1. Задача Стефана

Явления фазовых переходов в сплошных средах наблюдаются в разнообразных природных и технологических процессах. Следовательно, есть большая потребность в описании этих явлений, в частности в создании и изучении соответствующих математических моделей. К настоящему времени существует весьма обширная теория фазовых переходов, и она постоянно развивается. Поэтому затронуть её вопросы в рамках нашего курса будет очень уместно и поучительно, и в данной главе мы изучим классическую задачу о фазовых переходах, сформулированную в 70-х гг. XIX в. австрийским инженером-металлургом Й. Стефаном. По отношению к другим задачам о фазовых переходах задача Стефана имеет простую форму. Тем не менее она содержит в себе самые основные черты большинства более сложных задач. За 130 с лишним лет было многократно подтверждено, что она физически адекватно описывает многие фазовые превращения.

Задачей Стефана называется задача определения поля температуры и границы фазового перехода в чистом, т. е. не содержащем примесей, веществе. Она включает в себя следующие физические соображения:

(а) агрегатное состояние среды изменяется только вследствие теплопроводности и теплоёмкости среды;

(б) на среду воздействуют внешние и внутренние источники тепла;

(в) передача энергии в каждой фазе рассматриваемого вещества описывается уравнением теплопроводности;

(г) поведение границы фазового перехода, называемой свободной границей, описывается условием Стефана, которое выражает собой баланс энергии при переходе среды из одного агрегатного состояния в другое;

(д) помимо условия Стефана, на свободной границе ставится условие о том, что температура частиц вещества, составляющих свободную границу, равна температуре фазового перехода, которая считается известной постоянной величиной.

Условие (д) имеет характер аксиомы, поскольку оно не следует из фундаментальных законов термодинамики, но достаточно точно отражает многие реальные процессы.

1.1. Классическая формулировка задачи Стефана. Приступим к строгой математической формулировке задачи Стефана [**3**].

Задача CS (классическая формулировка задачи Стефана) Требуется отыскать температуру $u(\mathbf{x},t)$ в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$ для моментов времени $t \in (0,T)$ при наличии фазовых переходов при значениях температуры $u_1,\dots,u_s$. Пусть $u_1 < u_2 < \dots < u_s$. В тех частях $Q_T = \Omega \times (0,T)$, где $u(\mathbf{x},t)$ не принимает значений $u_1,\dots,u_s$, должно выполняться уравнение теплопроводности (в уравнении теплопроводности и далее в тексте по повторяющимся индексам производится суммирование)

$$\alpha(u)u_t - (k(u)u_{x_i})_{x_i} = f, \tag{1}$$

где $\alpha(u)$ и $k(u)$ — заданные положительные функции, гладкие на каждом из отрезков $[u_k,u_{k+1}]$ и, может быть, имеющие разрывы первого рода в точках $u = u_k$, $k = 1,\dots,s$. На границах

$$S^{(k)} := \{(\mathbf{x},t) \in Q \,|\, u(\mathbf{x},t) = u_k\}$$

раздела двух фаз должны выполняться условия

$$[u]|_{S^{(k)}} = 0; \tag{2}$$

$$-[\Lambda(u)]\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_t) + [k(u)u_{x_i}]\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_i)|_{S^{(k)}} = 0, \tag{3}$$

где $[\dots]$ — скачок функции на $S^{(k)}$, определённый по формуле

$$[\varphi](\mathbf{x}_0,t_0) = \lim_{(\mathbf{x}^-,t^-)\to(\mathbf{x}_0,t_0)} \varphi(\mathbf{x}^-,t^-) - \lim_{(\mathbf{x}^+,t^+)\to(\mathbf{x}_0,t_0)} \varphi(\mathbf{x}^+,t^+),$$

в которой $(\mathbf{x}_0,t_0) \in S^{(k)}$, $(\mathbf{x}^-,t^-)$ и $(\mathbf{x}^+,t^+)$ — точки из Q, расположенные вблизи $S^{(k)}$ с более холодной (т. е. $u < u_k$) и более тёплой ($u > u_k$) сторон соответственно; $\Lambda(u)$ — первообразная от $\alpha(u)$ на каждом из отрезков $[u_k,u_{k+1}]$ (при каждом из значений u_k функция $\Lambda(u)$ терпит скачок первого рода, значение которого задано: $-[\Lambda(u)]|_{S^{(k)}} = b_k$, где $b_k = \mathrm{const} > 0$); $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности $S^{(k)}$, направленная в сторону увеличения температуры; $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_d,\mathbf{e}_t\}$ — декартов базис в $\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}_t$.

Уравнение теплопроводности и условия на свободной границе дополняются начальными данными

$$u|_{t=0} = \psi_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{4}$$

и граничными условиями

$$u|_{S_T} = u_S, \tag{5}$$

где $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$.

В постановке задачи CS, $\alpha(u)$ и $k(u)$ — это коэффициенты теплоёмкости и теплопроводности. Соответственно $\Lambda(u)$ — удельная внутренняя энергия вещества. Тот факт, что функции $\alpha(u)$, $k(u)$ и $\Lambda(u)$ терпят скачки при температурах фазовых переходов, выражает собой сформулированное ранее физическое соображение (А). Константа b_k называется скрытой теплотой фазового перехода при температуре u_k. Она равна по величине количеству тепла, которое необходимо подвести к единице массы вещества, находящегося при температуре u_k в одном, более "холодном" агрегатном состоянии (например, в твёрдом), чтобы это вещество целиком перешло в другое, более "тёплое" агрегатное состояние (например, в жидкое), сохраняя при этом температуру u_k.

Функция f в уравнении теплопроводности — это плотность распределённых массовых источников тепла, находящихся внутри Ω, а функция u_S в граничном условии (5) — это плотность распределённых поверхностных источников тепла, находящихся на границе Ω. В дальнейшем, исключительно в целях упрощения и сокращения изложения, мы полагаем f тождественно равным нулю и u_S тождественно равным u_1 (смысл именно такого выбора u_S будет ясен чуть позже), хотя результаты предыдущих глав уже позволяют этого не делать, а рассматривать произвольные f и u_S, например, из классов $L^2(Q)$ и $L^2(S_T)$.

Условие (2) выражает собой аксиому (д), а условие (3) — это условие Стефана. Стоит заметить, что условие Стефана — это не что иное, как частный случай условия Ренкина–Гюгонио на сильном разрыве.

1.2. Обобщённая формулировка задачи Стефана. Тот факт, что коэффициенты теплоёмкости и теплопроводности и удельная внутренняя энергия являются разрывными функциями, означает: уравнение теплопроводности (1), если его рассматривать во всём пространственно-временном цилиндре Q, является уравнением с разрывными функциями, стоящими под знаками производных. Значит, оно в принципе не может пониматься (во всём цилиндре Q) в классическом смысле. Поэтому разумно ввести понятие обобщённого решения задачи Стефана.

Прежде всего, придадим задаче CS более простую форму. Применим преобразование Кирхгофа и перейдём от температуры u к температуре v, в терминах которой коэффициент теплопроводности тождественно равен единице, а новая температура одного из фазовых переходов, скажем соответствующего температуре u_1, равна нулю (т. е. $v_1 = 0$):

$$v(\mathbf{x}, t) = \int_{u_1}^{u(\mathbf{x},t)} k(w)\mathrm{d}w.$$

Обозначим через v_* функцию аргумента u, которая является первообразной функции $k(u)$, такой что $v_*(u_1) = 0$, а значит $v(\mathbf{x}, t) \equiv v_*(u(\mathbf{x}, t))$. В силу того, что $k(u)$ строго положительна, существует функция v_*^{-1}, обратная к функции v_*. Имеем $v_t = k(u)u_t$, $v_{x_i} = k(u)u_{x_i}$ и вследствие этих двух равенств

$$\alpha(u)u_t = \beta(v)v_t, \text{ где } \beta(v(\mathbf{x}, t)) := \frac{\alpha(v_*^{-1}(v(\mathbf{x}, t)))}{k(v_*^{-1}(v(\mathbf{x}, t)))}.$$

Заметим, что $\beta(v)$ — коэффициент теплоёмкости в терминах новой температуры v есть функция с теми же свойствами, что и функция $\alpha(u)$, т. е. $\beta(v)$ — положительная, кусочно-гладкая функция, имеющая разрывы первого рода в точках

$$v_1 = 0,\ v_2 = v_*(u_2), \ldots, v_s = v_*(u_s).$$

Подставляя два последних равенства в уравнение (1), приводим уравнение теплопроводности к виду

$$\beta(v)v_t - \Delta_x v = 0$$

(напомним, что мы положили $f \equiv 0$) и далее придадим ему дивергентную форму

$$b(v)_t - \Delta_x v = 0, \tag{6a}$$

где $b(v)$ есть первообразная функции $\beta(v)$ на каждом из отрезков $[v_k, v_{k+1}]$ — удельная внутренняя энергия в терминах температуры v. Исходя из физического смысла скрытой теплоты фазового перехода и условия

$$-[\Lambda(u)]|_{S^{(k)}} = b_k,$$

следует потребовать, чтобы функция $b(v)$ терпела скачок первого рода при каждом из значений $v_1 = 0, \ldots, v_s$ и чтобы при каждом $k = 1, \ldots, s$ выполнялось условие $-[b(v)]|_{S^{(k)}} = b_k$.

Условия (2)–(5) в терминах функции v перепишутся в виде

$$[v]|_{S^{(k)}} = 0; \tag{6b}$$

$$-[b(v)]\cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_t) + [v_{x_i}]\cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i)|_{S^{(k)}} = 0; \tag{6c}$$

$$v|_{t=0} = \psi(\mathbf{x}), \text{ где } \psi := v_*(\psi_0); \tag{6d}$$

$$v|_{S_T} = 0, \text{ так как } v_*(u_1) = 0, \tag{6e}$$

и $S^{(k)} = \{(\mathbf{x}, t) \in Q \mid v(\mathbf{x}, t) = v_k\}$.

Теперь, для того чтобы сформулировать понятие обобщённого решения, предположим на секунду, что задача Стефана имеет классическое решение, т. е. такое, что $v \in C^2(Q \setminus \cup_{k=1}^{s} S^{(k)})$, $S^{(k)}$ являются кусочно-гладкими поверхностями и выполнены условия (6b)–(6c) на свободных границах. Умножим (6a) на пробную функцию $\eta \in C^2(Q)$, такую что $\eta|_{t=T} = 0$ и $\eta|_{\partial\Omega} = 0$, и проинтегрируем по $\mathbf{x}$ и t. Используя формулу Грина, получаем

$$\int\limits_Q (-b(v)\eta_t + v_{x_i}\eta_{x_i})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t - \int\limits_\Omega b(\psi)\eta(\mathbf{x}, 0)\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \\ + \sum_{k=1}^{s} \int\limits_{S^{(k)}} (b_k\cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_t) + [v_{x_i}]\cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i))\,\eta\,\mathrm{d}\sigma = 0. \tag{7}$$

В силу условия Стефана (6c), интегралы по свободным поверхностям равны нулю. Таким образом, из уравнения (7) вытекает

$$\int\limits_Q (-b(v)\eta_t + v_{x_i}\eta_{x_i})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t - \int\limits_\Omega b(\psi)\eta(\mathbf{x}, 0)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0. \tag{8}$$

Если механически без рассуждений перенести ту методику, которую мы использовали при формулировке понятий обобщённых решений задач, уже изученных ранее в нашем курсе, то следует понимать обобщённое решение задачи Стефана именно в смысле интегрального равенства (8). Однако сейчас делать этого нельзя! Дело в том, что при выводе равенства (8) мы существенно использовали предположение, что множества точек из Q, в которых температура принимает значения фазовых переходов, являются поверхностями (причём гладкими). При этом предположении все интегралы в равенстве (8) имеют ясный смысл, поскольку функция $b(v)$ не определена только на множестве нулевой меры, то есть там, где она терпит скачок. В действительности, можно себе представить (и такое на самом деле бывает), что v совпадает с температурой фазового перехода в целой подобласти из Q ненулевой меры. В этом случае первый и третий интегралы в равенстве (8) оказываются не определены. Преодолевается указанная сложность следующим образом. Мы обозначим через $B(\mathbf{x}, t, v)$ произвольную измеримую функцию, равную $b(v)$ при $v \neq v_k$ $(k = 1, \ldots, s)$ и $(\mathbf{x}, t) \in Q$, а при $v = v_k$ и $(\mathbf{x}, t) \in Q$ положим, что $B(\mathbf{x}, t, v)$ принимает какое-либо одно значение из интервала $[b_k^-, b_k^- + b_k]$, где $b_k^- = \lim\limits_{v \to v_k - 0} b(v)$. Подставим эту функцию в равенство (8) на место функции $b(v)$:

$$\int\limits_Q (-B(\mathbf{x}, t, v)\eta_t + v_{x_i}\eta_{x_i})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t - \int\limits_\Omega B(\mathbf{x}, 0, \psi)\eta(\mathbf{x}, 0)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0. \quad (9)$$

Заметим, что так как мера множеств $S^{(k)}$ в случае классического решения задачи Стефана равна нулю, то для классического решения равенства (8) и (9) совпадают. С другой стороны, несложно видеть, что если функция $b(v)$ интегрируема в $Q \setminus \{(\mathbf{x}, t) \,|\, v(\mathbf{x}, t) = v_1, \ldots, v_k\}$, то функция $B(\mathbf{x}, t, v)$ интегрируема в Q.

Ещё заметим, что разумно от обобщённого решения v потребовать, чтобы оно удовлетворяло принципу максимума и энергетическому неравенству (т. е. имело суммируемый с квадратом градиент).

Итак, мы приходим к определению обобщённого решения задачи Стефана (6).

Определение. Назовём *обобщённым решением задачи Стефана* (6) ограниченную функцию v из $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, удовлетворяющую интегральному равенству (9) при какой-нибудь (хотя бы одной) функции типа $B(\mathbf{x}, t, v)$ и при произвольных функциях $\eta \in C^2(Q)$, таких что $\eta|_{t=T} = 0$ и $\eta|_{\partial\Omega} = 0$.

Далее мы сформулируем и докажем теоремы существования и единственности обобщённого решения задачи Стефана в смысле только что данного определения и таким образом установим, что сконструированная здесь обобщённая формулировка задачи корректна. Для упрощения изложения без ограничения общности будем предполагать, что среда может пребывать только в двух агрегатных состояниях, соответственно может быть только один фазовый переход при температуре $v_1 = 0$.

1.3. Теорема единственности обобщённого решения.

Теорема 0.1. *Пусть начальные данные* $\psi(\mathbf{x})$ *таковы, что мера множества* $\{\mathbf{x} \in \Omega \,|\, \psi(\mathbf{x}) = 0\}$ *равна нулю. Тогда задача* (6) *может иметь не более одного решения.*

Доказательство. Предположим, что имеются два решения — v' и v'', и им соответствуют функции B' и B''. Применим формулу Грина ко второму интегралу в (9), получим

$$\int\limits_Q (B(\mathbf{x},t,v)\eta_t + v\Delta_x\eta)\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t + \int\limits_\Omega B(\mathbf{x},0,\psi)\eta(\mathbf{x},0)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0. \qquad (10)$$

Вычитая уравнение (10) с v' и B' из уравнения (10) с v'' и B'', приходим к равенству

$$\int\limits_Q \big(B'(\mathbf{x},t,v') - B''(\mathbf{x},t,v'')\big) \times \\ \times \left(\eta_t + \frac{v'-v''}{B'(\mathbf{x},t,v') - B''(\mathbf{x},t,v'')}\Delta_x\eta\right)\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t + \\ + \int\limits_\Omega (B'(\mathbf{x},0,\psi) - B''(\mathbf{x},0,\psi))\eta(\mathbf{x},0)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

Последний интеграл в этом равенстве обращается в нуль в силу условия теоремы и вида функций B' и B''. Таким образом, получаем равенство

$$\int\limits_Q \big(B'(\mathbf{x},t,v') - B''(\mathbf{x},t,v'')\big)\,(\eta_t + a(\mathbf{x},t)\Delta_x\eta)\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t = 0, \qquad (11)$$

где через $a(\mathbf{x},t)$ обозначено частное $\dfrac{v'-v''}{B'(\mathbf{x},t,v') - B''(\mathbf{x},t,v'')}$. В силу монотонности $b(v)$ и вида функций B' и B'', функция $a(\mathbf{x},t)$

неотрицательна и в тех точках из Q, где $v' = v''$, её можно доопределить нулём. Ещё заметим, что $a_0 = \operatorname*{esssup}_Q a(\mathbf{x}, t) < \infty$, поскольку производная $b'(v)$ ограниченна.

Выберем пробную функцию η в равенстве (11) как решение первой краевой задачи для линейного параболического уравнения

$$\eta_t + (a(\mathbf{x}, t) + \varepsilon)\Delta_x \eta = F, \quad \eta|_{t=T} = 0, \quad \eta|_{S_T} = 0, \tag{12}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а $F = F(\mathbf{x}, t)$ — произвольная гладкая финитная в Q функция. Такой выбор пробной функции корректен ввиду справедливости следующего известного в теории линейных параболических уравнений факта [**2**, гл. 3, § 6].

Теорема 0.2. *Начально-краевая задача*

$$w_t - \alpha(\mathbf{x}, t)\Delta_x w = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t), \quad u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = \Psi(\mathbf{x}),$$

при $0 \le \alpha(\mathbf{x}, t) \le \mu < \infty$, $\mathcal{F} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $\Psi \in H_0^1(\Omega)$, *имеет обобщённое решение, обладающее производными* u_x *и* u_t, *а также* u_{tt} *там, где* $\alpha(\mathbf{x}, t) > 0$. *При этом выполняется оценка*

$$\int_Q \left(u_t^2 + \alpha(\Delta_x u)^2\right) \mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathrm{d}t + \operatorname*{esssup}_{0 \le t \le T} \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \le$$

$$\le c \left(\int_Q \mathcal{F}_x^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathrm{d}t + \int_\Omega \Psi_x^2(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \right), \tag{13}$$

где постоянная c *зависит только от* T *и* μ.

В силу данного утверждения, решение η_ε задачи (12) существует и допускает оценку вида (13):

$$\int_Q \left((\eta^\varepsilon)_t^2 + (a + \varepsilon)(\Delta_x \eta^\varepsilon)^2\right) \mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathrm{d}t \le c \int_Q F_x^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathrm{d}t$$

с константой c, зависящей только от T и a_0. Подставляя η^ε на место η в равенстве (11), получаем

$$\int_Q (B' - B'')(F - \varepsilon \Delta_x \eta^\varepsilon)\, \mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathrm{d}t = 0. \tag{14}$$

Оценивая член с лапласианом с помощью неравенства Гёльдера и оценки (13), находим

$$\left|\int\limits_Q (B' - B'')\varepsilon\Delta_x\eta^\varepsilon \,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t\right| \le \operatorname*{esssup}_Q |B' - B''| \times$$

$$\times \left\{ \left(\int\limits_Q \frac{\varepsilon^2}{a+\varepsilon} \,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t \right) \left(\int\limits_Q (a+\varepsilon)(\Delta_x\eta^\varepsilon)^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t \right) \right\}^{1/2} \le C\sqrt{\varepsilon}.$$

Здесь C не зависит от ε. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в равенстве (14), получаем

$$\int\limits_Q (B' - B'')F \,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t = 0. \tag{15}$$

В силу произвольности F, из равенства (15) вытекает, что $B' = B''$ почти всюду в Q, а значит, $v' = v''$ почти всюду в Q. Теорема единственности доказана.

1.4. Теорема существования обобщённого решения.

Теорема 0.3. *Пусть* $\psi \in H_0^1(\Omega)$. *Тогда существует по крайней мере одно обобщённое решение* v *задачи* (6).

Доказательство. Пусть $b_\rho(v)$ — аппроксимация функции $b(v)$ следующего вида:

$$\begin{aligned} &b_\rho(v) = b(v) \text{ при } v \le -\rho \text{ и } v \ge \rho,\\ &b'_\rho(v) > 0 \text{ при } -\rho < v < \rho,\\ &b'_\rho(v) = b'(v) \text{ при } v = -\rho \text{ и } v = \rho. \end{aligned}$$

Таким образом, $b_\rho \in C^1(\mathbb{R})$ и $b_\rho \to b$ в $C^1(\mathbb{R} \setminus \{v = 0\})$ при $\rho \to 0$.

Пусть $\{\psi_\rho(\mathbf{x})\}_{\rho>0}$ — последовательность равномерно ограниченных бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций, аппроксимирующих ψ:

$$\psi_\rho \longrightarrow \psi \text{ сильно в } H_0^1(\Omega) \text{ при } \rho \to 0.$$

Рассмотрим при $\rho > 0$ аппроксимирующую задачу

$$\frac{\partial b_\rho(v)}{\partial t} - \Delta_x v = 0, \quad v|_{S_T} = 0, \quad v|_{t=0} = \psi_\rho. \tag{16}$$

Далее нам потребуется утверждение из теории параболических дифференциальных уравнений [**1**, гл. 5, теорема 6.1].

Теорема 0.4. *Задача* (16) *имеет классическое решение*

$$v_\rho \in H^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}),$$

допускающее оценки

$$\max_Q |v_\rho| \le \max_\Omega |\psi_\rho| \le C_1; \tag{17}$$

$$\|v_{\rho x}\|_{2,Q} + \nu_1 \|v_{\rho t}\|_{2,Q} \le C_2, \tag{18}$$

где C_1, C_2 не зависят от ρ и v_ρ, через $\nu_1 > 0$ обозначен $\inf\limits_{w \in [-C_2, C_2]} b'_\rho(w)$ (заметим, что $\nu_1 > 0$ в силу строгого возрастания $U_\rho(\vartheta)$).

В силу неравенства (18), при $\rho \to 0$ существует подпоследовательность ϑ^{ρ_k}, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$\vartheta^{\rho_k} \longrightarrow \vartheta \quad \text{слабо в} \quad H^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{19}$$

значит, по теореме Реллиха

$$\vartheta^{\rho_k} \longrightarrow \vartheta \quad \text{сильно в} \quad L^2(Q_T) \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{20}$$

а отсюда следует, что при подходящем выборе подпоследовательности $\{\rho_k\}$ выполняется предельное соотношение

$$\vartheta^{\rho_k} \longrightarrow \vartheta \quad \text{п. в. в} \quad Q_T \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{21}$$

Из оценки (17) следует, что ϑ ограниченна.

Так как $\{\vartheta^{\rho_k}\}$ равномерно ограниченна, а значит, и $\{U_{\rho_k}(\vartheta^{\rho_k})\}$ — равномерно ограниченна, то можем взять $\{\rho_k\}$ так, что

$$U_{\rho_k}(\vartheta^{\rho_k}(\mathbf{x}, t)) \to \tilde{U}(\mathbf{x}, t) \quad *-\text{слабо в } L^\infty(Q_T) \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{22}$$

Легко видеть, что для ϑ^{ρ_k} и U_{ρ_k} справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_{Q_T} \{-U_{\rho_k}(\vartheta^{\rho_k})\eta_t + \vartheta^{\rho_k}_{x_i}\eta_{x_i}\}\, \mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathrm{d}t = 0.$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, в силу сходимостей (19) и (22) получаем

$$\int\limits_{Q_T} \{-\tilde{U}(\mathbf{x},t)\eta_t + \vartheta_{x_i}\eta_{x_i}\}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t = 0. \tag{23}$$

Для завершения доказательства теоремы остается проверить, что $\tilde{U}(\mathbf{x},t)$ есть функция типа $B(\mathbf{x},t,\vartheta(\mathbf{x},t))$.

Рассмотрим множество $Q^+ = \{(\mathbf{x},t) \in Q_T \,|\, \vartheta(\mathbf{x},t) > \vartheta_1\}$.

Имеем

$$\int\limits_{Q^+} U_{\rho_k}(\vartheta^{\rho_k})\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{Q^+} \{U_{\rho_k}(\vartheta^{\rho_k}) - U(\vartheta^{\rho_k})\}\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \int\limits_{Q^+} U(\vartheta^{\rho_k})\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t\,.$$

Здесь $\varphi \in C^\infty(Q^+)$ — произвольная функция. Далее, для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N, такое, что при $k > N$, $\rho_k < \varepsilon$, выполняется равенство $U_{\rho_k}(\vartheta^{\rho_k}) = U(\vartheta^{\rho_k})$ при $\vartheta^{\rho_k} \geq \vartheta_k + \rho_k$. Таким образом, $U_{\rho_k}(\vartheta^{\rho_k}) - U(\vartheta^{\rho_k}) \to 0$ п. в. в Q^+ при $k \to \infty$. В силу $\vartheta^{\rho_k} \to \vartheta$ п. в. в Q_T и того, что $U \in C^1(\vartheta_1,+\infty)$, имеем $U(\vartheta^{\rho_k}) \to U(\vartheta)$ п. в. в Q_T. Значит, поскольку $\{U(\vartheta^{\rho_k})\}$ и $\{U_{\rho_k}(\vartheta^{\rho_k}) - U(\vartheta^{\rho_k})\}$ равномерно ограниченны, по теореме Лебега

$$\int\limits_{Q^+} \{U_{\rho_k}(\vartheta^{\rho_k}) - U(\vartheta^{\rho_k})\}\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

$$\int\limits_{Q^+} U(\vartheta^{\rho_k})\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t \longrightarrow \int\limits_{Q^+} U(\vartheta)\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

т. е.

$$\int\limits_{Q^+} U_{\rho_k}(\vartheta^{\rho_k})\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t \longrightarrow \int\limits_{Q^+} U(\vartheta)\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Сопоставляя это со сходимостью (22), получаем равенство $\tilde{U}(\mathbf{x},t) = U(\vartheta(\mathbf{x},t))$ почти всюду в Q^+. Аналогичное верно и для Q^-. Остается показать, что если $\vartheta(\mathbf{x}_*,t_*) = \vartheta_1$, то $U_1 \leq \tilde{U}(\mathbf{x}_*,t_*) \leq U_1 + b_1$.

Рассмотрим функции

$$\gamma_\mu^-(\mathbf{x},t) = \inf_{\rho\geq\mu} U_\rho(\vartheta^\rho(\mathbf{x},t)), \qquad \gamma_\mu^+(\mathbf{x},t) = \sup_{\rho\geq\mu} U_\rho(\vartheta^\rho(\mathbf{x},t)).$$

По определению этих функций имеем, что γ_μ^- растет с ростом μ, а γ_μ^+ — убывает. Кроме того,

$$\gamma_\mu^+(\mathbf{x},t) \underset{\mu\to 0}{\longrightarrow} \gamma^+(\mathbf{x},t) = \limsup_{\rho\to 0} U_\rho(\vartheta^\rho(\mathbf{x},t)),$$

$$\gamma_\mu^-(\mathbf{x},t) \underset{\mu\to 0}{\longrightarrow} \gamma^-(\mathbf{x},t) = \liminf_{\rho\to 0} U_\rho(\vartheta^\rho(\mathbf{x},t)).$$

Для любой пробной функции $\varphi \in D(Q_T)$, $\varphi \geq 0$ справедливо

$$\int\limits_{Q_T} \gamma_\mu^-(\mathbf{x},t)\varphi(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t \leq \int\limits_{Q_T} U_\rho(\vartheta^\rho(\mathbf{x},t))\varphi(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t \leq$$

$$\leq \int\limits_{Q_T} \gamma_\mu^+(\mathbf{x},t)\varphi(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t,$$

откуда, переходя к пределу при μ, $\rho \to 0$, получаем

$$\int\limits_{Q_T} \gamma^-\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t \leq \int\limits_{Q_T} \tilde{U}\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t \leq \int\limits_{Q_T} \gamma^+\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t,$$

т. е. $\gamma^- \leq \tilde{U} \leq \gamma^+$ п. в. в Q_T. Пусть $(\mathbf{x}^*,t^*)$ такие, что $\vartheta(\mathbf{x}^*,t^*) = \vartheta_1$. Значит, в силу сходимости (21), справедливо, что $\vartheta^{\rho_k}(\mathbf{x}^*,t^*) \to \vartheta_1$. Покажем, что

$$\liminf_{\rho\to 0} U_\rho(\vartheta^\rho(\mathbf{x}^*,t^*)) \geq U_1. \tag{24}$$

Предположим противное: существует такая последовательность $\{\rho_n\}$, что $U_{\rho_n}(\vartheta^{\rho_n}(\mathbf{x}^*,t^*)) \to U_1 - c$ ($c = \mathrm{const} > 0$) при $n \to \infty$. При больших n, в силу сходимости $U_{\rho_n}(\vartheta^{\rho_n})$ к $U(\vartheta)$ почти всюду на Q^-, получим, что $U_{\rho_n}(\vartheta^{\rho_n}(\mathbf{x}^*,t^*)) \longrightarrow U(\vartheta(\mathbf{x}^*,t^*)) = U_1 - c$ при $n \to \infty$, но это противоречит тому, что $\vartheta(\mathbf{x}^*,t^*) = \vartheta_1$, так как $U(\vartheta)$ может быть меньше U_1 только при $\vartheta < \vartheta_1$ (по определению $U(\vartheta)$). Значит, неравенство (24) справедливо. Аналогично доказывается неравенство

$$\limsup_{\rho\to 0} U_\rho(\vartheta^\rho(\mathbf{x}^*,t^*)) \leq U_1 + b_1.$$

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408с.
2. *Ладыженская О. А. и др.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. М.: Наука, 1967. 736с.
3. *Мейрманов А. М.* Задача Стефана. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1986. 240с.