«Прикладной функциональный анализ»

Лектор: к.ф.-м.н. доцент Сергей Александрович Саженков

1. Организационно-методический раздел.

Курс «Прикладной функциональный анализ» реализуется в рамках специальности «Дискретная математика и информатика» и соответствует разделу «Общие математические и естественнонаучные дисциплины», относится к вузовской тематике.

Цели и задачи курса.

Семестровый курс лекций «Прикладной функциональный анализ» предназначен для студентов 1-го потока 4-го курса механико-математического факультета. Основной целью курса является изучение продвинутых, по отношению к базовому курсу, вопросов функционального анализа, имеющих приложения в дискретных и распределенных математических моделях, относящихся к области экономики, механики сплошной среды, теоретической физики. Для достижения поставленной цели выделяются три основные задачи курса:

羊 изучение теорем о неподвижных точках Брауэра и Шаудера и их приложений;

羊 изложение метода монотонности для полунепрерывных коэрцитивных операторов, с примерами последующих приложений;

羊 изучение основ гладкого анализа в банаховых пространствах, имеющих приложения в экономике, механике сплошных сред, теории машин и механизмов.

Требования к уровню освоения содержания курса.

По окончании изучения указанной дисциплины студент должен

羊 **знать** формулировки и основные этапы доказательства ключевых теорем курса**,**

羊 **иметь представление** о приложениях ключевых теорем, быть способным привести конкретные примеры.

Формы контроля

Итоговый контроль. Для контроля усвоения курса учебным планом в 8 семестре предусмотрен экзамен по окончании курса.

2. Содержание дисциплины.

Новизна курса. Первый раздел курса имеет следующую новизну: традиционно доказательство теоремы Брауэра о неподвижных точках проводится по Милнору (см., например, монографию Обэна и Экланда, монографию Эдвардса), а в настоящем курсе мы проводим более простое доказательство, проведенное Дж. Ф. Толандом в 1982 г. и заслужившее признание специалистов по функциональному анализу. Второй и третий раздел, в целом, следуют традиционному изложению.

Тематический план курса (распределение часов).

Наименование разделов и тем	Количество часов				
	Лекции	Семинары	Лабораторные работы	Самостоятельная работа	Всего часов
1. Введение	1	-	-	-	2
2. Теоремы о неподвижных точках	5	-	-	-	10

3. Приложения теорем о неподвижных точках	2	-	-	-	2
4. Метод монотонности, приложение метода	4	-	-	-	8
5. Гладкий анализ	4	-	-	-	8
Итого по курсу	16	-	-	-	32

Содержание отдельных разделов и тем.
Введение (повторение необходимых основ функционального анализа, без доказательств).
Определения и основные свойства нормированных пространств, компактных множеств, понятия сильной и слабой сходимостей, теорема Алаоглу, теорема Хана — Банаха в аналитической форме и ее следствия.

2.3.2. Теоремы о неподвижных точках.
Предисловие: понятие неподвижной точки, примеры элементарных теорем о неподвижных точках.
2.3.2.1. Предварительные сведения: определители матриц и якобианы дифференцируемых отображений, лемма о дивергенции.
2.3.2.2. Теорема Брауэра: лемма о несуществовании (дифференцируемой) ретракции, теорема Брауэра в слабой форме, теоремы Брауэра для множеств, гомеоморфных замкнутому единичному шару и для множеств, гомеоморфных компактным выпуклым множествам, принцип несуществования ретракции.
2.3.2.3. Теорема Шаудера: нелинейный проектор Шаудера, теоремы Шаудера и Тихонова—Шаудера.
2.3.2.4. Два приложения теорем Брауэра и Шаудера: теорема о матрице с положительными компонентами — наличие одномерного собственного подпространства, в котором есть вектор с положительными компонентами; теорема Каратеодори.
2.3.3. Метод монотонности.
2.3.3.1. Монотонные полунепрерывные коэрцитивные операторы. Метод Галеркина, лемма об остром угле. Теорема о разрешимости операторного уравнения с монотонным полунепрерывным коэрцитивным оператором.
2.3.3.2. Теорема единственности операторного уравнения с монотонным полунепрерывным коэрцитивным оператором.
2.3.3.3. Приложение метода монотонности: задача Дирихле для уравнения с p-лапласианом.
2.3.4. Гладкий анализ.
2.3.4.1. Производные в банаховых пространствах по Гато и по Фреше: определения и связь между производными, примеры производных.
2.3.4.2. Теорема Лагранжа о конечных приращениях в банаховых пространствах.
2.3.4.3. Частные производные, теорема о неявной функции, дифференцируемость неявной функции: теорема о ранге.

3. Учебно-методическое обеспечение курса.

3.2. **Темы рефератов (курсовых работ) –** не предусмотрено учебным планом.

3.3. **Образцы вопросов для подготовки к экзамену.**

1. Теорема Брауэра в слабой форме.
2. Принцип несуществования ретракции.
3. Лемма об остром угле.
4. Теорема о ранге.

3.4. Список основной и дополнительной литературы.

Основная литература:

1. J. F. Toland, Bifurcation Theory, University of Bath, The United Kingdom, Lecture Notes, 1992.
2. Ж. Л. Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М.: Мир, 1972.
3. Ж.. Дьедонне, Основы современного анализа, М.: Мир, 1964.

Дополнительная литература:

1. А. Б. Ковригин, Математический анализ динамических систем, учебное пособие, Ленинград: издательство ЛГУ, 1980.
2. В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров, Сборник задач по оптимизации, Физматлит, 2005.

3.5. Изучение дисциплины не предусматривает использование **нормативно-правовых актов**.