

Учебно-методический комплекс дисциплины «Прикладной функциональный анализ». 3 п.л. Автор: доцент Саженков С.А.

Предназначено для студентов 4-го курса специальности 010100.62 «Математика».

Аннотация. Основной целью курса является изучение продвинутых, по отношению к базовому курсу, вопросов функционального анализа, имеющих приложения в дискретных и распределенных математических моделях, относящихся к области экономики, механики сплошной среды, теоретической физики. Для достижения поставленной цели выделяются три основные задачи курса:

изучение теорем о неподвижных точках Брауэра и Шаудера и их приложений. По окончании изучения указанной дисциплины студент должен знать формулировки и основные этапы доказательства ключевых теорем курса, иметь представление о приложениях ключевых теорем, быть способным привести конкретные примеры.

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины

«Прикладной функциональный анализ»: ОК-6; ОК-7; ОК-8; ОК-10; ОК-11; ОК-14; ОК-15; ПК-1; ПК-2; ПК-3; ПК-4; ПК-5; ПК-6; ПК-7; ПК-8; ПК-9; ПК-10; ПК-11; ПК-12; ПК-13; ПК-15; ПК-16; ПК-18; ПК-19; ПК-21; ПК-22; ПК-23; ПК-27; ПК-29.

Рабочая программа.

1. Введение (повторение необходимых основ функционального анализа). Определения и основные свойства нормированных пространств, компактных множеств, понятия сильной и слабой сходимостей, теорема Алаоглу, теорема Хана — Банаха в аналитической форме и ее следствия.

2. Теоремы о неподвижных точках.

2.1. Предисловие: понятие неподвижной точки, примеры элементарных теорем о неподвижных точках.

2.2. Предварительные сведения: определители матриц и якобианы дифференцируемых отображений, лемма о дивергенции.

2.3. Теорема Брауэра: лемма о несуществовании (дифференцируемой) ретракции, теорема Брауэра в слабой форме, теоремы Брауэра для множеств, гомеоморфных замкнутому единичному шару и для множеств, гомеоморфных компактным выпуклым множествам, принцип несуществования ретракции.

2.4. Теорема Шаудера: нелинейный проектор Шаудера, теоремы Шаудера и Тихонова—Шаудера.

2.5. Два приложения теорем Брауэра и Шаудера: теорема о матрице с положительными компонентами — наличие одномерного собственного подпространства, в котором есть вектор с положительными компонентами; теорема Каратеодори.

Литература.

Основные источники:

1. J. F. Toland, Bifurcation Theory, University of Bath, The United Kingdom, Lecture Notes, 1992.
2. Ж. Л. Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М.: Мир, 1972.
3. Ж.. Дьедонне, Основы современного анализа, М.: Мир, 1964.

Дополнительные источники:

1. А. Б. Ковригин, Математический анализ динамических систем, учебное пособие, Ленинград: издательство ЛГУ, 1980.
2. В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров, Сборник задач по оптимизации, Физматлит, 2005.
3. Ж.-П. Обен, И. Экланд, Прикладной нелинейный анализ, М.: Мир, 1988.
4. Д. Киндерлерер, Г. Стампакья, Введение в вариационные неравенства и их приложения, М.: Мир, 1983.

Экзаменационные билеты.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ ПО КУРСУ «ПРИКЛАДНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

1. Лемма о дивергенции.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ ПО КУРСУ «ПРИКЛАДНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

2. Лемма о присоединенной матрице: доказательство для базисных векторов.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ ПО КУРСУ «ПРИКЛАДНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

3. Лемма о присоединенной матрице: доказательство для векторов общего вида, в предположении, что для базисных векторов справедливость установлена.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ ПО КУРСУ «ПРИКЛАДНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

4. Ретракция. Лемма о несуществовании ретракции. Принцип несуществования ретракции.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ ПО КУРСУ
«ПРИКЛАДНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

5. Слабая форма теоремы Брауэра.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ ПО КУРСУ
«ПРИКЛАДНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

6. Сильная форма теоремы Брауэра о неподвижной точке I.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ ПО КУРСУ
«ПРИКЛАДНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

7. Сильная форма теоремы Брауэра о неподвижной точке II.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ ПО КУРСУ
«ПРИКЛАДНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

8. Нелинейный проектор Шаудера, его свойства.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ ПО КУРСУ
«ПРИКЛАДНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

9. Теорема Шаудера о неподвижной точке I (теорема Шаудера—Тихонова).

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ ПО КУРСУ
«ПРИКЛАДНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

10. Теорема Шаудера о неподвижной точке II.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ ПО КУРСУ
«ПРИКЛАДНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

11. Приложение теоремы Брауэра: теорема о квадратной матрице с положительными элементами.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ ПО КУРСУ
«ПРИКЛАДНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

12. Приложение теоремы Шаудера: теорема Каратеодори (локальная версия).

ЛЕКЦИИ ПО ПРИКЛАДНОМУ ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Саженов С. А., Саженова Е. В.

10 мая 2011 г.

1 Введение

1.1 Нормированные пространства

Определение 1.1. Нормированное пространство X — это линейное пространство над полем вещественных чисел, снабженное нормой $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей аксиомам

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$.

Справедливо неравенство

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in X. \quad (1.1)$$

Определение 1.2. Последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится сильно к $x \in X$, то есть $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$, если $\|x_n - x\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Определение 1.3. Нормированное пространство X называется банаховым, если всякая фундаментальная последовательность из пространства X сходится к $x \in X$.

1.2 Компактные множества

Пусть X — банахово пространство.

Определение 1.4. Множество $K \subset X$ компактно, если из любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ множества K в X ($K \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$) можно выделить конечное подпокрытие, то есть найдутся такие $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, что $K \subset \bigcup_{i=1}^N U_{\alpha_i}$.

Теорема 1.1. (Критерий компактности.) Пункты 1–3 эквивалентны друг другу:

1. $K \subset X$ — компактное множество;
2. для любой последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ такая, что $x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x \in K$;
3. K замкнуто ($K = \overline{K}$) и вполне ограничено ($\forall \varepsilon > 0 \exists a_1, \dots, a_N \in K : K \subset \bigcup_{i=1}^N B(a_i, \varepsilon)$), где $B(a_i, \varepsilon)$ — открытый шар с центром a_i радиуса ε .

Определение 1.5. Множество $K \subset X$ предкомпактно, если его замыкание \overline{K} компактно.

1.3 Сопряженное пространство

Определение 1.6. *Банахово пространство X^* , состоящее из всех линейных отображений $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, обладающих конечной нормой*

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|,$$

называется сопряженным пространством к X .

Определение 1.7. *Последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ сходится слабо к $x \in X$, то есть $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} x$, если $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$ для любого $f \in X^*$.*

Предложение 1.1. *Всякая слабо сходящаяся последовательность ограничена.*

Определение 1.8. *Последовательность $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ сходится $*$ -слабо к $f \in X^*$, то есть $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w^*} f$, если $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$ для любого $x \in X$.*

Теорема 1.2. (Алаоглу) *Если X сепарабельно и $K \subset X^*$ ограничено, то для любой последовательности $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ найдется подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ такая, что $f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{w^*} f \in X^*$*

Предложение 1.2. *Пусть X рефлексивно, X^* сепарабельно и $K \subset X$ ограничено. Тогда для любой последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ такая, что $x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{w} x \in K$*

Зафиксируем $x \in X$ и рассмотрим отображение $\varphi_x : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что $\varphi_x(f) = f(x)$ для всех $f \in X^*$. Очевидно, что отображение φ_x линейно.

Предложение 1.3. *Отображение $\kappa : X \rightarrow X^{**}$ такое, что $\kappa(x) = \varphi_x$, является изометрией, то есть имеет место равенство $\|\varphi_x\|_{X^{**}} = \|x\| < \infty$.*

Определение 1.9. *Вложение $\kappa : X \rightarrow X^{**}$ называется естественной изометрией.*

Предложение 1.4. *Если $\kappa(X) = X^{**}$, то пространство X рефлексивно.*

2 Теоремы о неподвижных точках

2.1 Предисловие

Некоторые теоремы о неподвижных точках уже известны из предыдущих курсов.

Теорема 2.1. (Принцип сжимающих отображений Банаха) *Всякое сжимающее отображение A , определенное в полном метрическом пространстве E , имеет одну и только одну неподвижную точку, то есть для любого $A : E \rightarrow E$ такого, что $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y)$ для всех $x, y \in E$ (ρ – метрика, $\alpha = \text{const} \in (1, 0)$), существует единственный $x_* \in E$ такой, что $Ax_* = x_*$.*

Приведем еще одну элементарную теорему из курса математического анализа.

Теорема 2.2. *Каждая непрерывная функция f из замкнутого ограниченного отрезка $[a, b]$ в себя имеет неподвижную точку, то есть для любой $f \in C[a, b]$ такой, что $f([a, b]) \subset [a, b]$, существует $x_* \in [a, b]$, для которой $f(x_*) = x_*$.*

Доказательство. Имеем $a - f(a) \leq 0 \leq b - f(b)$, значит по теореме о среднем значении существует $x_* \in [a, b]$ такая, что $x_* - f(x_*) = 0$. \square

В настоящей главе мы продолжим эту элементарную теорему на случай пространства \mathbb{R}^n , а затем на произвольные банаховы пространства. Эти продолжения не элементарны, имеют глубокие последствия в топологии и обширно используются при изучении нелинейных уравнений и систем.

2.2 Определители и якобианы

2.2.1 Свойства определителей

Определение 2.1. Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ — матрица размерности $n \times n$. Определителем матрицы A называют величину

$$\det A = \sum_{p \in S_n} \text{sign}(p) \prod_{i=1}^n a_{ip(i)}, \quad (2.1)$$

где S_n — это группа подстановок n -элементного множества.

Для заданных i, j коэффициент A_{ij} при элементе a_{ij} в выражении $\det A$ имеет следующий вид:

$$A_{ij} = \sum_{p \in S_n^{ij}} \text{sign}(p) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{kp(k)}, \quad \text{где } S_n^{ij} = \{p \in S_n \mid p(i) = j\}.$$

Определение 2.2. Коэффициент A_{ij} называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} .

Имеет место представление

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}, \quad (2.2)$$

где \tilde{A}_{ij} — $(n-1) \times (n-1)$ -матрица, получающаяся из A удалением i -ой строки и j -ого столбца.

Рассмотрим определитель матрицы A как функцию компонентов a_{ij} , тогда из определения ?? следует, что

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} (\det A) = A_{ij}.$$

Значит, если $a_{ij} = a_{ij}(\lambda)$ дифференцируемы по λ , то

$$\frac{d}{d\lambda} (\det A) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(\lambda) \frac{da_{ij}(\lambda)}{d\lambda} \quad (2.3)$$

Классические формулы линейной алгебры:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \det A \quad i = \overline{1, n} \quad (2.4)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} A_{ij} = 0 \quad i, k = \overline{1, n}, i \neq k \quad (2.5)$$

$$C = AB \Rightarrow \det C = \det A \det B. \quad (2.6)$$

Формула (2.4) — это формула разложения определителя по строке. Справедлива также формула разложения по столбцу.

Из формул (2.3)–(2.4) следует, что

$$\frac{d}{d\lambda} (\det A) = \sum_{i=1}^n \det \hat{A}_i, \quad (2.7)$$

где матрица \hat{A}_i получается из матрицы A заменой i -ой строки на строку производных по λ . Такая же формула справедлива и в случае, если матрица \hat{A}_i получается путем замены столбца.

Определение 2.3. Присоединенной матрицей к матрице A называется матрица

$$\text{adj } A = (A_{ji})_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Из формул (2.4)–(2.5) следует

$$A \cdot \text{adj } A = \text{adj } A \cdot A = (\det A)E, \quad (2.8)$$

где E — единичная матрица.

2.2.2 Лемма о дивергенции

Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывно дифференцируемое отображение,

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Определение 2.4. Матрицей Якоби отображения f называется матрица

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Определение 2.5. Дивергенцией отображения f называется

$$\operatorname{div}_x f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Лемма 2.1. (Лемма о дивергенции) Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ открытое множество, $f \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$ и $A = f'(x)$. Тогда для всех $x \in U$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij}(x) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad (2.9)$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение к $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

В частности,

$$n \det A(x) = \operatorname{div}_x W(x), \quad \text{где } W(x) = \operatorname{adj} A(x) f(x). \quad (2.10)$$

Доказательство. Зафиксируем i , обозначим

$$f^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} (f_1(x), \dots, f_{i-1}(x), f_{i+1}(x), \dots, f_n(x))^T.$$

Из формулы (2.2) следует

$$A_{ij}(x) = (-1)^{i+j} \det \left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{j-1}}, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{j+1}}, \dots, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_n} \right) \quad (2.11)$$

В силу (2.7) из (2.11) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij} &= \sum_{l=1}^{j-1} (-1)^{i+j} \det \left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 f^{(i)}}{\partial x_j \partial x_l}, \dots, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{j-1}}, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{j+1}}, \dots, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_n} \right) + \\ &+ \sum_{l=j+1}^n (-1)^{i+j} \det \left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{j-1}}, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{j+1}}, \dots, \frac{\partial^2 f^{(i)}}{\partial x_j \partial x_l}, \dots, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_n} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=1}^{j-1} S_1^{jl} + \sum_{l=j+1}^n S_2^{jl}. \end{aligned}$$

Суммируем по j , а затем во второй сумме взаимно переобозначим индексы j и l :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij}(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{j-1} S_1^{jl} + \sum_{j=1}^n \sum_{l=j+1}^n S_2^{jl} = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{j-1} S_1^{jl} + \sum_{l=1}^n \sum_{j=l+1}^n S_2^{lj} = \sum_{\substack{j,l=1 \\ l < j}}^n (S_1^{jl} + S_2^{lj}). \quad (2.12)$$

Сравним теперь S_1^{jl} и S_2^{lj} :

$$\begin{aligned} S_1^{jl} &= (-1)^{i+j} \det \left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 f^{(i)}}{\partial x_j \partial x_l}, \dots, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{j-1}}, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{j+1}}, \dots, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_n} \right) \\ S_2^{lj} &= (-1)^{i+l} \det \left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{l-1}}, \underbrace{\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{l+1}}, \dots, \frac{\partial^2 f^{(i)}}{\partial x_l \partial x_j}}_{(j-l) \text{ столбцов}}, \dots, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_n} \right). \end{aligned}$$

Если во втором определителе переставить по циклу выделенные столбцы, то получим первый определитель, умноженный на $(-1)^{j-l-1}$. Но тогда $(-1)^{i+l} \cdot (-1)^{j-l-1} = (-1)^{i+j-1}$ и $S_1^{jl} + S_2^{lj} = 0$, следовательно формула (2.9) установлена.

Далее, если $W(x) = \text{adj } A(x)f(x)$, то

$$W_j(x) = \sum_{i=1}^n (\text{adj } A(x))_{ji} f_i = \sum_{i=1}^n A_{ij} f_i,$$

Откуда

$$\text{div}_x W(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{i=1}^n A_{ij} f_i \right] = \sum_{i,j=1}^n \left[\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} f_i + A_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \stackrel{(2.9)}{=} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} a_{ij} \stackrel{(2.4)}{=} n \det A.$$

□

2.2.3 Лемма о присоединенной матрице

Пусть $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$ – открытый шар с центром в точке a радиуса r в \mathbb{R}^n , тогда $\bar{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$ – замыкание $B(a, r)$. Пусть $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ – единичная сфера в \mathbb{R}^n .

Лемма 2.2. (Лемма о присоединенной матрице) Пусть $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто и $\bar{B}(0, 1) \subset U$, $A = f'(x)$. Тогда, если $f(x) = x$ для всех $x \in S^{n-1}$, то

$$(\text{adj } A(x) x, x) = 1 \quad \forall x \in S^{n-1}. \quad (2.13)$$

Доказательство. Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ стандартный декартовый базис в пространстве \mathbb{R}^n .

Этап I. Докажем, что равенство (2.13) справедливо при $x = e_n$.

Поскольку $f(x) = x$ для всех $x \in S^{n-1}$, то верно тождество

$$f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \frac{x}{\|x\|} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Продифференцируем i -тую компоненту этого тождества по переменной x_j :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(f_i\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \frac{x_i}{\|x\|} \right) = \sum_{k=1}^n A_{ik} \left(\frac{x}{\|x\|}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_k}{\|x\|}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i}{\|x\|}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n A_{ik} \left(\frac{x}{\|x\|}\right) \left(\delta_{jk} - \frac{x_k x_j}{\|x\|^2} \right) \frac{1}{\|x\|} - \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{\|x\|^2} \right) \frac{1}{\|x\|}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\|x\| = 1$ и $i = \bar{1, n}$ получаем

$$0 = \sum_{k=1}^n A_{ik}(x) (\delta_{jk} - x_k x_j) - (\delta_{ij} - x_i x_j).$$

Домножая последнее равенство на y_j и суммируя по j , а затем собирая полученные скалярные равенства для $i = \overline{1, n}$ в одно векторное, приходим к следующему утверждению:

$$(A(x) - E)(y - (x, y)x) = 0 \quad \forall x \in S^{n-1} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.14)$$

Далее заметим, что для всех $y \perp x$ из (2.14) следует, что $A(x)y = y$. Значит

$$A(e_n)y = y \quad \forall y \in \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}. \quad (2.15)$$

Кроме того, поскольку $f(x) = x$ для всех $x \in S^{n-1}$, то верно еще одно тождество

$$\left(f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Дифференцируя это тождество по переменным x_i , $i = \overline{1, n}$, сразу выводим, что $A(x)x = 0$ для всех $x \in S^{n-1}$ и, в частности,

$$A(e_n)e_n = 0. \quad (2.16)$$

Из равенств (2.15) и (2.16) находим

$$A(e_n) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}, 0).$$

Тогда

$$\text{adj } A(e_n) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и, следовательно, равенство (2.13) справедливо при $x = e_n$.

Этап II. Докажем, что левая часть формулы (2.13) инвариантна относительно ортогональных преобразований.

Пусть A – произвольная матрица, тогда матрица $A_\varepsilon = A + \varepsilon E$ обратима при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Если M – произвольная обратимая матрица, то

$$\det(M^{-1}A_\varepsilon M)E \stackrel{(2.8)}{=} (M^{-1}A_\varepsilon M)\text{adj}(M^{-1}A_\varepsilon M),$$

и, с другой стороны,

$$\det(M^{-1}A_\varepsilon M)E \stackrel{(2.6)}{=} \det(A_\varepsilon)E = M^{-1}(\det(A_\varepsilon)E)M \stackrel{(2.8)}{=} M^{-1}(A_\varepsilon \text{adj } A_\varepsilon)M = (M^{-1}A_\varepsilon M)(M^{-1}(\text{adj } A_\varepsilon)M).$$

Так как матрица $M^{-1}A_\varepsilon M$ обратима, то из двух последних равенств вытекает, что

$$\text{adj}(M^{-1}A_\varepsilon M) = M^{-1}(\text{adj } A_\varepsilon)M.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и полагая теперь $A = A(x) = f'(x)$, находим

$$\text{adj}(M^{-1}A(x)M) = M^{-1}(\text{adj } A(x))M. \quad (2.17)$$

Рассмотрим функцию $g(x) = M^{-1}f(Mx)$, тогда по правилу дифференцирования сложной функции $B(x) \stackrel{\text{def}}{=} g'(x) = M^{-1}A(Mx)M$. Поэтому

$$\text{adj}(B(M^{-1}x)) = \text{adj}(M^{-1}A(MM^{-1}x)M) = \text{adj}(M^{-1}A(x)M) \stackrel{(2.17)}{=} M^{-1}(\text{adj } A(x))M. \quad (2.18)$$

Теперь пусть M – ортогональная матрица, тогда

$$\begin{aligned} (\operatorname{adj} A(x) x, x) &= (\operatorname{adj} A(x) x, MM^{-1}x) = (M^T \operatorname{adj} A(x) x, M^{-1}x) = (M^{-1} \operatorname{adj} A(x) x, M^{-1}x) = \\ &= (M^{-1} \operatorname{adj} A(x) MM^{-1}x, M^{-1}x) \stackrel{(2.18)}{=} (\operatorname{adj} (B(M^{-1}x)) M^{-1}x, M^{-1}x). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Кроме того, поскольку $Mx \in S^{n-1}$ для всех $x \in S^{n-1}$, то $g(x) = M^{-1}f(Mx) = M^{-1}Mx = x$ для всех $x \in S^{n-1}$. Тогда, применяя результат первого этапа доказательства к функции $g(x)$, получим

$$(\operatorname{adj} B(e_n) e_n, e_n) = 1. \quad (2.20)$$

Наконец, для любого $x \in S^{n-1}$ найдется ортогональная матрица M такая, что $M^{-1}x = e_n$. Таким образом,

$$(\operatorname{adj} A(x) x, x) \stackrel{(2.19)}{=} (\operatorname{adj} (B(M^{-1}x)) M^{-1}x, M^{-1}x) = (\operatorname{adj} B(e_n) e_n, e_n) \stackrel{(2.20)}{=} 1,$$

что и завершает доказательство. \square

2.3 Теоремы Брауэра

2.3.1 Ретракция. Лемма о несуществовании ретракции

Определение 2.6. Пусть X – метрическое пространство, A, B – замкнутые множества такие, что $A \subset B \subset X$. Множество A называется ретрактом множества B , если существует непрерывное отображение $f : B \rightarrow A$ такое, что $f(x) = x$ для всех $x \in A$. Отображение f называется ретракцией B на A .

Лемма 2.3. (Лемма о несуществовании дважды дифференцируемой ретракции) Пусть B' – открытый шар в \mathbb{R}^n , $B' \supset \bar{B}(0, 1)$, тогда не существует $f \in C^2(B', S^{n-1})$ такой, что $f(x) = x$ для всех $x \in S^{n-1}$.

Доказательство. Проведем доказательство методом от противного.

Предположим, что такое f существует, тогда справедливо тождество

$$\|f(x)\|^2 - 1 = 0 \quad \forall x \in B',$$

дифференцируя которое, получаем

$$f'(x)f(x) = 0 \quad \forall x \in B'.$$

Но по условию леммы $f(x) \neq 0$ ($\|f(x)\| = 1$) для всех $x \in B'$, значит матрица $f'(x)$ вырождена:

$$\det f'(x) = 0 \quad \forall x \in B'. \quad (2.21)$$

Справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(2.21)}{=} \int_{\bar{B}(0,1)} n \det f'(x) dx \stackrel{(2.10)}{=} \int_{\bar{B}(0,1)} \operatorname{div}((\operatorname{adj} f'(x))f(x)) dx = \\ &= \int_{S^{n-1}} ((\operatorname{adj} f'(x))f(x), \bar{n}) ds = \int_{S^{n-1}} ((\operatorname{adj} f'(x))x, x) ds \stackrel{(2.13)}{=} \int_{S^{n-1}} 1 ds = \operatorname{meas} S^{n-1}. \end{aligned}$$

Третье равенство в этой цепочке получено применением формулы Грина, \bar{n} – единичный вектор внешней нормали к сфере S^{n-1} . Четвертое равенство справедливо, так как $f(x) = x$ и $\bar{n} = x$ всюду на сфере S^{n-1} . Сравнивая начало и конец приведенной цепочки, получаем противоречие. Таким образом, лемма доказана. \square

2.3.2 Слабая форма теоремы Брауэра

Докажем вспомогательную версию основного результата этого параграфа.

Теорема 2.3. Пусть B' – открытый шар в \mathbb{R}^n , $B' \supset \overline{B}(0, 1)$, функция $f \in C^2(B', B(0, 1))$. Тогда существует точка $x_0 \in B(0, 1)$ такая, что $f(x_0) = x_0$.

Доказательство. Проведем доказательство методом от противного.

Предположим, что $f(x) \neq x$ для всех $x \in B'$ (по условию теоремы $f(B') \subset B(0, 1)$, поэтому $f(x) \neq x$ для всех $x \in B' \setminus B(0, 1)$). Отсюда следует, что для всех $x \in B'$ прямая $\{f(x) + \lambda(x - f(x)), \lambda \in \mathbb{R}\}$ пересекает сферу S^{n-1} ровно в двух точках, поскольку уравнение

$$\|f(x) + \lambda(x - f(x))\|^2 = 1$$

имеет ровно два решения. В самом деле, перепишем это уравнение в другой форме:

$$\lambda^2 \|x - f(x)\|^2 + \lambda 2(f(x), x - f(x)) + \|f(x)\|^2 - 1 = 0. \quad (2.22)$$

Уравнение (2.22) является квадратным относительно λ , и его дискриминант имеет вид:

$$D = 4(f(x), x - f(x))^2 + 4(1 - \|f(x)\|^2)\|x - f(x)\|^2.$$

Так как $f(B') \subset B(0, 1)$, то $\|f(x)\|^2 < 1$ для всех $x \in B'$, поэтому $D > 0$. Кроме того, свободный член уравнения (??) отрицательный, следовательно, по теореме Виета его корни имеют разные знаки.

Рассмотрим положительный корень уравнения (2.22) как функцию точки x :

$$\lambda(x) = \frac{-2(f(x), x - f(x)) + \sqrt{D}}{2\|x - f(x)\|^2} \in C^2(B', \mathbb{R}).$$

Заметим, что $\lambda(x) = 1$ при $\|x\| = 1$ (в этом легко убедиться подстановкой).

Теперь положим $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + \lambda(x)(x - f(x))$ для всех $x \in B'$. Тогда по построению $F \in C^2(B', S^{n-1})$ и $F(x) = x$ для всех $x \in S^{n-1}$. Но по лемме 2.3 о несуществовании дважды непрерывно дифференцируемой ретракции такой функции быть не может. Это противоречие завершает доказательство теоремы. \square

2.3.3 Теорема Брауэра о неподвижной точке в сильной форме

Теорема 2.4. (Брауэра I) Пусть Ω – замкнутое непустое подмножество в \mathbb{R}^n , гомеоморфное $\overline{B}(0, 1)$, и $f : \Omega \rightarrow \Omega$ – непрерывное отображение. Тогда найдется $x_0 \in \Omega$ такой, что $f(x_0) = x_0$.

Доказательство. Проведем доказательство в три этапа.

Этап I. Предположим, что теорема справедлива для $\Omega = \overline{B}(0, 1)$. Покажем, что она остается справедливой и для произвольного допустимого Ω .

Пусть $h : \Omega \rightarrow \overline{B}(0, 1)$ – гомеоморфизм (взаимнооднозначное непрерывное отображение), существующий по условию теоремы. Тогда отображение $h \circ f \circ h^{-1} : \overline{B}(0, 1) \rightarrow \overline{B}(0, 1)$ непрерывно и по предположению имеет неподвижную точку $y_0 \in \overline{B}(0, 1)$, то есть $h \circ f \circ h^{-1}(y_0) = y_0$. Таким образом, получаем

$$f(h^{-1}(y_0)) = f \circ h^{-1}(y_0) = h^{-1} \circ h \circ f \circ h^{-1}(y_0) = h^{-1}(y_0).$$

Следовательно, $x_0 = h^{-1}(y_0) \in \Omega$ – неподвижная точка отображения f .

Этап II. Докажем, что теорема справедлива для $\Omega = \overline{B}(0, 1)$.

Для любого $k > 1$ положим $B_k = B(0, 1 - \frac{1}{k})$, $B^k = B(0, 1 + \frac{1}{k})$ ($B_k \subset \overline{B}_k \subset B(0, 1) \subset B^k$) и определим отображение $f^k : B^k \rightarrow B_k$ по формуле:

$$f^k(x) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) f\left(\frac{kx}{1+k}\right) \quad \forall x \in B^k.$$

Отображение f^k непрерывно для любого $k > 1$, и, кроме того, $f^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f$ равномерно на $\overline{B}(0, 1)$.

Предположим, что для любого $k > 1$ существует последовательность дважды непрерывно дифференцируемых отображений $\{g_m^k : \overline{B}^{2k} \mapsto \overline{B}_{2k}\}_{m \in \mathbb{N}}$ такая, что $g_m^k \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} f^k$ равномерно на \overline{B}^{2k} . Обоснуем это предположение на третьем этапе доказательства.

Так как $B^{2k} \supset \overline{B}(0, 1) \supset B(0, 1) \supset \overline{B}_{2k}$, то в силу теоремы 2.3 для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдется неподвижная точка $x_m^k \in \overline{B}_{2k}$ отображения g_m^k , то есть $g_m^k(x_m^k) = x_m^k$. По теореме Больцано-Вейерштрасса из последовательности $\{x_m^k\}_{m \in \mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{m_l}^k\}_{l \in \mathbb{N}}$, сходящуюся к некоторому $x^k \in \overline{B}(0, 1)$.

В силу того, что f^k непрерывно, $g_{m_l}^k \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} f^k$ равномерно на \overline{B}^{2k} и $x_{m_l}^k \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} x^k$ получаем

$$\|f^k(x^k) - x^k\| \leq \|f^k(x^k) - f^k(x_{m_l}^k)\| + \underbrace{\|f^k(x_{m_l}^k) - g_{m_l}^k(x_{m_l}^k)\|}_{x_{m_l}^k} + \|x_{m_l}^k - x^k\| \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} 0.$$

Значит $f^k(x^k) = x^k$ для любого $k > 1$.

Будем считать, что $x^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_0 \in \overline{B}(0, 1)$, иначе заменим ее на сходящуюся подпоследовательность, которая существует по теореме Больцано-Вейерштрасса. Вспомним, что f непрерывно и $f^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f$ равномерно на $\overline{B}(0, 1)$. Тогда, проводя рассуждения аналогичные предыдущим, получаем

$$\|f(x_0) - x_0\| \leq \|f(x_0) - f(x^k)\| + \underbrace{\|f(x^k) - f^k(x^k)\|}_{x^k} + \|x^k - x_0\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Таким образом, $f(x_0) = x_0$, то есть $x_0 \in \overline{B}(0, 1)$ неподвижная точка отображения f .

Этап III. Остается доказать предположение, что для любого $k > 1$ существует последовательность отображений $\{g_m^k(x)\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^2(\overline{B}^{2k}, \overline{B}_{2k})$ такая, что $g_m^k \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} f^k$ равномерно на \overline{B}^{2k} .

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ – бесконечно дифференцируемая четная неотрицательная функция, такая что $\text{supp } \varphi \subset B(0, 1)$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$. Например, в качестве φ можно взять стандартное регуляризующее ядро:

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x_1) \cdot \dots \cdot \tilde{\varphi}(x_n), \text{ где } \tilde{\varphi}(x_i) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x_i^2}\right), & |x_i| < 1, \\ 0, & |x_i| \geq 1. \end{cases}$$

Положим $\varphi_m(x) = m^n \varphi(mx)$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Заметим, что φ_m четная, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(x) dx = 1$ и $\text{supp } \varphi_m \subset B(0, \frac{1}{m})$.

Для любых $k, m \in \mathbb{N}$ определим отображение $g_m^k(x)$ следующим образом:

$$g_m^k(x) = \int_{B^k} \varphi_m(x-y) f^k(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.23)$$

Тогда g_m^k переводит \overline{B}^{2k} на \overline{B}_{2k} и является бесконечно гладким, как свертка бесконечно гладкой и непрерывной функций.

Покажем, что $g_m^k \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} f^k$ равномерно на \overline{B}^{2k} .

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как отображение f^k непрерывно на \overline{B}^k , то оно равномерно непрерывно на \overline{B}^k . Тогда найдется $\delta \in (0, \frac{1}{2k})$ такое, что

$$\|f^k(x) - f^k(y)\| \leq \varepsilon \quad \forall x, y \in \overline{B}^k \text{ таких, что } \|x - y\| \leq \delta. \quad (2.24)$$

Теперь пусть $m > \frac{1}{\delta} > 2k$ и $x \in \overline{B}^{2k}$. Докажем, что $\|g_m^k(x) - f^k(x)\| \leq \varepsilon$.

Заметим, что для любых $x \in \overline{B^{2k}}$ и $y \notin B^k$ верно неравенство:

$$\|y - x\| \geq \|y\| - \|x\| \geq 1 + \frac{1}{k} - \left(1 + \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k} > \frac{1}{m}.$$

Так как $\text{supp } \varphi_m \subset B(0, \frac{1}{m})$ и φ_m четная, то, учитывая это неравенство, получаем

$$\int_{B^k} \varphi_m(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(x - y) dy \stackrel{(z=y-x)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(-z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(z) dz = 1. \quad (2.25)$$

Справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \|g_m^k(x) - f^k(x)\| &\stackrel{(2.23)}{=} \left\| \int_{B^k} \varphi_m(x - y) f^k(y) dy - f^k(x) \right\| \stackrel{(2.25)}{=} \\ &= \left\| \int_{B^k} \varphi_m(x - y) f^k(y) dy - \left[\int_{B^k} \varphi_m(x - y) dy \right] f^k(x) \right\| = \left\| \int_{B^k} \varphi_m(x - y) (f^k(y) - f^k(x)) dy \right\| = \\ &= \left\| \int_{\{y \in B^k: \|x-y\| \leq \delta\}} \varphi_m(x - y) (f^k(y) - f^k(x)) dy \right\| + \left\| \int_{\{y \in B^k: \|x-y\| > \delta\}} \varphi_m(x - y) (f^k(y) - f^k(x)) dy \right\|. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Оценим первое слагаемое в правой части равенства (2.26):

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\{y \in B^k: \|x-y\| \leq \delta\}} \varphi_m(x - y) (f^k(y) - f^k(x)) dy \right\| &\leq \\ &\leq \|f^k(y) - f^k(x)\| \int_{\{y \in B^k: \|x-y\| \leq \delta\}} \varphi_m(x - y) dy \stackrel{(2.24)}{\leq} \varepsilon \int_{B^k} \varphi_m(x - y) dy \stackrel{(2.25)}{=} \varepsilon \end{aligned} \quad (2.27)$$

Так как $f^k : B^k \mapsto B_k \subset B(0, 1)$, то $\|f^k(y) - f^k(x)\| \leq \|f^k(y)\| + \|f^k(x)\| \leq 2$. Учитывая данное неравенство, оценим второе слагаемое в правой части равенства (2.26):

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\{y \in B^k: \|x-y\| > \delta\}} \varphi_m(x - y) (f^k(y) - f^k(x)) dy \right\| &\leq \|f^k(y) - f^k(x)\| \int_{\{y \in B^k: \|x-y\| > \delta\}} \varphi_m(x - y) dy \leq \\ &\leq 2 \int_{\{y \in B^k: \|x-y\| > \delta\}} \varphi_m(x - y) dy \leq 2 \int_{\|x-y\| > \delta} \varphi_m(x - y) dy \stackrel{(z=y-x)}{=} \\ &= 2 \int_{\|z\| > \delta} \varphi_m(z) dz \leq 2 \int_{\|z\| > \frac{1}{m}} \varphi_m(z) dz = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Наконец, применяя неравенства (2.27)–(2.28), из (2.26) получаем, что $\|g_m^k(x) - f^k(x)\| \leq \varepsilon$. Таким образом, $g_m^k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f^k$ равномерно на $\overline{B^{2k}}$, и доказательство теоремы закончено. \square

2.3.4 Принцип несуществования ретракции

Теорема 2.5. (Принцип несуществования ретракции)

Не существует непрерывной функции $f : \overline{B}(0, 1) \mapsto S^{n-1}$ такой, что $f(x) = x$ для всех $x \in S^{n-1}$.

Доказательство. Пусть такая непрерывная функция существует. Тогда $(-f)$ непрерывная функция из $\overline{B}(0, 1)$ в $\overline{B}(0, 1)$ и по теореме Брауэра 2.4 существует $x_0 \in \overline{B}(0, 1)$ такая, что $-f(x_0) = x_0$. По условию теоремы $f(x_0) \in S^{n-1}$, следовательно $(-x_0) \in S^{n-1}$ и значит $x_0 \in S^{n-1}$, отсюда $f(x_0) = x_0$, но тогда $x_0 = -x_0 \in S^{n-1}$. Получили противоречие, теорема доказана. \square

2.3.5 Обобщение теоремы Брауэра о неподвижной точке

Теорема Брауэра 2.4 допускает естественное усиление для компактных выпуклых множеств в \mathbb{R}^n , доказательство которого основано на использовании специального проектора.

Лемма 2.4. Пусть K – замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства H . Тогда для каждого $x \in H$ существует единственная точка $y \in K$ такая, что

$$\|x - y\| = \inf_{\eta \in K} \|x - \eta\|. \quad (2.29)$$

Доказательство. Пусть $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ – минимизирующая последовательность, то есть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\eta_k - x\| = d = \inf_{\eta \in K} \|x - \eta\|. \quad (2.30)$$

По правилу параллелограмма

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in H,$$

получаем, что

$$\|\eta_k - \eta_l\|^2 = 2\|x - \eta_k\|^2 + 2\|x - \eta_l\|^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_l)\|^2. \quad (2.31)$$

Поскольку K выпукло, $\frac{1}{2}(\eta_k + \eta_l) \in K$ и поэтому $d^2 \leq \|x - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_l)\|^2$. Следовательно,

$$\|\eta_k - \eta_l\|^2 = 2\|x - \eta_k\|^2 + 2\|x - \eta_l\|^2 - 4d^2,$$

и из (2.30) вытекает, что $\lim_{k, l \rightarrow \infty} \|\eta_k - \eta_l\| = 0$, то есть последовательность $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ фундаментальна.

Так как H полно, а K замкнуто, существует элемент $y \in K$ такой, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = y$. Кроме того, $\|x - y\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x - \eta_k\| = d$.

Пусть существует два элемента $y, y' \in K$, удовлетворяющих (2.29). Подставив их вместо η_k и η_l в равенство (2.31), получим

$$\|y - y'\|^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - y'\|^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(y + y')\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0,$$

откуда следует, что $y = y'$. \square

Определение 2.7. Точка y , удовлетворяющая (2.29), называется проекцией точки x на замкнутое выпуклое подмножество K . При этом пишем $y = \text{Pr}_K x$.

Отметим, что $\text{Pr}_K x = x$ для всех $x \in K$.

Лемма 2.5. Пусть K – замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства H . Тогда $y = \text{Pr}_K x$ в том и только в том случае, когда

$$(y, \eta - y) \geq (x, \eta - y) \quad \forall \eta \in K. \quad (2.32)$$

Доказательство. Пусть $x \in H$ и $y = \text{Pr}_K x$. Поскольку K выпукло,

$$(1-t)y + t\eta = y + t(\eta - y) \in K \quad \forall \eta \in K, t \in [0, 1],$$

и поэтому вследствие (2.29) функция

$$\Phi(t) = \|x - y - t(\eta - y)\|^2 = \|x - y\|^2 - 2(x - y, \eta - y) + t^2\|\eta - y\|^2$$

принимает наименьшее значение на отрезке $[0, 1]$ в точке $t = 0$. Это означает, что $\Phi'(0) \geq 0$, то есть $(x - y, \eta - y) \leq 0$ при всех $\eta \in K$, или $(y, \eta - y) \geq (x, \eta - y)$ при всех $\eta \in K$.

С другой стороны, если $y \in K$ и $(y, \eta - y) \geq (x, \eta - y)$ при всех $\eta \in K$, то

$$0 \leq (y - x, \eta - y) = (y - x, (\eta - x) + (x - y)) \leq -\|x - y\|^2 + (y - x, \eta - x).$$

Следовательно, $\|x - y\|^2 \leq (y - x, \eta - x) \leq \|y - x\|\|\eta - x\|$ и тем самым $\|x - y\| \leq \|\eta - x\|$ для любых $\eta \in K$. Значит справедливо (2.29). \square

Следствие 2.1. Пусть K – замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства H . Тогда оператор $\text{Pr}_K : H \rightarrow K$ нерастягивающий, то есть

$$\|\text{Pr}_K x - \text{Pr}_K x'\| \leq \|x - x'\| \quad \forall x, x' \in K \quad (2.33)$$

и, следовательно, непрерывный.

Доказательство. Пусть $x, x' \in H$ и $y = \text{Pr}_K x, y' = \text{Pr}_K x'$. Тогда по лемме 2.5

$$\begin{aligned} (y, \eta - y) &\geq (x, \eta - y) \quad \forall \eta \in K, \\ (y', \eta - y') &\geq (x', \eta - y') \quad \forall \eta \in K. \end{aligned}$$

Положим $\eta = y'$ в первом неравенстве и $\eta = y$ во втором. Складывая затем эти неравенства, получим

$$\|y - y'\|^2 = (y - y', y - y') \leq (x - x', y - y') \leq \|x - x'\|\|y - y'\|,$$

или $\|y - y'\| \leq \|x - x'\|$, что и требовалось доказать. \square

Теперь сформулируем усиление теоремы Брауэра 2.4.

Теорема 2.6. (Брауэра II) Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – компактное непустое множество, гомеоморфное компактному выпуклому подмножеству в \mathbb{R}^n , и $f : K \rightarrow K$ – непрерывное отображение. Тогда найдется точка $x_0 \in K$, такая что $f(x_0) = x_0$.

Доказательство. Точно также, как в доказательстве теоремы 2.4, достаточно рассмотреть случай, когда само множество K компактное и выпуклое.

Пусть B' – замкнутый шар в \mathbb{R}^n такой, что $K \subset B'$, он гомеоморфен $\overline{B}(0, 1)$. Согласно следствию 2.1 оператор Pr_K непрерывен, следовательно отображение $f \circ \text{Pr}_K : B' \rightarrow K \subset B'$ непрерывно и переводит B' в себя. Тогда по теореме 2.4 у него есть неподвижная точка x_0 , то есть $f \circ \text{Pr}_K x_0 = x_0 \in K$. Но $\text{Pr}_K x_0 = x_0$, и поэтому $f(x_0) = x_0$. \square

2.4 Теоремы Шаудера

Теоремы Шаудера – это важнейшее обобщение теоремы Брауэра 2.6 на случай нормированного пространства бесконечной размерности. Начнем с описания конструкции, лежащей в основе доказательства.

2.4.1 Нелинейный проектор Шаудера

Пусть X – вещественное банахово пространство, $K \subset X$ – компакт.

По критерию компактности 1.1 K вполне ограничено и, следовательно, содержит счетное всюду плотное множество $\{k_i, i \in \mathbb{N}\} \subset K$. Кроме того, для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется конечное подмножество $\{k_i, l = \overline{1, M(m)}\}$ этого всюду плотного множества такое, что $K \subset \bigcup_{l=1}^{M(m)} B(k_i, \frac{1}{m})$. Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим

$$\beta_l^m(x) = \max \left\{ 0, \frac{1}{m} - \|f(x) - k_i\| \right\}, \quad l = \overline{1, M(m)}, \quad x \in K. \quad (2.34)$$

Заметим, что для каждого $x \in K$ существует хотя бы один номер l такой, что $\beta_l^m \neq 0$. Действительно, если это не так, то найдется такой $x_* \in K$, для которого $\|f(x_*) - k_i\| \geq \frac{1}{m}$ для всех $l = \overline{1, M(m)}$, и значит $f(x_*) \notin \bigcup_{l=1}^{M(m)} B(k_i, \frac{1}{m})$. Но $f(x_*) \in K$, а $K \subset \bigcup_{l=1}^{M(m)} B(k_i, \frac{1}{m})$, получаем противоречие. Таким образом, корректно следующее определение.

Определение 2.8. *Отображение $f_m : K \rightarrow \text{span}\{k_i, l = \overline{1, M(m)}\}$, задаваемое формулой*

$$f_m(x) = \frac{\sum_{l=1}^{M(m)} \beta_l^m(x) k_i}{\sum_{l=1}^{M(m)} \beta_l^m(x)}, \quad (2.35)$$

называется *нелинейным проектором Шаудера порядка m* .

Элементарные свойства проектора Шаудера:

1. *Свойство непрерывности.* Если отображение f непрерывно на K , то функция β_l^m тоже непрерывна на K , поскольку $x \mapsto \max\{0, x\}$ и $x \mapsto \|x\|$ непрерывные функции. Значит и проектор Шаудера f_m непрерывен на K при любом $m \in \mathbb{N}$.
2. *Свойство аппроксимации.* Если $\beta_l^m(x) \neq 0$, то $\|f(x) - k_i\| \leq \frac{1}{m}$. Тогда, применяя неравенство треугольника, получим

$$\|f_m(x) - f(x)\| \leq \frac{\sum_{l=1}^{M(m)} \beta_l^m(x) \|k_i - f(x)\|}{\sum_{l=1}^{M(m)} \beta_l^m(x)} \leq \frac{1}{m} \quad \forall x \in K.$$

Поэтому $f_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f$ равномерно на K .

2.4.2 Первая теорема Шаудера о неподвижной точке

Определение 2.9. *Замкнутая выпуклая оболочка множества Ω – это пересечение всех замкнутых и выпуклых множеств, содержащих Ω .*

Теорема 2.7. *(Шаудера I) Пусть X – вещественное банахово пространство, $K \subset X$ – непустое компактное и выпуклое множество, $f : K \rightarrow K$ непрерывное отображение. Тогда найдется точка $x_0 \in K$ такая, что $f(x_0) = x_0$.*

Доказательство. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ построим нелинейный проектор Шаудера f_m . Так как

$$\sum_{l=1}^{M(m)} \frac{\beta_l^m(x) k_{i_l}}{\sum_{l=1}^{M(m)} \beta_l^m(x)} = 1,$$

то f_m отображает K в замкнутую выпуклую оболочку K_m множества $\{k_{i_l}, l = \overline{1, M(m)}\}$.

В свою очередь, так как K выпукло, то $K_m \subset K$ и, следовательно, K_m компактно. Таким образом, сужение отображения $f_m : K_m \rightarrow K_m$ переводит компактное выпуклое подмножество конечномерного пространства $\text{span}\{k_{i_l}, l = \overline{1, M(m)}\}$ в себя. Однако всякое нормированное конечномерное пространство изоморфно \mathbb{R}^n , значит по теореме Брауэра 2.6 существует точка $x_m \in K_m \subset K$ такая, что $f_m(x_m) = x_m$.

Так как K компактен, последовательность $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ содержит подпоследовательность $\{x_{m_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, которая сходится к некоторому $x_0 \in K$, то есть $x_{m_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_0$ сильно в X .

Остается отметить, что

$$\|f(x_0) - x_0\| \leq \|f(x_0) - f(x_{m_j})\| + \underbrace{\|f(x_{m_j}) - f_{m_j}(x_{m_j})\|}_{x_{m_j}} + \|x_{m_j} - x_0\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

в силу того, что f непрерывно, $f_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f$ равномерно на K по свойству аппроксимации и $x_{m_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_0$ сильно в X . Итак, $f(x_0) = x_0$, теорема доказана. \square

2.4.3 Вторая теорема Шаудера о неподвижной точке

Определение 2.10. *Компактный оператор* — это оператор, который переводит ограниченные множества в предкомпактные.

Теорема 2.8. (Шаудера II) Пусть X — вещественное банахово пространство, $K \subset X$ — непустое замкнутое и выпуклое множество, $f : K \rightarrow K$ непрерывное и компактное отображение. Тогда найдется точка $x_0 \in K$ такая, что $f(x_0) = x_0$.

Доказательство. Поскольку K замкнуто, то $\overline{f(K)} \subset K$. Поскольку f компактно, то $\overline{f(K)}$ — компакт.

Пусть $\text{cosl}(K)$ — замкнутая выпуклая оболочка $\overline{f(K)}$. Заметим, что $\text{cosl}(K)$ — компакт. Действительно, если $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{cosl}(K)$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо представление

$$y_n = \lambda_n x_{1n} + (1 - \lambda_n) x_{2n}, \quad \text{где } \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1], \quad \{x_{in}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{f(K)}, \quad i = 1, 2.$$

Так как $[0, 1]$ и $\overline{f(K)}$ компактны в \mathbb{R} и X , соответственно, то найдется последовательность номеров $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такая, что $\lambda_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda \in [0, 1]$, $x_{in_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_i \in \overline{f(K)}$, $i = 1, 2$. Тогда

$$y_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in \text{cosl}(K).$$

Далее, так как K выпукло, то $\text{cosl}(K) \subset K$. Значит сужение $f : \text{cosl}(K) \rightarrow \text{cosl}(K)$ непрерывно и отображает выпуклый компакт в себя, следовательно, по теореме Шаудера 2.7 существует точка $x_0 \in \text{cosl}(K) \subset K$ такая, что $f(x_0) = x_0$, что и требовалось доказать. \square

2.5 Приложения теорем о неподвижных точках

2.5.1 О собственных числах матрицы с положительными компонентами

Теорема 2.9. Пусть A — матрица порядка n с положительными компонентами, тогда существует действительное положительное собственное число $\tilde{\mu}$ матрицы A , обладающее следующими свойствами:

1. число $\tilde{\mu}$ является максимальным по модулю среди всех собственных чисел, включая комплексные, то есть $|\mu| \leq \tilde{\mu}$ для любого $\mu \in \sigma_p(A)$;
2. числу $\tilde{\mu}$ соответствует ровно один собственный вектор с положительными компонентами, с точностью до растяжения.

Доказательство. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)^T$, $b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$, будем писать $a \leq b$, если $a_i \leq b_i$ для всех $i = \overline{1, n}$.

Этап I. Докажем, что существует положительное собственное число $\tilde{\mu}$, обладающее свойством 1, и найдется собственный вектор с положительными компонентами, соответствующий этому числу.

Пусть $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ – симплекс в \mathbb{R}^n . Рассмотрим преобразование $f : \Sigma \mapsto \mathbb{R}^n$, задаваемое следующим образом:

$$f_k(x) = \frac{\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j}{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_j}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.36)$$

Очевидно, на Σ знаменатель положителен:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_j \geq n \min_{i,j=1,n} a_{ij} \sum_{j=1}^n x_j = n \min_{i,j=1,n} a_{ij} > 0, \quad (2.37)$$

поэтому f непрерывно. Аналогично, $f(x) > 0$. Кроме того, поскольку $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$, то f переводит Σ в себя.

Пусть μ – произвольное (возможно комплексное) собственное число матрицы A , а z – собственный вектор, соответствующий числу μ , то есть $Az = \mu z$. Тогда по неравенству треугольника получаем

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}|z_j| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{kj}z_j \right| = |\mu z_k| = |\mu||z_k|, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.38)$$

Рассмотрим множество $W = \{w \in \Sigma : Aw \geq |\mu|w\}$. Оно не пусто, поскольку в силу (2.38) ему принадлежит

$$w = \frac{1}{\sum_{j=1}^n |z_j|} (|z_1|, \dots, |z_n|)^T.$$

Простой проверкой можно показать, что W выпукло, а так как неравенство в определении W нестрогое, оно замкнуто. Кроме того, отображение f переводит W в себя. В самом деле, если $Aw \geq |\mu|w$, то

$$(Af(w))_k \stackrel{(2.36)}{=} \frac{\sum_{i=1}^n a_{ki} \sum_{j=1}^n a_{ij}w_j}{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}w_j} \geq \frac{\sum_{i=1}^n a_{ki}|\mu|w_i}{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}w_j} \stackrel{(2.36)}{=} |\mu|f_k(w). \quad (2.39)$$

Тогда по теореме Брауэра 2.6 существует $w^* \in W$ такой, что

$$f(w^*) = w^* \stackrel{(2.36)}{\Leftrightarrow} w^* = \frac{Aw^*}{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}w_j^*} \Leftrightarrow Aw^* = \mu^* w^*, \quad \text{где } \mu^* = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}w_j^*,$$

то есть w^* собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному числу μ^* . Из (2.37) и определения f следует, что $\mu^* > 0$ и $w^* > 0$. Еще заметим, что в силу определения W верно неравенство $\mu^* w^* = Aw^* \geq |\mu|w^*$, и значит $|\mu| \leq \mu^*$, так как $w^* > 0$.

Таким образом, в качестве $\tilde{\mu}$ можно взять максимальное из всех μ^* .

Этап II. Докажем, что для $\tilde{\mu}$ справедливо свойство 2.

Заметим, что для A^T также справедливы рассуждения первого этапа, и, поскольку собственные числа у A и A^T совпадают, то $\tilde{\mu}$ для них одно и то же. Пусть x и y – соответствующие собственные векторы матриц A и A^T , $x, y > 0$.

Допустим, что A имеет собственный вектор z с положительными координатами, отличный от x , и собственным числом μ . Тогда

$$\mu(y, z) = (y, \mu z) = (y, Az) = (A^T y, z) = (\tilde{\mu} y, z) = \tilde{\mu}(y, z),$$

откуда $\mu = \tilde{\mu}$, так как $(y, z) > 0$. Таким образом, для разных собственных векторов с положительными координатами собственные числа совпадают.

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $z_\varepsilon = z - \varepsilon x$, тогда $Az_\varepsilon = \tilde{\mu} z_\varepsilon$. Подберем ε так, чтобы вектор z_ε имел нулевые координаты, но при этом оставался неотрицательным. Пусть $(z_\varepsilon)_k = 0$, тогда $\sum_{j=1}^n a_{kj}(z_\varepsilon)_j = \tilde{\mu}(z_\varepsilon)_k = 0$, но компоненты $a_{kj} > 0$ и $z_\varepsilon \geq 0$, следовательно $(z_\varepsilon)_j = 0$ для всех $j = \overline{1, n}$. Таким образом, $z = \varepsilon x$ и свойство 2 установлено. \square

Замечание 2.1. В теореме 2.9 не утверждается, что собственное подпространство, соответствующее собственному числу $\tilde{\mu}$, является одномерным.

2.5.2 Теорема Каратеодори

Теорема 2.10. (Каратеодори) Пусть $Q = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in (a, b)\}$, $f : Q \mapsto \mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном $t \in (a, b)$ непрерывна по x и при любом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$ измерима по t , кроме того, существует интегрируемая по Лебегу на интервале (a, b) функция $m(t)$, такая что

$$\|f(x, t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m(t) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{почти всюду на } (a, b). \quad (2.40)$$

Тогда для любой точки $(x_0, t_0) \in Q$ найдется такое $\delta > 0$, для которого существует абсолютно непрерывная функция $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \mapsto \mathbb{R}^n$, являющаяся решением интегрального уравнения

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), \tau) d\tau \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \quad (2.41)$$

Замечание 2.2. Уравнение (2.41) эквивалентно задаче Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t) & \text{почти всюду на } [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.42)$$

Замечание 2.3. Теорема 2.10 может быть доказана глобально, то есть существует такая функция $x(t)$, для которой уравнение (2.41) справедливо на всем интервале (a, b) (см., например, [?, гл. 2, теорема 1.3]).

Доказательство. В качестве нормы в пространстве \mathbb{R}^n выберем следующую:

$$\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \max_{i=\overline{1, n}} |x_i|, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Определим абсолютно непрерывную функцию

$$M(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^t m(\tau) d\tau.$$

Пусть $\gamma > 0$, введем в рассмотрение пространство $C([t_0 - \gamma, t_0 + \gamma], \mathbb{R}^n)$, состоящее из непрерывных на отрезке $[t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$ вектор-функций $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, норма в котором определена формулой

$$\|\varphi\|_{C([t_0 - \gamma, t_0 + \gamma], \mathbb{R}^n)} = \max_{t \in [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]} \|\varphi_i(t)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, рассмотрим множество $\overline{V}_{\varepsilon, \gamma} \subset C([t_0 - \gamma, t_0 + \gamma], \mathbb{R}^n)$, состоящее из вектор-функций $\varphi(t)$ таких, что $\|\varphi(t) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon$ и $(\varphi(t), t) \in Q$ для всех $t \in [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$. Заметим, что множество $\overline{V}_{\varepsilon, \gamma}$ выпукло.

Построим интегральный оператор A :

$$x(t) \longmapsto A(x)(t) \stackrel{def}{=} x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), \tau) d\tau$$

Лемма 2.6. *Оператор A определен и непрерывен на $\overline{V}_{\varepsilon, \gamma}$.*

Доказательство. То, что оператор A имеет смысл на $\overline{V}_{\varepsilon, \gamma}$, очевидно, докажем непрерывность.

Пусть $\varphi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi$ в норме пространства $C([t_0 - \gamma, t_0 + \gamma], \mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|A(\varphi_k) - A(\varphi)\|_{C([t_0 - \gamma, t_0 + \gamma], \mathbb{R}^n)} &= \\ &= \max_{t \in [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]} \|A(\varphi_k)(t) - A(\varphi)(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \max_{t \in [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]} \left\| \int_{t_0}^t (f(\varphi_k(\tau), \tau) - f(\varphi(\tau), \tau)) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \\ &\leq \max_{t \in [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]} \int_{t_0}^t \|f(\varphi_k(\tau), \tau) - f(\varphi(\tau), \tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau \leq \int_{t_0 - \gamma}^{t_0 + \gamma} \|f(\varphi_k(\tau), \tau) - f(\varphi(\tau), \tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau \stackrel{def}{=} \mathbb{I}_k \end{aligned}$$

По условию теоремы

$$\|f(\varphi_k(\tau), \tau) - f(\varphi(\tau), \tau)\|_{\mathbb{R}^n} \leq 2m(\tau),$$

при всех $\tau \in [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$, кроме того,

$$\|f(\varphi_k(\tau), \tau) - f(\varphi(\tau), \tau)\|_{\mathbb{R}^n} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,$$

так как f непрерывна по x при каждом фиксированном $\tau \in (a, b)$. В силу этого, по теореме Лебега выводим

$$\|A(\varphi_k) - A(\varphi)\|_{C([t_0 - \gamma, t_0 + \gamma], \mathbb{R}^n)} \leq \mathbb{I}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,$$

и значит оператор A непрерывен. □

Лемма 2.7. *Существует $\delta > 0$ такое, что оператор A отображает $\overline{V}_{\varepsilon, \delta}$ в себя.*

Доказательство. Для $\varphi \in \overline{V}_{\varepsilon, \gamma}$ имеем

$$\|A(\varphi)(t) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} = \left\| \int_{t_0}^t f(x(\tau), \tau) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_{t_0}^t \|f(x(\tau), \tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau \leq \int_{t_0}^t m(\tau) d\tau = M(t).$$

Так как M абсолютно непрерывна и $M(t_0) = 0$, то найдется $\delta > 0$ такое, что $M(t) \leq \varepsilon$ для любого $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, что и требовалось доказать. □

Лемма 2.8. *Оператор $A : \overline{V}_{\varepsilon, \delta} \longmapsto \overline{V}_{\varepsilon, \delta}$ компактен.*

Доказательство. По определению $\bar{V}_{\varepsilon, \gamma}$ множество $A(\bar{V}_{\varepsilon, \delta}) \subset \bar{V}_{\varepsilon, \delta}$ равномерно ограничено на $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Выберем произвольное $\varepsilon_* > 0$. Тогда для любой $\varphi \in \bar{V}_{\varepsilon, \delta}$ справедливо

$$\begin{aligned} \|A(\varphi)(t_1) - A(\varphi)(t_2)\|_{\mathbb{R}^n} &= \left\| \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(\tau), \tau) d\tau - \int_{t_0}^{t_2} f(\varphi(\tau), \tau) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} = \\ &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(\tau), \tau) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(\varphi(\tau), \tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau \leq \int_{t_1}^{t_2} m(\tau) d\tau = M(t_2) - M(t_1) \end{aligned}$$

при $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Так как M абсолютно непрерывна, то она равномерно непрерывна, значит найдется $\delta_* > 0$ такое, что при любых $t_1, t_2 \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $t_1 < t_2$, для которых $t_2 - t_1 < \delta_*$, имеет место оценка

$$\varepsilon_* > M(t_2) - M(t_1) \geq \|A(\varphi)(t_1) - A(\varphi)(t_2)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Это означает, что семейство $\overline{A(\bar{V}_{\varepsilon, \delta})}$ равностепенно непрерывно на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Таким образом, по теореме Арцела-Асколи множество $\overline{A(\bar{V}_{\varepsilon, \delta})}$ предкомпактно, а так как оно еще и замкнуто, то компактно. Значит оператор $A : \bar{V}_{\varepsilon, \delta} \rightarrow \bar{V}_{\varepsilon, \delta}$ компактен. \square

Для оператора A и множества $\bar{V}_{\varepsilon, \delta}$ выполняются все условия теоремы Шаудера ??, поэтому A имеет неподвижную точку в $\bar{V}_{\varepsilon, \delta}$, то есть уравнение (2.41) имеет решение. Теорема доказана. \square

Содержание

1	Введение	1
1.1	Нормированные пространства	1
1.2	Компактные множества	1
1.3	Сопряженное пространство	2
2	Теоремы о неподвижных точках	2
2.1	Предисловие	2
2.2	Определители и якобианы	3
2.2.1	Свойства определителей	3
2.2.2	Лемма о дивергенции	4
2.2.3	Лемма о присоединенной матрице	5
2.3	Теоремы Брауэра	7
2.3.1	Ретракция. Лемма о несуществовании ретракции	7
2.3.2	Слабая форма теоремы Брауэра	8
2.3.3	Теорема Брауэра о неподвижной точке в сильной форме	8
2.3.4	Принцип несуществования ретракции	11
2.3.5	Обобщение теоремы Брауэра о неподвижной точке	11
2.4	Теоремы Шаудера	12
2.4.1	Нелинейный проектор Шаудера	13
2.4.2	Первая теорема Шаудера о неподвижной точке	13
2.4.3	Вторая теорема Шаудера о неподвижной точке	14
2.5	Приложения теорем о неподвижных точках	14
2.5.1	О собственных числах матрицы с положительными компонентами	14
2.5.2	Теорема Каратеодори	16

Список литературы

- [1] Toland J. F. Bifurcation Theory, University of Bath, The United Kingdom, Lecture Notes, 1992.
- [2] Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения, М.: Мир, 1983.
- [3] Ковригин А. Б. Математический анализ динамических систем, учебное пособие, Ленинград: Издательство ЛГУ, 1980.
- [4] Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М.: Издательство иностранной литературы, 1958.
- [5] Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М.: Мир, 1972.