2.4. Кардинальные числа. Понятие мощности (кардинального числа) множества. Сравнение мощностей. Теорема Кантора. Теорема Шрёдера — Бернштейна.

Счётные множества. Теорема о счётности бесконечного подмножества счётного множества. Теорема о счётности счётного объединения счётных множеств. Теорема о счётности декартова произведения счётных множеств. Счётность множества рациональных чисел. Лемма о том, что любое бесконечное множество содержит счётное подмножество. Теорема о мощности объединения бесконечного и счётного множеств.

Множества мощности континуума. Теорема Кантора. Теорема о том, что множество всех подмножеств множества натуральных чисел имеет мощность континуума. Теоремы о мощности конечного или счётного объединения множеств мощности континуума. Теорема о мощности декартова произведения множеств мощности континуума.

3. Числовые последовательности и ряды.

3.1. Числовые последовательности. Понятия последовательности чисел и её предела. Сходящиеся последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности. Предел суммы, произведения и частного двух последовательностей. Предельный переход в неравенствах. Принцип двух милиционеров.

Фундаментальные последовательности (последовательности Коши). Критерий Коши сходимости последовательности. Теорема Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности. Пределы последовательностей $\{a^k\}$, $\{k^n/a^k\}$, $\{\sqrt[k]{a}\}$, $\{\sqrt[k]{k}\}$, $\{a^k/k!\}$. Определение числа e.

Подпоследовательности и частичные пределы последовательности. Теорема Больцано — Вейерштрасса для последовательностей. Верхний и нижний пределы последовательности. Теорема о том, что верхний (нижний) предел последовательности является её наибольшим (наименьшим) частичным пределом.

3.2. Числовые ряды. Понятие числового ряда. Частичные суммы ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Гармонический ряд. Необходимый признак сходимости ряда. Теорема сравнения рядов с неотрицательными членами. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда. Признаки абсолютной сходимости: Вейерштрасса (мажорантный признак), Коши, Даламбера, Раабе. Прореживающий признак Коши. Обобщенный гармонический ряд $\sum_k 1/k^p$. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.

Сходимость произвольных рядов: преобразование Абеля, признаки Абеля и Дирихле. Произведение рядов. Теорема о произведении двух абсолютно сходящихся рядов.

4. Функции вещественной переменной.

4.1. Предел функции. Понятие функции вещественной переменной. Арифметические операции над функциями. Чётные и нечётные функции. Определение Коши предела функции в точке. Замечательный предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Теорема Гейне о существовании предела функции. Теорема о пределе суммы, произведения и частного двух функций. Переход к пределу в неравенствах. Предел функции при $x \to \pm\infty$.

4.2. Показательная, логарифмическая и степенная функции. Определение и свойства показательной, логарифмической и степенной функций. Графики этих функций. Замечательный предел $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$. Гиперболические функции.

4.3. Асимптотическое поведение функций. Понятия o и O и их свойства. Исследование пределов функций x^σ/a^x, $\log x/x^\sigma$ при $x \to \infty$ и $x^\sigma \log x$ при $x \to 0$. Касание порядка n графиков двух функций.

4.4. Непрерывные функции. Непрерывность функции в точке. Связь предела и непрерывности функции в точке. Пределы функции справа и слева. Совпадение односторонних пределов непрерывной функции. Типы разрывов функции. Теорема о локальной ограниченности непрерывной в точке функции. Теорема о локальной положительности функции, непрерывной и положительной в точке. Непрерывность в точке суммы, произведения, частного и композиции двух функций.

Непрерывность функции на множестве. Теорема о промежуточном значении функции, теорема Вейерштрасса о максимальном значении функции. Равномерная непрерывность функции и теорема Кантора — Гейне.

4.5. Монотонные функции. Возрастающие и убывающие функции. Существование обратной функции. Терема о возможном числе разрывов монотонной функции. Теорема о связи непрерывности и множества значений монотонной функции, определенной на отрезке. Непрерывность обратной функции.

5. Дифференцирование.

5.1. Производная функции. Понятие дифференцируемой функции и её производной. Выражение производной функции в точке через предел. Производные тригонометрических, показательной, логарифмической и степенной функций. Геометрический и физический смысл производной.

Производная суммы, произведения, частного и композиции двух функций. Теорема о производной обратной функции. Производная порядка n. Формула Лейбница (n-я производная произведения двух функций).

5.2. Классические теоремы дифференциального исчисления. Теоремы Ферма и Ролля. Теоремы Лагранжа и Коши о конечном приращении.

Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме, в формах Лагранжа и Коши. Ряд Тейлора. Представление показательной и тригонометрических функций в виде ряда Тейлора. Иррациональность числа e. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Примеры использования формулы Тейлора: неравенство Бернулли с вещественным показателем степени, исследование поведения сложных функций.

5.3. Степенные ряды. Комплексный степенной ряд. Теорема о сходимости комплексного степенного ряда в открытом круге. Радиус сходимости степенного ряда. Теорема Коши — Адамара. Показательная и тригонометрические функции комплексной переменной. Формула Эйлера.

5.4. Исследование поведения функций. Признак монотонности функции. Необходимые и достаточные условия экстремума функции. Выпуклость функции и её признаки. Неравенство Бернулли. Точки перегиба функции. Асимптота графика функции при $x \to \infty$. Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей.

5.5. Классические неравенства анализа. Неравенства Йенсена, Юнга, Гёльдера и Минковского.

2-й семестр

6. Интегрирование.

6.1. Неопределённый интеграл. Первообразная и неопределённый интеграл функции. Линейность неопределённого интеграла. Замена переменной и интегрирование по частям. Интегрирование рациональных и рационально-тригонометрических функций.

6.2. Определённый интеграл. Разбиение отрезка. Понятия интегрируемой по Риману функции и интеграла Римана. Ограниченность интегрируемой по Риману функции. Интегральные суммы Дарбу, верхний и нижний интегралы и их связь с интегралом Римана. Колебание функции на множестве. Необходимый и достаточный признак интегрируемости функции по Риману. Интегрируемость непрерывной функции. Теорема об интегрируемости функции, имеющей конечное число разрывов. Интегрируемость монотонной ограниченной функции. Линейность, аддитивность и монотонность интеграла Римана. Теоремы об интегрируемости модуля и произведения интегрируемых функций. Первая и вторая теоремы о среднем.

Связь определённого интеграла с первообразной. Формула Ньютона — Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменной в определённом интеграле. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

6.3. Несобственные интегралы. Два типа несобственных интегралов. Понятие сходимости несобственного интеграла, абсолютная и условная сходимости. Главное значение несобственного интеграла. Формулы интегрирования по частям и замены переменной в несобственном интеграле. Признаки сходимости несобственных интегралов: признак сравнения, критерий Коши, признаки Абеля и Дирихле. Интегральный признак сходимости рядов.

7. Функции многих переменных.

7.1. Пространство $\mathbb{R}^n$. Понятие метрики. Метрическая структура в $\mathbb{R}^n$. Евклидова метрика. Линейная (векторная) и евклидова структуры в $\mathbb{R}^n$. Норма и скалярное произведение векторов. Неравенство Коши — Буняковского. Стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Евклидова и другие нормы.

Открытые и замкнутые шары. Открытые и замкнутые множества. Внутренние и внешние точки множества. Граница множества. Теоремы об объединениях и пересечениях для систем открытых и замкнутых множеств. Понятие окрестности точки и множества. Предельные точки множества. Замыкание множества. Теорема о том, что замыкание множества есть наименьшее замкнутое множество, его содержащее. Понятие открытого покрытия множества. Компактные множества. Лемма о вложенных замкнутых кубах. Теорема о компактности замкнутого куба. Теорема Гейне — Бореля.

Сходимость последовательностей точек в $\mathbb{R}^n$. Единственность предельной точки сходящейся последовательности. Теорема о существовании сходящейся подпоследовательности ограниченной последовательности точек. Критерий Коши.

7.2. Функции многих переменных. Функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ (вектор-функции). Предел функции в точке. Единственность предела. Непрерывность функции в точке (определения через окрестности и через предел). Теорема о локальной ограниченности функции, непрерывной в точке. Теорема о локальной положительности скалярной функции, непрерывной и положительной в точке. Непрерывность в точке суммы, произведения, частного и композиции двух функций.

Непрерывность функции на множестве. Теорема об открытости прообраза открытого множества при непрерывном отображении. Теорема о компактности образа компактного множества. Понятие равномерной непрерывности. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте. Теорема о максимальном и минимальном значении непрерывной функции, заданной на компакте. Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^n$.

Понятие пути в $\mathbb{R}^n$. Линейно связные множества. Понятие области. Теорема о промежуточном значении скалярной функции, заданной на области.

8. Основы дифференциального исчисления в $\mathbb{R}^n$.

8.1. Производная функции многих переменных. Линейные отображения, их непрерывность и норма. Матрица линейного отображения. Дифференцируемость функции и её дифференциал (производная). Единственность дифференциала (корректность его определения). Дифференциал суммы, произведения, частного и композиции двух функций. Дифференциал обратной функции. Теорема о конечном приращении скалярной функции многих переменных. Теорема о постоянстве функции на области, где её дифференциал равен нулю.

8.2. Частные производные. Производная функции по направлению и её представление в виде предела. Частные производные. Координатное представление дифференциала отображения. Матрица Якоби. Матрица Якоби обратной функции. Достаточное условие дифференцируемости отображения (через частные производные). Градиент скалярной функции и его представление в декартовых координатах. Простейшие свойства градиента. Дивергенция и ротор вектор-функций. Их механический смысл.

8.3. Производные высших порядков. Производная по направлению порядка выше единицы. Частные производные высших порядков. Перестановочность частных производных. Формула Тейлора. Понятие дифференциала (производной) высшего порядка. Симметричность второго дифференциала.

8.4. Экстремум функции многих переменных. Понятие экстремума функции. Стационарная (критическая) точка функции. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.

3-й семестр

9. Функциональные последовательности и ряды.

9.1. Функциональные последовательности. Определения поточечной и равномерной сходимостей последовательности функций. Критерий Коши равномерной сходимости. Теорема Дини о равномерности сходимости монотонной последовательности непрерывных функций, определенных на компакте. Теорема о непрерывности равномерного предела последовательности непрерывных функций. Теорема о перестановке пределов двойной числовой последовательности. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла Римана. Теорема о предельном переходе под знаком производной.

9.2. Функциональные ряды.. Понятие функционального ряда. Определение поточечной и равномерной сходимости ряда. Критерий Коши равномерной сходимости ряда. Необходимый признак сходимости ряда. Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Критерий Дини равномерной сходимости ряда. Теорема об интегрировании по Риману равномерно сходящихся рядов. Теорема о дифференцировании рядов. Критерий Вейерштрасса равномерной и абсолютной сходимости ряда. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости ряда.

9.3. Равномерная сходимость вещественных степенных рядов. Теорема о равномерной и абсолютной сходимости на замкнутом отрезке, лежащем внутри интервала сходимости. Непрерывность суммы степенного ряда на интервале сходимости. Теорема о дифференцировании степенного ряда на интервале сходимости. Теорема о единственности разложения функции в степенной ряд. Понятие аналитической функции. Связь между аналитичностью и бесконечной дифференцируемостью функции.

9.4. Методы суммирования расходящихся рядов. Требования к правилам суммирования рядов: линейность и регулярность. Метод суммирования Чезаро. Доказательство линейности и регулярности метода Чезаро. Теорема Абеля о равномерной сходимости степенного ряда. Метод Абеля — Пуассона, его линейность и регулярность.

10. Интегралы, зависящие от параметра.

10.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Теорема о непрерывности по параметру интеграла от непрерывной функции. Теоремы о дифференцировании интеграла по параметру. Теорема об интегрировании интеграла Римана по параметру (о перестановке интегралов). Примеры вычисления интегралов с помощью интегрирования и дифференцирования интегралов, зависящих от параметра.

Теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций полиномами.

10.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Понятие равномерно сходящегося несобственного интеграла, зависящего от параметра. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов. Теорема о предельном переходе под знаком несобственного интеграла. Теорема о дифференцировании несобственного интеграла по параметру. Теоремы об интегрировании несобственных интегралов по параметру (о перестановке несобственных интегралов). $\mathit{\Gamma}$- и B-функции Эйлера и их основные свойства.

11. Мера и интеграл Лебега.

11.1. Общее понятие меры. Кольцо, σ-кольцо, алгебра, σ-алгебра множеств и их примеры. Функция множества. Общее понятие конечно-аддитивной и счётно-аддитивной мер. Пространство с мерой. Простейшие примеры мер: считающая мера, мера Дирака, мера длины на прямой.

11.2. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Параллелепипеды и их объем. Внешняя мера множества. Монотонность и счётная полуаддитивность внешней меры. Внешняя мера параллелепипеда. Множества меры нуль. Конечная аддитивность внешней меры относительно замкнутых множеств. Теоремы о внешней мере открытого множества и его замкнутого подмножества. Понятие измеримого множества (по Лебегу). Измеримость дополнения и пересечения измеримых множеств. Измеримость параллелепипедов и множеств меры нуль. Измеримость счетного объединения измеримых множеств. Счётная аддитивность внешней меры на измеримых множествах. Мера Лебега на σ-алгебре измеримых множеств. Непрерывность меры Лебега. Борелевские множества, множества типа F_σ и G_δ и их измеримость. Теорема о представлении измеримых множеств в виде объединения множества типа F_σ и множества меры нуль. Пример неизмеримого множества. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов.

Теорема Витали о покрытии. Инвариантность меры Лебега относительно ортогональных отображений. Теорема об изменении меры множества при линейном отображении.

11.3. Измеримые функции. Понятие измеримой функции. Теорема об измеримости композиции функций. Измеримость суммы, произведения и частного измеримых функций. Понятие борелевской функции. Лемма об измеримости поточечного предела последовательности измеримых функций. Сходимость почти всюду. Понятие эквивалентных функций. Теорема об измеримости предела сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций. Теорема Егорова.

11.4. Интеграл Лебега. Понятие простой функции. Интегрируемые (суммируемые) простые функции и их свойства. Теорема об измеримой функции как равномерном пределе последовательности простых функций. Определение интегрируемой (суммируемой) функции и обоснование его корректности. Интеграл Лебега и его свойства. Теорема об аддитивности интеграла Лебега. Неравенство Чебышева. Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Теорема Леви. Теорема Фату. Интегрируемость по Лебегу функции, интегрируемой по Риману.

Теорема о сечении измеримого множества. Теорема Фубини. Подграфик скалярной функции. Теорема о мере подграфика.

Теорема об оценке меры образа замкнутого шара при диффеоморфизме. Теорема о мере образа измеримого множества при диффеоморфизме. Теорема о замене переменных в интеграле Лебега. Полярные, цилиндрические и сферические координаты.

11.5. Пространства интегрируемых функций. Нормированные линейные пространства L^p. Неравенство Юнга. Вложения пространств L^p друг в друга. Неравенство Гёльдера. Неравенство Минковского. Понятие фундаментальной последовательности. Определение полного нормированного (банахова) пространства. Полнота пространств L^p. Плотные подмножества. Плотность пространства непрерывных функций в L^p, $p \in [1, \infty)$. Понятие сепарабельного пространства. Сепарабельность L^p при $p \in [1, \infty)$. Несепарабельность пространства L^∞.

4-й семестр

12. Ряды Фурье.

12.1. Гильбертовы пространства. Определение гильбертова пространства. Неравенство Коши — Буняковского. Полная система элементов гильбертова пространства. Понятия базиса и ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве. Счётность и существование базиса в сепарабельном пространстве. Процесс ортогонализации базиса. Понятие ряда Фурье. Лемма о наилучшей аппроксимации частичными суммами ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Теорема об эквивалентности равенства Парсеваля и полноты ортонормированной системы в гильбертовом пространстве. Теорема Рисса — Фишера. Понятие тотальной системы элементов. Теорема об эквивалентности полноты и тотальности системы элементов.

12.2. Тригонометрические ряды Фурье. Тригонометрическая система функций на отрезке $[-\pi, \pi]$, ее ортогональность в $L^2(-\pi, \pi)$. Понятие тригонометрического полинома (многочлена). Теорема об аппроксимации непрерывных функций тригонометрическими полиномами. Полнота тригонометрической системы в $L^2(-\pi, \pi)$ и ее следствия. Интеграл Дирихле. Лемма Римана — Лебега. Принцип локализации. Первое и второе условия Дини. Теоремы о сходимости ряда Фурье в точке. Условия Липшица и Гёльдера. Пространство функций непрерывных по Гёльдеру. Теорема о равномерной сходимости ряда Фурье непрерывных по Гёльдеру функций. Суммы Фейера. Теорема Фейера. Полные тригонометрические системы на отрезках $[0, \pi]$ и $[-\ell, \ell]$. Ряд Фурье в комплексной форме. Комплексное пространство $L^2(-\pi, \pi)$.

12.3. Преобразование Фурье. Интеграл Фурье. Теорема о представлении функции в виде интеграла Фурье. Интеграл Фурье в комплексной форме. Преобразование Фурье. Формула обращения. Теорема о равномерной сходимости образов Фурье сходящейся в $L^1(-\infty, \infty)$ последовательности функций. Теорема о непрерывности и убывании на бесконечности преобразования Фурье функции из $L^1(-\infty, \infty)$. Лемма об убывании на бесконечности функции из $L^1(-\infty, \infty)$ с ограниченной производной. Теорема о преобразовании Фурье производной функции. Теорема о производной преобразования Фурье. Свёртка функций. Преобразование Фурье свёртки и произведения функций. Преобразование Фурье функций из $L^2(-\infty, \infty)$. Теорема Планшереля. Применение преобразования Фурье к решению уравнения теплопроводности.

13. Анализ гладких отображений.

13.1. Непрерывные отображения. Понятие метрического пространства. Определение непрерывного отображения. Взаимно-однозначное отображение. Понятие гомеоморфизма. Сжимающие отображения. Понятие полного метрического пространства. Неподвижная точка отображения. Принцип сжимающих отображений. Теорема о непрерывной зависимости неподвижной точки от параметра.

13.2. Неявные функции. Понятие неявно заданного отображения. Теорема о неявной функции. Теоремы о непрерывности и о дифференцируемости неявного отображения. Теорема об обратном отображении. Теорема о гладкости обратного отображения.

13.3. Многообразия в $\mathbb{R}^n$. Определение p-мерного многообразия класса C^k в $\mathbb{R}^n$. Примеры многообразий. Теорема о локальном явном задании многообразия. Теорема о локальном параметрическом задании многообразия. Понятия параметризации, карты и атласа. Лемма о двух локальных параметризациях. Теорема о касательном пространстве к параметрически заданному многообразию. Ориентация параметрически заданных многообразий. Определение карт согласованной ориентации. Понятия согласованного атласа и ориентируемого многообразия. Определение многообразия с краем. Ориентация края многообразия.

13.4. Неявно заданные многообразия. Теорема о неявно заданном многообразии. Теорема о касательном пространстве к неявно заданному многообразию. Понятие экстремума функции на многообразии. Теорема о множителях Лагранжа.

14. Дифференциальные формы.

14.1. Полилинейные формы. Понятие полилинейной формы на линейном пространстве. Тензорное произведение полилинейных форм и его простейшие свойства (дистрибутивность, ассоциативность). Координатная линейная форма π. Лемма о представлении полилинейных форм. Определение кососимметрической полилинейной формы степени p (внешней p-формы).Пространство $\Lambda^p(X)$. Лемма о равенстве нулю p-формы от набора векторов, среди которых два совпадают, и её следствия.

Понятия перестановки и транспозиции. Теорема об изменении значения формы при перестановках аргументов. Операция альтернирования и ее простейшие свойства (линейность). Лемма о представлении p-форм. Базис в $\Lambda^p(X)$ и размерность этого пространства.

Определение внешнего произведения p-форм. Простейшие свойства внешнего произведения (дистрибутивность). Понятие упорядоченной перестановки. Теорема об эквивалентном определении внешнего произведения. Теорема об ассоциативности внешнего умножения. Связь внешнего произведения линейных форм с определителями. Каноническое представление внешних форм. Теорема об антикоммутативности внешнего произведения. Преобразование форм при линейных отображениях пространств и его свойства.

14.2. Дифференциальные формы в $\mathbb{R}^n$. Понятие внешней дифференциальной формы. Примеры дифференциальных форм. Дифференциал функции как дифференциальная форма. Координатная дифференциальная форма. Каноническое представление дифференциальных форм. Дифференциальные формы класса C^k.

Понятие внешнего дифференцирования. Теорема о внешнем дифференциале внешнего произведения форм. Теорема о равенстве нулю двойного внешнего дифференциала формы.

Перенос форм при отображениях. Линейность операции переноса. Теорема о переносе внешнего произведения форм. Теорема о переносе внешнего дифференциала формы. Точные и замкнутые формы. Пример замкнутой формы, не являющейся точной. Теорема Пуанкаре о точности замкнутых форм. Интегрирование дифференциальных форм по области в $\mathbb{R}^n$.

14.3. Дифференциальные формы на многообразиях. Определение дифференциальной формы, заданной на многообразии. Определение внешнего дифференциала формы, заданной на многообразии, и доказательство его корректности. Интеграл от формы по куску многообразия, заданному одной картой. Понятие разбиения единицы. Лемма Урысона. Теорема о существовании разбиении единицы. Определение интеграла от формы по многообразию и обоснование его корректности. Теорема Стокса.

Поверхностные интегралы 2-го рода. Форма объема в $\mathbb{R}^n$ и на многообразии. Поверхностные интегралы 1-го рода.

14.4. Элементы теории векторных полей в $\mathbb{R}^3$. Понятия скалярного и векторного полей. Дифференциальные формы в $\mathbb{R}^3$, соответствующие векторным полям. Связь операций над векторными полями (скалярное и векторное умножение) с операциями над дифференциальными формами. Определение операторов ∇, div, rot и их представление в декартовых координатах. Формулы для $\mathrm{rot}(f\vec{a})$, $\mathrm{div}(f\vec{a})$, $\mathrm{div}(\vec{a}\times\vec{b})$. Интегральные формулы векторного анализа. Формула Ньютона — Лейбница, формула Грина. Лемма о форме площади на 2-мерном многообразии в $\mathbb{R}^3$. Векторная формула Стокса. Формула Гаусса — Остроградского.

Понятие потенциального векторного поля. Понятие пути в $\mathbb{R}^3$. Теорема о необходимом и достаточном условии потенциальности векторного поля (через интеграл по замкнутым путям). Понятие гомотопных путей. Пути, гомотопные точке. Понятие односвязной области. Необходимое и достаточное условие потенциальности векторного поля для односвязных областей. Обобщение теоремы Пуанкаре для 1-форм на случай односвязных областей. Соленоидальные векторные поля. Векторный потенциал и условия его существования.

Литература

1. Зорич В.А. Математический анализ. М.: «Наука», Т.1,2 (1984).

2. Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. Ч. 1 (Кн.1, 2), Ч. 2 (Кн.1, 2).

3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: «Физматлит», 2006. Т. 1 - 3.

4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: «Наука» (1989).

5. Рудин У. Основы математического анализа. М.: «Мир» (1966).

6. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. М.: «Мир» (1968).

7. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: «Мир» (1971).

8. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: «Наука» (1990).

9. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. М.: «Дрофа», Т.1,2 (2001).

10. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу. М.: «Наука» (1981).