ЛЕКЦИИ
ПО ПРИКЛАДНОМУ ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Саженков С. А., Саженкова Е. В.

10 мая 2011 г.

1 Введение

1.1 Нормированные пространства

Определение 1.1. *Нормированное пространство X — это линейное пространство над полем вещественных чисел, снабженное нормой $\|\cdot\| : X \longmapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющей аксиомам*

1. $\|x\| \geq 0 \;\; \forall\, x \in X, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \;\; \forall\, x \in X \;\; \forall\, \lambda \in \mathbb{R};$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \;\; \forall\, x, y \in X.$

Справедливо неравенство

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \;\; \forall\, x, y \in X. \tag{1.1}$$

Определение 1.2. *Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится сильно к $x \in X$, то есть $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, если $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.*

Определение 1.3. *Нормированное пространство X называется банаховым, если всякая фундаментальная последовательность из пространства X сходится к $x \in X$.*

1.2 Компактные множества

Пусть X — банахово пространство.

Определение 1.4. *Множество $K \subset X$ компактно, если из любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ множества K в X ($K \subset \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$) можно выделить конечное подпокрытие, то есть найдутся такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$, что $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} U_{\alpha_i}$.*

Теорема 1.1. *(Критерий компактности.) Пункты 1–3 эквивалентны друг другу:*

1. *$K \subset X$ — компактное множество;*
2. *для любой последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x \in K$;*
3. *K замкнуто ($K = \overline{K}$) и вполне ограничено ($\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, a_1, \ldots, a_N \in K :\;\; K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} B(a_i, \varepsilon)$, где $B(a_i, \varepsilon)$ – открытый шар с центром a_i радиуса ε).*

Определение 1.5. *Множество $K \subset X$ предкомпактно, если его замыкание $\overline{K}$ компактно.*

1.3 Сопряженное пространство

Определение 1.6. *Банахово пространство* X^**, состоящее из всех линейных отображений* $f : X \to \mathbb{R}$*, обладающих конечной нормой*

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)|,$$

называется сопряженным пространством к X*.*

Определение 1.7. *Последовательность* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *сходится слабо к* $x \in X$*, то есть* $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$*, если* $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ *для любого* $f \in X^*$*.*

Предложение 1.1. *Всякая слабо сходящаяся последовательность ограничена.*

Определение 1.8. *Последовательность* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ *сходится* $*$*-слабо к* $f \in X^*$*, то есть* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{w^*} f$*, если* $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ *для любого* $x \in X$*.*

Теорема 1.2. *(Алаоглу) Если* X *сепарабельно и* $K \subset X^*$ *ограничено, то для любой последовательности* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ *найдется подпоследовательность* $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *такая, что* $f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{w^*} f \in X^*$

Предложение 1.2. *Пусть* X *рефлексивно,* X^* *сепарабельно и* $K \subset X$ *ограниченно. Тогда для любой последовательности* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ *найдется подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *такая, что* $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{w} x \in K$

Зафиксируем $x \in X$ и рассмотрим отображение $\varphi_x : X^* \longmapsto \mathbb{R}$ такое, что $\varphi_x(f) = f(x)$ для всех $f \in X^*$. Очевидно, что отображение φ_x линейно.

Предложение 1.3. *Отображенние* $\kappa : X \longmapsto X^{**}$ *такое, что* $\kappa(x) = \varphi_x$*, является изометрией, то есть имеет место равенство* $\|\varphi_x\|_{X^{**}} = \|x\| < \infty$*.*

Определение 1.9. *Вложение* $\kappa : X \longmapsto X^{**}$ *называется естественной изометрией.*

Предложение 1.4. *Если* $\kappa(X) = X^{**}$*, то пространство* X *рефлексивно.*

2 Теоремы о неподвижных точках

2.1 Предисловие

Некоторые теоремы о неподвижных точках уже известны из предыдущих курсов.

Теорема 2.1. *(Принцип сжимающих отображений Банаха) Всякое сжимающие отображение* A*, определенное в полном метрическом пространстве* E*, имеет одну и только одну неподвижную точку, то есть для любого* $A : E \longmapsto E$ *такого, что* $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y)$ *для всех* $x, y \in E$ *(*ρ *– метрика,* $\alpha = const \in (1, 0)$*), существует единственный* $x_* \in E$ *такой, что* $Ax_* = x_*$*.*

Приведем еще одну элементарную теорему из курса математического анализа.

Теорема 2.2. *Каждая непрерывная функция* f *из замкнутого ограниченного отрезка* $[a, b]$ *в себя имеет неподвижную точку, то есть для любой* $f \in C[a, b]$ *такой, что* $f([a, b]) \subset [a, b]$*, существует* $x_* \in [a, b]$*, для которой* $f(x_*) = x_*$*.*

Доказательство. Имеем $a - f(a) \leq 0 \leq b - f(b)$, значит по теореме о среднем значении существует $x_* \in [a, b]$ такая, что $x_* - f(x_*) = 0$. ☐

В настоящей главе мы продолжим эту элементарную теорему на случай пространства $\mathbb{R}^n$, а затем на произвольные банаховы пространства. Эти продолжения не элементарны, имеют глубокие последствия в топологии и обширно используются при изучении нелинейных уравнений и систем.

2.2 Определители и якобианы

2.2.1 Свойства определителей

Определение 2.1. *Пусть* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ *— матрица размерности* $n \times n$. *Определителем матрицы* A *называют величину*

$$\det A = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sign}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{ip(i)}, \tag{2.1}$$

где S_n *– это группа подстановок* n*-элементного множества.*

Для заданных i, j коэффициент A_{ij} при элементе a_{ij} в выражении $\det A$ имеет следующий вид:

$$A_{ij} = \sum_{p \in S_n^{ij}} \operatorname{sign}(p) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_{kp(k)}, \quad \text{где} \quad S_n^{ij} = \{p \in S_n | \; p(i) = j\}.$$

Определение 2.2. *Коэффициент* A_{ij} *называется алгебраическим дополнением элемента* a_{ij}.

Имеет место представление

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}, \tag{2.2}$$

где $\tilde{A}_{ij}$ – $(n-1) \times (n-1)$-матрица, получающаяся из A удалением i-ой строки и j-ого столбца.

Рассмотрим определитель матрицы A как функцию компонентов a_{ij}, тогда из определения **??** следует, что

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} (\det A) = A_{ij}.$$

Значит, если $a_{ij} = a_{ij}(\lambda)$ дифференцируемы по λ, то

$$\frac{d}{d\lambda} (\det A) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(\lambda) \frac{da_{ij}(\lambda)}{d\lambda} \tag{2.3}$$

Классические формулы линейной алгебры:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \det A \qquad i = \overline{1,n} \tag{2.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{ij} = 0 \qquad i,k = \overline{1,n}, \; i \neq k \tag{2.5}$$

$$C = AB \quad \Rightarrow \quad \det C = \det A \det B. \tag{2.6}$$

Формула (2.4) — это формула разложения определителя по строке. Справедлива также формула разложения по столбцу.

Из формул (2.3)–(2.4) следует, что

$$\frac{d}{d\lambda} (\det A) = \sum_{i=1}^{n} \det \hat{A}_i, \tag{2.7}$$

где матрица $\hat{A}_i$ получается из матрицы A заменой i-ой строки на строку производных по λ. Такая же формула справедлива и в случае, если матрица $\hat{A}_i$ получается путем замены столбца.

Определение 2.3. *Присоединенной матрицей к матрице* A *называется матрица*

$$\operatorname{adj} \, A = (A_{ji})_{i.j=\overline{1,n}}.$$

Из формул (2.4)–(2.5) следует

$$A \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \cdot A = (\det A) E, \tag{2.8}$$

где E – единичная матрица.

2.2.2 Лемма о дивергенции

Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ – непрерывно дифференцируемое отображение,

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Определение 2.4. *Матрицей Якоби отображения f называется матрица*

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Определение 2.5. *Дивергенцией отображения f называется*

$$\mathrm{div}_x f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Лемма 2.1. *(Лемма о дивергенции) Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ открытое множество, $f \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$ и $A = f'(x)$. Тогда для всех $x \in U$*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij}(x) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.9}$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение к $a_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}$.

В частности,

$$n \det A(x) = \mathrm{div}_x W(x), \quad \text{где} \quad W(x) = \mathrm{adj}\, A(x) f(x). \tag{2.10}$$

Доказательство. Зафиксируем i, обозначим

$$f^{(i)} \stackrel{def}{=} (f_1(x), \dots, f_{i-1}(x), f_{i+1}(x), \dots, f_n(x))^T.$$

Из формулы (2.2) следует

$$A_{ij}(x) = (-1)^{i+j} \det\left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{j-1}}, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{j+1}}, \dots, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_n}\right) \tag{2.11}$$

В силу (2.7) из (2.11) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij} = \sum_{l=1}^{j-1} (-1)^{i+j} \det\left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 f^{(i)}}{\partial x_j \partial x_l}, \dots, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{j-1}}, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{j+1}}, \dots, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_n}\right) +$$
$$+ \sum_{l=j+1}^{n} (-1)^{i+j} \det\left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{j-1}}, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{j+1}}, \dots, \frac{\partial^2 f^{(i)}}{\partial x_j \partial x_l}, \dots, \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_n}\right) \stackrel{def}{=} \sum_{l=1}^{j-1} S_1^{jl} + \sum_{l=j+1}^{n} S_2^{jl}.$$

Суммируем по j, а затем во второй сумме взаимно переобозначим индексы j и l:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij}(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{j-1} S_1^{jl} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=j+1}^{n} S_2^{jl} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{j-1} S_1^{jl} + \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=l+1}^{n} S_2^{lj} = \sum_{\substack{j,\, l = 1 \\ l < j}}^{n} (S_1^{jl} + S_2^{lj}). \tag{2.12}$$

Сравним теперь S_1^{jl} и S_2^{lj}:

$$\begin{aligned} S_1^{jl} &= (-1)^{i+j}\det\left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial^2 f^{(i)}}{\partial x_j\partial x_l},\dots,\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{j-1}},\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{j+1}},\dots,\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_n}\right)\\ S_2^{lj} &= (-1)^{i+l}\det\left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{l-1}},\underbrace{\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_{l+1}},\dots,\frac{\partial^2 f^{(i)}}{\partial x_l\partial x_j}}_{(j-l)\ \text{столбцов}},\dots,\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_n}\right). \end{aligned}$$

Если во втором определителе переставить по циклу выделенные столбцы, то получим первый определитель, умноженный на $(-1)^{j-l-1}$. Но тогда $(-1)^{i+l}\cdot(-1)^{j-l-1}=(-1)^{i+j-1}$ и $S_1^{jl}+S_2^{lj}=0$, следовательно формула (2.9) установлена.

Далее, если $W(x)=\operatorname{adj}A(x)f(x)$, то

$$W_j(x)=\sum_{i=1}^n(\operatorname{adj}A(x))_{ji}f_i=\sum_{i=1}^n A_{ij}f_i,$$

Откуда

$$\operatorname{div}_x W(x)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sum_{i=1}^n A_{ij}f_i\right]=\sum_{i,j=1}^n\left[\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}f_i+A_{ij}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\overset{(2.9)}{=}\sum_{i,j=1}^n A_{ij}a_{ij}\overset{(2.4)}{=}n\det A.$$

□

2.2.3 Лемма о присоединенной матрице

Пусть $B(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \|x-a\|<r\}$ – открытый шар с центром в точке a радиуса r в $\mathbb{R}^n$, тогда $\overline{B}(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \|x-a\|\le r\}$ – замыкание $B(a,r)$. Пусть $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \|x\|=1\}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 2.2. *(Лемма о присоединенной матрице) Пусть $f\in C^1(U,\mathbb{R}^n)$, где $U\subset\mathbb{R}^n$ открыто и $\overline{B}(0,1)\subset U$, $A=f'(x)$. Тогда, если $f(x)=x$ для всех $x\in S^{n-1}$, то*

$$(\operatorname{adj}A(x)\,x,x)=1\quad\forall\ x\in S^{n-1}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Пусть $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ стандартный декартовый базис в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Этап I. Докажем, что равенство (2.13) справедливо при $x=e_n$.

Поскольку $f(x)=x$ для всех $x\in S^{n-1}$, то верно тождество

$$f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)-\frac{x}{\|x\|}=0\qquad\forall\ x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

Продифференцируем i-тую компоненту этого тождества по переменной x_j:

$$\begin{aligned} 0=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f_i\left(\frac{x}{\|x\|}\right)-\frac{x_i}{\|x\|}\right)&=\sum_{k=1}^n A_{ik}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_k}{\|x\|}\right)-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_i}{\|x\|}\right)=\\ &=\sum_{k=1}^n A_{ik}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\left(\delta_{jk}-\frac{x_kx_j}{\|x\|^2}\right)\frac{1}{\|x\|}-\left(\delta_{ij}-\frac{x_ix_j}{\|x\|^2}\right)\frac{1}{\|x\|}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\|x\|=1$ и $i=\overline{1,n}$ получаем

$$0=\sum_{k=1}^n A_{ik}(x)(\delta_{jk}-x_kx_j)-(\delta_{ij}-x_ix_j).$$

Домножая последнее равенство на y_j и суммируя по j, а затем собирая полученные скалярные равенства для $i = \overline{1,n}$ в одно векторное, приходим к следующему утверждению:

$$(A(x) - E)(y - (x,y)x) = 0 \quad \forall\, x \in S^{n-1} \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.14}$$

Далее заметим, что для всех $y \perp x$ из (2.14) следует, что $A(x)y = y$. Значит

$$A(e_n)y = y \quad \forall\, y \in \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}. \tag{2.15}$$

Кроме того, поскольку $f(x) = x$ для всех $x \in S^{n-1}$, то верно еще одно тождество

$$\left(f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right) = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Дифференцируя это тождество по переменным x_i, $i = \overline{1,n}$, сразу выводим, что $A(x)x = 0$ для всех $x \in S^{n-1}$ и, в частности,

$$A(e_n)e_n = 0. \tag{2.16}$$

Из равенств (2.15) и (2.16) находим

$$A(e_n) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}, 0).$$

Тогда

$$\operatorname{adj} A(e_n) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и, следовательно, равенство (2.13) справедливо при $x = e_n$.

Этап II. Докажем, что левая часть формулы (2.13) инвариантна относительно ортогональных преобразований.

Пусть A – произвольная матрица, тогда матрица $A_\varepsilon = A + \varepsilon E$ обратима при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Если M – произвольная обратимая матрица, то

$$\det(M^{-1}A_\varepsilon M)E \overset{(2.8)}{=} (M^{-1}A_\varepsilon M)\operatorname{adj}(M^{-1}A_\varepsilon M),$$

и, с другой стороны,

$$\det(M^{-1}A_\varepsilon M)E \overset{(2.6)}{=} \det(A_\varepsilon)E = M^{-1}(\det(A_\varepsilon)E)M \overset{(2.8)}{=} M^{-1}(A_\varepsilon \operatorname{adj} A_\varepsilon)M = (M^{-1}A_\varepsilon M)(M^{-1}(\operatorname{adj} A_\varepsilon)M).$$

Так как матрица $M^{-1}A_\varepsilon M$ обратима, то из двух последних равенств вытекает, что

$$\operatorname{adj}(M^{-1}A_\varepsilon M) = M^{-1}(\operatorname{adj} A_\varepsilon)M.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и полагая теперь $A = A(x) = f'(x)$, находим

$$\operatorname{adj}(M^{-1}A(x)M) = M^{-1}(\operatorname{adj} A(x))M. \tag{2.17}$$

Рассмотрим функцию $g(x) = M^{-1}f(Mx)$, тогда по правилу дифференцирования сложной функции $B(x) \overset{def}{=} g'(x) = M^{-1}A(Mx)M$. Поэтому

$$\operatorname{adj}(B(M^{-1}x)) = \operatorname{adj}(M^{-1}A(MM^{-1}x)M) = \operatorname{adj}(M^{-1}A(x)M) \overset{(2.17)}{=} M^{-1}(\operatorname{adj} A(x))M. \tag{2.18}$$

Теперь пусть M – ортогональная матрица, тогда

$$(\operatorname{adj} A(x)\, x, x) = (\operatorname{adj} A(x)\, x, MM^{-1}x) = (M^T \operatorname{adj} A(x)\, x, M^{-1}x) = (M^{-1} \operatorname{adj} A(x)\, x, M^{-1}x) = \\ = (M^{-1} \operatorname{adj} A(x)\, MM^{-1}x, M^{-1}x) \overset{(2.18)}{=} (\operatorname{adj}(B(M^{-1}x))M^{-1}x, M^{-1}x). \quad (2.19)$$

Кроме того, поскольку $Mx \in S^{n-1}$ для всех $x \in S^{n-1}$, то $g(x) = M^{-1}f(Mx) = M^{-1}Mx = x$ для всех $x \in S^{n-1}$. Тогда, применяя результат первого этапа доказательства к функции $g(x)$, получим

$$(\operatorname{adj} B(e_n)\, e_n, e_n) = 1. \quad (2.20)$$

Наконец, для любого $x \in S^{n-1}$ найдется ортогональная матрица M такая, что $M^{-1}x = e_n$. Таким образом,

$$(\operatorname{adj} A(x)\, x, x) \overset{(2.19)}{=} (\operatorname{adj}(B(M^{-1}x))M^{-1}x, M^{-1}x) = (\operatorname{adj} B(e_n)\, e_n, e_n) \overset{(2.20)}{=} 1,$$

что и завершает доказательство. □

2.3 Теоремы Брауэра

2.3.1 Ретракция. Лемма о несуществовании ретракции

Определение 2.6. *Пусть X – метрическое пространство, A, B – замкнутые множества такие, что $A \subset B \subset X$. Множество A называется ретрактом множества B, если существует непрерывное отображение $f: B \longmapsto A$ такое, что $f(x) = x$ для всех $x \in A$. Отображение f называется ретракцией B на A.*

Лемма 2.3. *(Лемма о несуществовании дважды дифференцируемой ретракции) Пусть B' – открытый шар в $\mathbb{R}^n$, $B' \supset \overline{B}(0,1)$, тогда не существует $f \in C^2(B', S^{n-1})$ такой, что $f(x) = x$ для всех $x \in S^{n-1}$.*

Доказательство. Проведем доказательство методом от противного.

Предположим, что такое f существует, тогда справедливо тождество

$$\|f(x)\|^2 - 1 = 0 \quad \forall x \in B',$$

дифференцируя которое, получаем

$$f'(x)f(x) = 0 \quad \forall x \in B'.$$

Но по условию леммы $f(x) \neq 0$ $(\|f(x)\| = 1)$ для всех $x \in B'$, значит матрица $f'(x)$ вырождена:

$$\det f'(x) = 0 \quad \forall x \in B'. \quad (2.21)$$

Справедлива цепочка равенств:

$$0 \overset{(2.21)}{=} \int\limits_{\overline{B}(0,1)} n \det f'(x) dx \overset{(2.10)}{=} \int\limits_{\overline{B}(0,1)} \operatorname{div}((\operatorname{adj} f'(x)) f(x)) dx = \\ = \int\limits_{S^{n-1}} ((\operatorname{adj} f'(x)) f(x), \bar{n}) ds = \int\limits_{S^{n-1}} ((\operatorname{adj} f'(x)) x, x) ds \overset{(2.13)}{=} \int\limits_{S^{n-1}} 1 ds = \operatorname{meas} S^{n-1}.$$

Третье равенство в этой цепочке получено применением формулы Грина, $\bar{n}$ – единичный вектор внешней нормали к сфере S^{n-1}. Четвертое равенство справедливо, так как $f(x) = x$ и $\bar{n} = x$ всюду на сфере S^{n-1}. Сравнивая начало и конец приведенной цепочки, получаем противоречие. Таким образом, лемма доказана. □

2.3.2 Слабая форма теоремы Брауэра

Докажем вспомогательную версию основного результата этого параграфа.

Теорема 2.3. *Пусть B' – открытый шар в $\mathbb{R}^n$, $B' \supset \overline{B}(0,1)$, функция $f \in C^2(B', B(0,1))$. Тогда существует точка $x_0 \in B(0,1)$ такая, что $f(x_0) = x_0$.*

Доказательство. Проведем доказательство методом от противного.

Предположим, что $f(x) \neq x$ для всех $x \in B'$ (по условию теоремы $f(B') \subset B(0,1)$, поэтому $f(x) \neq x$ для всех $x \in B' \setminus B(0,1)$). Отсюда следует, что для всех $x \in B'$ прямая $\{f(x) + \lambda(x - f(x)), \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$ пересекает сферу S^{n-1} ровно в двух точках, поскольку уравнение

$$\|f(x) + \lambda(x - f(x))\|^2 = 1$$

имеем ровно два решения. В самом деле, перепишем это уравнение в другой форме:

$$\lambda^2\|x - f(x)\|^2 + \lambda 2(f(x), x - f(x)) + \|f(x)\|^2 - 1 = 0. \tag{2.22}$$

Уравнение (2.22) является квадратным относительно λ, и его дискриминант имеет вид:

$$D = 4(f(x), x - f(x))^2 + 4(1 - \|f(x)\|^2)\|x - f(x)\|^2.$$

Так как $f(B') \subset B(0,1)$, то $\|f(x)\|^2 < 1$ для всех $x \in B'$, поэтому $D > 0$. Кроме того, свободный член уравнения (**??**) отрицательный, следовательно, по теореме Виета его корни имеют разные знаки.

Рассмотрим положительный корень уравнения (2.22) как функцию точки x:

$$\lambda(x) = \frac{-2(f(x), x - f(x)) + \sqrt{D}}{2\|x - f(x)\|^2} \ \in C^2(B', \mathbb{R}).$$

Заметим, что $\lambda(x) = 1$ при $\|x\| = 1$ (в этом легко убедиться подстановкой).

Теперь положим $F(x) \stackrel{def}{=} f(x) + \lambda(x)(x - f(x))$ для всех $x \in B'$. Тогда по построению $F \in C^2(B', S^{n-1})$ и $F(x) = x$ для всех $x \in S^{n-1}$. Но по лемме 2.3 о несуществовании дважды непрерывно дифференцируемой ретракции такой функции быть не может. Это противоречие завершает доказательство теоремы. ☐

2.3.3 Теорема Брауэра о неподвижной точке в сильной форме

Теорема 2.4. *(Брауэра I) Пусть Ω – замкнутое непустое подмножество в $\mathbb{R}^n$, гомеоморфное $\overline{B}(0,1)$, и $f : \Omega \longmapsto \Omega$ – непрерывное отображение. Тогда найдется $x_0 \in \Omega$ такой, что $f(x_0) = x_0$.*

Доказательство. Проведем доказательство в три этапа.

Этап I. Предположим, что теорема справедлива для $\Omega = \overline{B}(0,1)$. Покажем, что она остается справедливой и для произвольного допустимого Ω.

Пусть $h : \Omega \longmapsto \overline{B}(0,1)$ – гомеоморфизм (взаимнооднозначное непрерывное отображение), существующий по условию теоремы. Тогда отображение $h \circ f \circ h^{-1} : \overline{B}(0,1) \longmapsto \overline{B}(0,1)$ непрерывно и по предположению имеет неподвижную точку $y_0 \in \overline{B}(0,1)$, то есть $h \circ f \circ h^{-1}(y_0) = y_0$. Таким образом, получаем

$$f(h^{-1}(y_0)) = f \circ h^{-1}(y_0) = h^{-1} \circ h \circ f \circ h^{-1}(y_0) = h^{-1}(y_0).$$

Следовательно, $x_0 = h^{-1}(y_0) \in \Omega$ – неподвижная точка отображения f.

Этап II. Докажем, что теорема справедлива для $\Omega = \overline{B}(0,1)$.

Для любого $k > 1$ положим $B_k = B(0, 1 - \frac{1}{k})$, $B^k = B(0, 1 + \frac{1}{k})$ ($B_k \subset \overline{B}_k \subset B(0,1) \subset B^k$) и определим отображение $f^k : B^k \longmapsto B_k$ по формуле:

$$f^k(x) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) f\left(\frac{kx}{1+k}\right) \quad \forall\, x \in B^k.$$

Отображение f^k непрерывно для любого $k > 1$, и, кроме того, $f^k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ равномерно на $\overline{B}(0,1)$.

Предположим, что для любого $k > 1$ существует последовательность дважды непрерывно дифференцируемых отображений $\{g_m^k : \overline{B^{2k}} \longmapsto \overline{B}_{2k}\}_{m\in\mathbb{N}}$ такая, что $g_m^k \xrightarrow[m\to\infty]{} f^k$ равномерно на $\overline{B^{2k}}$. Обоснуем это предположение на третьем этапе доказательства.

Так как $B^{2k} \supset \overline{B}(0,1) \supset B(0,1) \supset \overline{B}_{2k}$, то в силу теоремы 2.3 для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдется неподвижная точка $x_m^k \in \overline{B}_{2k}$ отображения g_m^k, то есть $g_m^k(x_m^k) = x_m^k$. По теореме Больцано-Вейерштрасса из последовательности $\{x_m^k\}_{m\in\mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{m_l}^k\}_{l\in\mathbb{N}}$, сходящуюся к некоторому $x^k \in \overline{B}(0,1)$.

В силу того, что f^k непрерывно, $g_{m_l}^k \xrightarrow[l\to\infty]{} f^k$ равномерно на $\overline{B^{2k}}$ и $x_{m_l}^k \xrightarrow[l\to\infty]{} x^k$ получаем

$$\|f^k(x^k) - x^k\| \le \|f^k(x^k) - f^k(x_{m_l}^k)\| + \|f^k(x_{m_l}^k) - \underbrace{g_{m_l}^k(x_{m_l}^k)}_{x_{m_l}^k}\| + \|x_{m_l}^k - x^k\| \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.$$

Значит $f^k(x^k) = x^k$ для любого $k > 1$.

Будем считать, что $x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in \overline{B}(0,1)$, иначе заменим ее на сходящуюся подпоследовательность, которая существует по теореме Больцано-Вейерштрасса. Вспомним, что f непрерывно и $f^k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ равномерно на $\overline{B}(0,1)$. Тогда, проводя рассуждения аналогичные предыдущим, получаем

$$\|f(x_0) - x_0\| \le \|f(x_0) - f(x^k)\| + \|f(x^k) - \underbrace{f^k(x^k)}_{x^k}\| + \|x^k - x_0\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, $f(x_0) = x_0$, то есть $x_0 \in \overline{B}(0,1)$ неподвижная точка отображения f.

Этап III. Остается доказать предположение, что для любого $k > 1$ существует последовательность отображений $\{g_m^k(x)\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^2(\overline{B^{2k}}, \overline{B}_{2k})$ такая, что $g_m^k \xrightarrow[m\to\infty]{} f^k$ равномерно на $\overline{B^{2k}}$.

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ – бесконечно дифференцируемая четная неотрицательная функция, такая что $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,1)$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$. Например, в качестве φ можно взять стандартное регуляризующее ядро:

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x_1)\cdot\ldots\cdot\tilde{\varphi}(x_n), \text{ где } \tilde{\varphi}(x_i) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-x_i^2}\right), & |x_i| < 1, \\ 0, & |x_i| \ge 1. \end{cases}$$

Положим $\varphi_m(x) = m^n\varphi(mx)$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Заметим, что φ_m четная, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(x)dx = 1$ и $\operatorname{supp}\varphi_m \subset B(0, \frac{1}{m})$.

Для любых k, $m \in \mathbb{N}$ определим отображение $g_m^k(x)$ следующим образом:

$$g_m^k(x) = \int\limits_{B^k} \varphi_m(x-y)f^k(y)dy, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.23}$$

Тогда g_m^k переводит $\overline{B^{2k}}$ на $\overline{B}_{2k}$ и является бесконечно гладким, как свертка бесконечно гладкой и непрерывной функций.

Покажем, что $g_m^k \xrightarrow[m\to\infty]{} f^k$ равномерно на $\overline{B^{2k}}$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как отображение f^k непрерывно на $\overline{B^k}$, то оно равномерно непрерывно на $\overline{B^k}$. Тогда найдется $\delta \in (0, \frac{1}{2k})$ такое, что

$$\|f^k(x) - f^k(y)\| \le \varepsilon \quad \forall\, x, y \in \overline{B^k} \text{ таких, что } \|x-y\| \le \delta. \tag{2.24}$$

Теперь пусть $m > \frac{1}{\delta} > 2k$ и $x \in \overline{B^{2k}}$. Докажем, что $\|g_m^k(x) - f^k(x)\| \le \varepsilon$.

Заметим, что для любых $x \in \overline{B^{2k}}$ и $y \notin B^k$ верно неравенство:

$$\|y-x\| \geq \|y\| - \|x\| \geq 1 + \frac{1}{k} - \left(1 + \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k} > \frac{1}{m}.$$

Так как $\operatorname{supp} \varphi_m \subset B(0, \frac{1}{m})$ и φ_m четная, то, учитывая это неравенство, получаем

$$\int\limits_{B^k} \varphi_m(x-y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(x-y)dy \overset{(z=y-x)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(-z)dz = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(z)dz = 1. \tag{2.25}$$

Справедлива цепочка равенств:

$$\begin{gathered}
\|g_m^k(x) - f^k(x)\| \overset{(2.23)}{=} \left\| \int\limits_{B^k} \varphi_m(x-y) f^k(y)dy - f^k(x) \right\| \overset{(2.25)}{=} \\
= \left\| \int\limits_{B^k} \varphi_m(x-y) f^k(y)dy - \left[\int\limits_{B^k} \varphi_m(x-y)dy \right] f^k(x) \right\| = \left\| \int\limits_{B^k} \varphi_m(x-y)(f^k(y) - f^k(x))dy \right\| = \\
= \left\| \int\limits_{\{y \in B^k:\ \|x-y\| \leq \delta\}} \varphi_m(x-y)(f^k(y) - f^k(x))dy \right\| + \left\| \int\limits_{\{y \in B^k:\ \|x-y\| > \delta\}} \varphi_m(x-y)(f^k(y) - f^k(x))dy \right\|.
\end{gathered} \tag{2.26}$$

Оценим первое слагаемое в правой части равенства (2.26):

$$\begin{gathered}
\left\| \int\limits_{\{y \in B^k:\ \|x-y\| \leq \delta\}} \varphi_m(x-y)(f^k(y) - f^k(x))dy \right\| \leq \\
\leq \|f^k(y) - f^k(x)\| \int\limits_{\{y \in B^k:\ \|x-y\| \leq \delta\}} \varphi_m(x-y)dy \overset{(2.24)}{\leq} \varepsilon \int\limits_{B^k} \varphi_m(x-y)dy \overset{(2.25)}{=} \varepsilon
\end{gathered} \tag{2.27}$$

Так как $f^k : B^k \longmapsto B_k \subset B(0,1)$, то $\|f^k(y) - f^k(x)\| \leq \|f^k(y)\| + \|f^k(x)\| \leq 2$. Учитывая данное неравенство, оценим второе слагаемое в правой части равенства (2.26):

$$\begin{gathered}
\left\| \int\limits_{\{y \in B^k:\ \|x-y\| > \delta\}} \varphi_m(x-y)(f^k(y) - f^k(x))dy \right\| \leq \|f^k(y) - f^k(x)\| \int\limits_{\{y \in B^k:\ \|x-y\| > \delta\}} \varphi_m(x-y)dy \leq \\
\leq 2 \int\limits_{\{y \in B^k:\ \|x-y\| > \delta\}} \varphi_m(x-y)dy \leq 2 \int\limits_{\|x-y\| > \delta} \varphi_m(x-y)dy \overset{(z=y-x)}{=} \\
= 2 \int\limits_{\|z\| > \delta} \varphi_m(z)dz \leq 2 \int\limits_{\|z\| > \frac{1}{m}} \varphi_m(z)dz = 0
\end{gathered} \tag{2.28}$$

Наконец, применяя неравенства (2.27)–(2.28), из (2.26) получаем, что $\|g_m^k(x) - f^k(x)\| \leq \varepsilon$. Таким образом, $g_m^k \xrightarrow[m \to \infty]{} f^k$ равномерно на $\overline{B^{2k}}$, и доказательство теоремы закончено. $\square$

2.3.4 Принцип несуществования ретракции

Теорема 2.5. *(Принцип несуществования ретракции)*
Не существует непрерывной функции $f : \overline{B}(0,1) \longmapsto S^{n-1}$ *такой, что* $f(x) = x$ *для всех* $x \in S^{n-1}$.

Доказательство. Пусть такая непрерывная функция существует. Тогда $(-f)$ непрерывная функция из $\overline{B}(0,1)$ в $\overline{B}(0,1)$ и по теореме Брауэра 2.4 существует $x_0 \in \overline{B}(0,1)$ такая, что $-f(x_0) = x_0$. По условию теоремы $f(x_0) \in S^{n-1}$, следовательно $(-x_0) \in S^{n-1}$ и значит $x_0 \in S^{n-1}$, отсюда $f(x_0) = x_0$, но тогда $x_0 = -x_0 \in S^{n-1}$. Получили противоречие, теорема доказана. □

2.3.5 Обобщение теоремы Брауэра о неподвижной точке

Теорема Брауэра 2.4 допускает естественное усиление для компактных выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$, доказательство которого основано на использовании специального проектора.

Лемма 2.4. *Пусть* K *– замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства* H. *Тогда для каждого* $x \in H$ *существует единственная точка* $y \in K$ *такая, что*

$$\|x - y\| = \inf_{\eta \in K} \|x - \eta\|. \tag{2.29}$$

Доказательство. Пусть $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ – минимизирующая последовательность, то есть

$$\lim_{k\to\infty} \|\eta_k - x\| = d = \inf_{\eta\in K} \|\eta - x\|. \tag{2.30}$$

По правилу параллелограмма

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall\ x, y \in H,$$

получаем, что

$$\|\eta_k - \eta_l\|^2 = 2\|x - \eta_k\|^2 + 2\|x - \eta_l\|^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_l)\|^2. \tag{2.31}$$

Поскольку K выпукло, $\frac{1}{2}(\eta_k + \eta_l) \in K$ и поэтому $d^2 \le \|x - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_l)\|^2$. Следовательно,

$$\|\eta_k - \eta_l\|^2 = 2\|x - \eta_k\|^2 + 2\|x - \eta_l\|^2 - 4d^2,$$

и из (2.30) вытекает, что $\lim\limits_{k,l\to\infty} \|\eta_k - \eta_l\| = 0$, то есть последовательность $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ фундаментальна. Так как H полно, а K замкнуто, существует элемент $y \in K$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} \eta_k = y$. Кроме того, $\|x - y\| = \lim\limits_{k\to\infty} \|x - \eta_k\| = d$.

Пусть существует два элемента $y, y' \in K$, удовлетворяющих (2.29). Подставив их вместо η_k и η_l в равенство (2.31), получим

$$\|y - y'\|^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - y'\|^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(y + y')\|^2 \le 4d^2 - 4d^2 = 0,$$

откуда следует, что $y = y'$. □

Определение 2.7. *Точка* y*, удовлетворяющая* (2.29)*, называется проекцией точки* x *на замкнутое выпуклое подмножество* K. *При этом пишем* $y = \mathrm{Pr}_K x$.

Отметим, что $\mathrm{Pr}_K x = x$ для всех $x \in K$.

Лемма 2.5. *Пусть* K *– замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства* H. *Тогда* $y = \mathrm{Pr}_K x$ *в том и только в том случае, когда*

$$(y, \eta - y) \ge (x, \eta - y) \quad \forall\ \eta \in K. \tag{2.32}$$

Доказательство. Пусть $x \in H$ и $y = \mathrm{Pr}_K x$. Поскольку K выпукло,

$$(1-t)y + t\eta = y + t(\eta - y) \in K \quad \forall\, \eta \in K, t \in [0,1],$$

и поэтому вследствие (2.29) функция

$$\Phi(t) = \|x - y - t(\eta - y)\|^2 = \|x-y\|^2 - 2(x-y, \eta - y) + t^2\|\eta - y\|^2$$

принимает наименьшее значение на отрезке $[0,1]$ в точке $t = 0$. Это означает, что $\Phi'(0) \geq 0$, то есть $(x-y, \eta-y) \leq 0$ при всех $\eta \in K$, или $(y, \eta - y) \geq (x, \eta - y)$ при всех $\eta \in K$.

С другой стороны, если $y \in K$ и $(y, \eta - y) \geq (x, \eta - y)$ при всех $\eta \in K$, то

$$0 \leq (y - x, \eta - y) = (y - x, (\eta - x) + (x - y)) \leq -\|x-y\|^2 + (y-x, \eta - x).$$

Следовательно, $\|x-y\|^2 \leq (y-x, \eta-x) \leq \|y-x\|\|\eta - x\|$ и тем самым $\|x - y\| \leq \|\eta - x\|$ для любых $\eta \in K$. Значит справедливо (2.29). □

Следствие 2.1. *Пусть K – замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства H. Тогда оператор $\mathrm{Pr}_K : H \longmapsto K$ нерастягивающий, то есть*

$$\|\mathrm{Pr}_K x - \mathrm{Pr}_K x'\| \leq \|x - x'\| \quad \forall\, x, x' \in K \tag{2.33}$$

и, следовательно, непрерывный.

Доказательство. Пусть x, $x' \in H$ и $y = \mathrm{Pr}_K x$, $y' = \mathrm{Pr}_K x'$. Тогда по лемме 2.5

$$\begin{array}{rcl} (y, \eta - y) & \geq & (x, \eta - y) \;\; \forall\, \eta \in K, \\ (y', \eta - y') & \geq & (x', \eta - y') \;\; \forall\, \eta \in K. \end{array}$$

Положим $\eta = y'$ в первом неравенстве и $\eta = y$ во втором. Складывая затем эти неравенства, получим

$$\|y - y'\|^2 = (y - y', y - y') \leq (x - x', y - y') \leq \|x - x'\|\|y - y'\|,$$

или $\|y - y'\| \leq \|x - x'\|$, что и требовалось доказать. □

Теперь сформулируем усиление теоремы Брауэра 2.4.

Теорема 2.6. *(Брауэра II) Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – компактное непустое множество, гомеоморфное компактному выпуклому подмножеству в $\mathbb{R}^n$, и $f : K \longmapsto K$ – непрерывное отображение. Тогда найдется точка $x_0 \in K$, такая что $f(x_0) = x_0$.*

Доказательство. Точно также, как в доказательстве теоремы 2.4, достаточно рассмотреть случай, когда само множество K компактное и выпуклое.

Пусть B' – замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ такой, что $K \subset B'$, он гомеоморфен $\overline{B}(0,1)$. Согласно следствию 2.1 оператор Pr_K непрерывен, следовательно отображение $f \circ \mathrm{Pr}_K : B' \longmapsto K \subset B'$ непрерывно и переводит B' в себя. Тогда по теореме 2.4 у него есть неподвижная точка x_0, то есть $f \circ \mathrm{Pr}_K x_0 = x_0 \in K$. Но $\mathrm{Pr}_K x_0 = x_0$, и поэтому $f(x_0) = x_0$. □

2.4 Теоремы Шаудера

Теоремы Шаудера — это важнейшее обобщение теоремы Брауэра 2.6 на случай нормированного пространства бесконечной размерности. Начнем с описания конструкции, лежащей в основе доказательства.

2.4.1 Нелинейный проектор Шаудера

Пусть X – вещественное банахово пространство, $K \subset X$ – компакт.

По критерию компактности 1.1 K вполне ограничено и, следовательно, содержит счетное всюду плотное множество $\{k_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subset K$. Кроме того, для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется конечное подмножество $\{k_{i_l}, l = \overline{1, M(m)}\}$ этого всюду плотного множества такое, что $K \subset \bigcup\limits_{l=1}^{M(m)} B(k_{i_l}, \frac{1}{m})$. Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим

$$\beta_l^m(x) = \max\left\{0, \frac{1}{m} - \|f(x) - k_{i_l}\|\right\}, \quad l = \overline{1, M(m)}, \quad x \in K. \tag{2.34}$$

Заметим, что для каждого $x \in K$ существует хотя бы один номер l такой, что $\beta_l^m \neq 0$. Действительно, если это не так, то найдется такой $x_* \in K$, для которого $\|f(x_*) - k_{i_l}\| \geq \frac{1}{m}$ для всех $l = \overline{1, M(m)}$, и значит $f(x_*) \notin \bigcup\limits_{l=1}^{M(m)} B(k_{i_l}, \frac{1}{m})$. Но $f(x_*) \in K$, а $K \subset \bigcup\limits_{l=1}^{M(m)} B(k_{i_l}, \frac{1}{m})$, получаем противоречие. Таким образом, корректно следующее определение.

Определение 2.8. *Отображение $f_m : K \longmapsto \operatorname{span}\{k_{i_l}, l = \overline{1, M(m)}\}$, задаваемое формулой*

$$f_m(x) = \frac{\sum\limits_{l=1}^{M(m)} \beta_l^m(x) k_{i_l}}{\sum\limits_{l=1}^{M(m)} \beta_l^m(x)}, \tag{2.35}$$

называется нелинейным проектором Шаудера порядка m.

Элементарные свойства проектора Шаудера:

1. *Свойство непрерывности.* Если отображение f непрерывно на K, то функция β_l^m тоже непрерывна на K, поскольку $x \longmapsto \max\{0, x\}$ и $x \longmapsto \|x\|$ непрерывные функции. Значит и проектор Шаудера f_m непрерывен на K при любом $m \in \mathbb{N}$.

2. *Свойство аппроксимации.* Если $\beta_l^m(x) \neq 0$, то $\|f(x) - k_{i_l}\| \leq \frac{1}{m}$. Тогда, применяя неравенство треугольника, получим

$$\|f_m(x) - f(x)\| \leq \frac{\sum\limits_{l=1}^{M(m)} \beta_l^m(x)\|k_{i_l} - f(x)\|}{\sum\limits_{l=1}^{M(m)} \beta_l^m(x)} \leq \frac{1}{m} \quad \forall\, x \in K.$$

   Поэтому $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ равномерно на K.

2.4.2 Первая теорема Шаудера о неподвижной точке

Определение 2.9. *Замкнутая выпуклая оболочка множества Ω — это пересечение всех замкнутых и выпуклых множеств, содержащих Ω.*

Теорема 2.7. *(Шаудера I) Пусть X – вещественное банахово пространство, $K \subset X$ – непустое компактное и выпуклое множество, $f : K \longmapsto K$ непрерывное отображение. Тогда найдется точка $x_0 \in K$ такая, что $f(x_0) = x_0$.*

Доказательство. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ построим нелинейный проектор Шаудера f_m. Так как

$$\sum_{l=1}^{M(m)} \frac{\beta_l^m(x) k_{i_l}}{\sum\limits_{l=1}^{M(m)} \beta_l^m(x)} = 1,$$

то f_m отображает K в замкнутою выпуклую оболочку K_m множества $\{k_{i_l}, l = \overline{1, M(m)}\}$.

В свою очередь, так как K выпукло, то $K_m \subset K$ и, следовательно, K_m компактно. Таким образом, сужение отображения $f_m : K_m \longmapsto K_m$ переводит компактное выпуклое подмножество конечномерного пространства $\operatorname{span}\{k_{i_l}, l = \overline{1, M(m)}\}$ в себя. Однако всякое нормированное конечномерное пространство изоморфно $\mathbb{R}^n$, значит по теореме Брауэра 2.6 существует точка $x_m \in K_m \subset K$ такая, что $f_m(x_m) = x_m$.

Так как K компакт, последовательность $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ содержит подпоследовательность $\{x_{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, которая сходится к некоторому $x_0 \in K$, то есть $x_{m_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_0$ сильно в X.

Остается отметить, что

$$\|f(x_0) - x_0\| \le \|f(x_0) - f(x_{m_j})\| + \|f(x_{m_j} - \underbrace{f_{m_j}(x_{m_j})}_{x_{m_j}}\| + \|x_{m_j} - x_0\| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

в силу того, что f непрерывно, $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ равномерно на K по свойству аппроксимации и $x_{m_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_0$ сильно в X. Итак, $f(x_0) = x_0$, теорема доказана. □

2.4.3 Вторая теорема Шаудера о неподвижной точке

Определение 2.10. *Компактный оператор — это оператор, который переводит ограниченные множества в предкомпактные.*

Теорема 2.8. *(Шаудера II) Пусть X – вещественное банахово пространство, $K \subset X$ – непустое замкнутое и выпуклое множество, $f : K \longmapsto K$ непрерывное и компактное отображение. Тогда найдется точка $x_0 \in K$ такая, что $f(x_0) = x_0$.*

Доказательство. Поскольку K замкнуто, то $\overline{f(K)} \subset K$. Поскольку f компактно, то $\overline{f(K)}$ – компакт.

Пусть $\operatorname{cocl}(K)$ – замкнутая выпуклая оболочка $\overline{f(K)}$. Заметим, что $\operatorname{cocl}(K)$ – компакт. Действительно, если $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{cocl}(K)$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо представление

$$y_n = \lambda_n x_{1n} + (1 - \lambda_n) x_{2n}, \quad \text{где} \quad \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1], \quad \{x_{in}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{f(K)}, \quad i = 1, 2.$$

Так как $[0,1]$ и $\overline{f(K)}$ компакты в $\mathbb{R}$ и X, соответственно, то найдется последовательность номеров $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что $\lambda_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda \in [0,1]$, $x_{in_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_i \in \overline{f(K)}$, $i = 1, 2$. Тогда

$$y_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in \operatorname{cocl}(K).$$

Далее, так как K выпукло, то $\operatorname{cocl}(K) \subset K$. Значит сужение $f : \operatorname{cocl}(K) \longmapsto \operatorname{cocl}(K)$ непрерывно и отображает выпуклый компакт в себя, следовательно, по теореме Шаудера 2.7 существует точка $x_0 \in \operatorname{cocl}(K) \subset K$ такая, что $f(x_0) = x_0$, что и требовалось доказать. □

2.5 Приложения теорем о неподвижных точках

2.5.1 О собственных числах матрицы с положительными компонентами

Теорема 2.9. *Пусть A – матрица порядка n с положительными компонентами, тогда существует действительное положительное собственное число $\tilde{\mu}$ матрицы A, обладающее следующими свойствами:*

1. *число $\tilde{\mu}$ является максимальным по модулю среди всех собственных чисел, включая комплексные, то есть $|\mu| \le \tilde{\mu}$ для любого $\mu \in \sigma_p(A)$;*

2. *числу $\tilde{\mu}$ соответствует ровно один собственный вектор с положительными компонентами, с точностью до растяжения.*

Доказательство. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)^T,\ b = (b_i, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$, будем писать $a \le b$, если $a_i \le b_i$ для всех $i = \overline{1, n}$.

Этап I. Докажем, что существует положительное собственное число $\tilde{\mu}$, обладающее свойством 1, и найдется собственный вектор с положительными компонентами, соответствующий этому числу.

Пусть $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x \ge 0, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ – симплекс в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим преобразование $f : \Sigma \longmapsto \mathbb{R}^n$, задаваемое следующим образом:

$$f_k(x) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} x_j}{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{2.36}$$

Очевидно, на Σ знаменатель положителен:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge n \min_{i,j=\overline{1,n}} a_{ij} \sum_{j=1}^{n} x_j = n \min_{i,j=\overline{1,n}} a_{ij} > 0, \tag{2.37}$$

поэтому f непрерывно. Аналогично, $f(x) > 0$. Кроме того, поскольку $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$, то f переводит Σ в себя.

Пусть μ – произвольное (возможно комплексное) собственное число матрицы A, а z – собственный вектор, соответствующий числу μ, то есть $Az = \mu z$. Тогда по неравенству треугольника получаем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} |z_j| \ge \left| \sum_{j=1}^{n} a_{kj} z_j \right| = |\mu z_k| = |\mu| |z_k|, \quad k = \overline{1, n}. \tag{2.38}$$

Рассмотрим множество $W = \{w \in \Sigma : Aw \ge |\mu| w\}$. Оно не пусто, поскольку в силу (2.38) ему принадлежит

$$w = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} |z_j|} (|z_1|, \dots, |z_n|)^T.$$

Простой проверкой можно показать, что W выпукло, а так как неравенство в определении W нестрогое, оно замкнуто. Кроме того, отображение f переводит W в себя. В самом деле, если $Aw \ge |\mu| w$, то

$$(Af(w))_k \overset{(2.36)}{=} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} w_j}{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_j} \ge \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki} |\mu| w_i}{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_j} \overset{(2.36)}{=} |\mu| f_k(w). \tag{2.39}$$

Тогда по теореме Брауэра 2.6 существует $w^* \in W$ такой , что

$$f(w^*) = w^* \quad \overset{(2.36)}{\Leftrightarrow} \quad w^* = \frac{Aw^*}{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_j^*} \quad \Leftrightarrow \quad Aw^* = \mu^* w^*, \quad \text{где} \quad \mu^* = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_j^*,$$

то есть w^* собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу μ^*. Из (2.37) и определения f следует, что $\mu^* > 0$ и $w^* > 0$. Еще заметим, что в силу определения W верно неравенство $\mu^* w^* = Aw^* \ge |\mu| w^*$, и значит $|\mu| \le \mu^*$, так как $w^* > 0$.

Таким образом, в качестве $\tilde{\mu}$ можно взять максимальное из всех μ^*.

Этап II. Докажем, что для $\tilde{\mu}$ справедливо свойство 2.

Заметим, что для A^T также справедливы рассуждения первого этапа, и, поскольку собственные числа у A и A^T совпадают, то $\tilde{\mu}$ для них одно и тоже. Пусть x и y – соответствующие собственные векторы матриц A и A^T, $x, y > 0$.

Допустим, что A имеет собственный вектор z с положительными координатами, отличный от x, и собственным числом μ. Тогда

$$\mu(y, z) = (y, \mu z) = (y, Az) = (A^T y, z) = (\tilde{\mu} y, z) = \tilde{\mu}(y, z),$$

откуда $\mu = \tilde{\mu}$, так как $(y, z) > 0$. Таким образом, для разных собственных векторов с положительными координатами собственные числа совпадают.

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $z_\varepsilon = z - \varepsilon x$, тогда $Az_\varepsilon = \tilde{\mu} z_\varepsilon$. Подберем ε так, чтобы вектор z_ε имел нулевые координаты, но при этом оставался неотрицательным. Пусть $(z_\varepsilon)_k = 0$, тогда $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}(z_\varepsilon)_j = \tilde{\mu}(z_\varepsilon)_k = 0$, но компоненты $a_{kj} > 0$ и $z_\varepsilon \geq 0$, следовательно $(z_\varepsilon)_j = 0$ для всех $j = \overline{1, n}$. Таким образом, $z = \varepsilon x$ и свойство 2 установлено. □

Замечание 2.1. *В теореме 2.9 не утверждается, что собственное подпространство, соответствующее собственному числу $\tilde{\mu}$, является одномерным.*

2.5.2 Теорема Каратеодори

Теорема 2.10. *(Каратеодори) Пусть $Q = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in (a, b)\}$, $f : Q \longmapsto \mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном $t \in (a, b)$ непрерывна по x и при любом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$ измерима по t, кроме того, существует интегрируемая по Лебегу на интервале (a, b) функция $m(t)$, такая что*

$$\|f(x, t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m(t) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad \text{почти всюду на} \quad (a, b). \tag{2.40}$$

Тогда для любой точки $(x_0, t_0) \in Q$ найдется такое $\delta > 0$, для которого существует абсолютно непрерывная функция $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \longmapsto \mathbb{R}^n$, являющаяся решением интегрального уравнения

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(x(\tau), \tau) d\tau \quad \forall\, t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \tag{2.41}$$

Замечание 2.2. *Уравнение* (2.41) *эквивалентно задаче Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, t) \quad \text{почти всюду на} \quad [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.42}$$

Замечание 2.3. *Теорема 2.10 может быть доказана глобально, то есть существует такая функция $x(t)$, для которой уравнение* (2.41) *справедливо на всем интервале (a, b) (см., например, [**?**, гл. 2, теорема 1.3]).*

Доказательство. В качестве нормы в пространстве $\mathbb{R}^n$ выберем следующую:

$$\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \max_{i=\overline{i,n}} |x_i|, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Определим абсолютно непрерывную функцию

$$M(t) \stackrel{def}{=} \int\limits_{t_0}^{t} m(\tau) d\tau.$$

Пусть $\gamma > 0$, введем в рассмотрение пространство $C([t_0-\gamma, t_0+\gamma], \mathbb{R}^n)$, состоящее из непрерывных на отрезке $[t_0-\gamma, t_0+\gamma]$ вектор-функций $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, норма в котором определена формулой

$$\|\varphi\|_{C([\ t_0-\gamma,\ t_0+\gamma],\ \mathbb{R}^n)} = \max_{t\in[t_0-\gamma, t_0+\gamma]} \|\varphi_i(t)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, рассмотрим множество $\overline{V}_{\varepsilon,\gamma} \subset C([t_0-\gamma, t_0+\gamma], \mathbb{R}^n)$, состоящее из вектор-функций $\varphi(t)$ таких, что $\|\varphi(t) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \le \varepsilon$ и $(\varphi(t), t) \in Q$ для всех $t \in [t_0-\gamma, t_0+\gamma]$. Заметим, что множество $\overline{V}_{\varepsilon,\gamma}$ выпукло.

Построим интегральный оператор A:

$$x(t) \longmapsto\ A(x)(t) \stackrel{def}{=} x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(x(\tau), \tau)d\tau$$

Лемма 2.6. *Оператор A определен и непрерывен на $\overline{V}_{\varepsilon,\gamma}$.*

Доказательство. То, что оператор A имеет смысл на $\overline{V}_{\varepsilon,\gamma}$, очевидно, докажем непрерывность.

Пусть $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi$ в норме пространства $C([t_0-\gamma, t_0+\gamma], \mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\|A(\varphi_k) - A(\varphi)\|_{C([t_0-\gamma,t_0+\gamma],\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \max_{t\in[t_0-\gamma,t_0+\gamma]} \|A(\varphi_k)(t) - A(\varphi)(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \max_{t\in[t_0-\gamma,t_0+\gamma]} \left\| \int\limits_{t_0}^{t} (f(\varphi_k(\tau), \tau) - f(\varphi(\tau), \tau))d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \le$$

$$\le \max_{t\in[t_0-\gamma,t_0+\gamma]} \int\limits_{t_0}^{t} \|f(\varphi_k(\tau), \tau) - f(\varphi(\tau), \tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau \le \int\limits_{t_0-\gamma}^{t_0+\gamma} \|f(\varphi_k(\tau), \tau) - f(\varphi(\tau), \tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau \stackrel{def}{=} \mathbb{I}_k$$

По условию теоремы

$$\|f(\varphi_k(\tau), \tau) - f(\varphi(\tau), \tau)\|_{\mathbb{R}^n} \le 2m(\tau),$$

при всех $\tau \in [t_0-\gamma, t_0+\gamma]$, кроме того,

$$\|f(\varphi_k(\tau), \tau) - f(\varphi(\tau), \tau)\|_{\mathbb{R}^n} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

так как f непрерывна по x при каждом фиксированном $\tau \in (a, b)$. В силу этого, по теореме Лебега выводим

$$\|A(\varphi_k) - A(\varphi)\|_{C([t_0-\gamma,t_0+\gamma],\mathbb{R}^n)} \le \mathbb{I}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

и значит оператор A непрерывен. □

Лемма 2.7. *Существует $\delta > 0$ такое, что оператор A отображает $\overline{V}_{\varepsilon,\delta}$ в себя.*

Доказательство. Для $\varphi \in \overline{V}_{\varepsilon,\gamma}$ имеем

$$\|A(\varphi)(t) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} = \left\| \int\limits_{t_0}^{t} f(x(\tau), \tau)d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \le \int\limits_{t_0}^{t} \|f(x(\tau), \tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau \le \int\limits_{t_0}^{t} m(\tau)d\tau = M(t).$$

Так как M абсолютно непрерывна и $M(t_0) = 0$, то найдется $\delta > 0$ такое, что $M(t) \le \varepsilon$ для любого $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$, что и требовалось доказать. □

Лемма 2.8. *Оператор $A : \overline{V}_{\varepsilon,\delta} \longmapsto \overline{V}_{\varepsilon,\delta}$ компактен.*

Доказательство. По определению $\overline{V}_{\varepsilon,\gamma}$ множество $A(\overline{V}_{\varepsilon,\delta}) \subset \overline{V}_{\varepsilon,\delta}$ равномерно ограничено на $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Выберем произвольное $\varepsilon_* > 0$. Тогда для любой $\varphi \in \overline{V}_{\varepsilon,\delta}$ справедливо

$$\|A(\varphi)(t_1) - A(\varphi)(t_2)\|_{\mathbb{R}^n} = \left\| \int\limits_{t_0}^{t_1} f(\varphi(\tau),\tau)d\tau - \int\limits_{t_0}^{t_2} f(\varphi(\tau),\tau)d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} =$$

$$= \left\| \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(\tau),\tau)d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} \|f(\varphi(\tau),\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} m(\tau)d\tau = M(t_2) - M(t_1)$$

при $t_1 < t_2$, $t_1,\ t_2 \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Так как M абсолютно непрерывна, то она равномерно непрерывна, значит найдется $\delta_* > 0$ такое, что при любых $t_1,\ t_2 \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $t_1 < t_2$, для которых $t_2 - t_1 < \delta_*$, имеет место оценка

$$\varepsilon_* > M(t_2) - M(t_1) \geq \|A(\varphi)(t_1) - A(\varphi)(t_2)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Это означает, что семейство $\overline{A(V_{\varepsilon,\delta})}$ равностепенно непрерывно на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Таким образом, по теореме Арцела-Асколи множество $\overline{A(V_{\varepsilon,\delta})}$ предкомпактно, а так как оно еще и замкнуто, то компактно. Значит оператор $A : \overline{V}_{\varepsilon,\delta} \longmapsto \overline{V}_{\varepsilon,\delta}$ компактен. $\square$

Для оператора A и множества $\overline{V}_{\varepsilon,\delta}$ выполняются все условия теоремы Шаудера **??**, поэтому A имеет неподвижную точку в $\overline{V}_{\varepsilon,\delta}$, то есть уравнение (2.41) имеет решение. Теорема доказана. $\square$

Содержание

Список литературы

[1] Toland J. F. Bifurcation Theory, University of Bath, The United Kingdom, Lecture Notes, 1992.

[2] Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения, М.: Мир, 1983.

[3] Ковригин А. Б. Математический анализ динамических систем, учебное пособие, Ленинград: Издательство ЛГУ, 1980.

[4] Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М.: Издательство иностранной литературы, 1958.

[5] Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М.: Мир, 1972.