Е.М. РУДОЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: МЕРА ЖОРДАНА. КРАТНЫЙ ИНТЕГРАЛ

(теория, примеры, упражнения)

2009

Предисловие

Учебное пособие состоит из четырех глав, отражающих основные теоретические и практические аспекты университетского курса математического анализа, читаемого во втором семестре второго курса для студентов математического факультета Новосибирского государственного педагогического университета, обучающихся по специальности «информатика-математика».

Большинство задач, включенных в пособие, содержится в качестве упражнений и примеров в различных изданиях (см. список литературы). Часть примеров составлена специально для настоящего издания.

Нумерация упражнений сквозная и не зависит от номера главы и параграфа. Сложные задачи помечены звездочкой.

При составлении упражнений автор попытался собрать задачи, соответствующие теоретическому курсу.

1. Мера Жордана.

Ранее мы изучили понятие определенного интеграл для функций одной переменной. При интегрировании мы имели дело только с отрезками, длины которых определяется элементарно (как разность между концом и началом отрезка).

Одним из основных приложений определенного интеграла является измерение площадей плоских фигур. Причем, давая точное определение понятия «площади», мы использовали многоугольники как элементарные (простейшие) фигуры. Затем основные свойства их площадей перенесли на квадрируемые фигуры (неотрицательность площади, конечная аддитивность, монотонность).

Во второй главе мы введем понятие кратного интеграла – интеграла для функций n-переменных. Для этого нам надо дать точное определение меры множества в $\mathbb{R}^n$. При этом в случае $n = 2$ мера должна совпадать с площадью фигуры.

1.1 Сеть в $\mathbb{R}^n$. Кубы и элементарные множества.

Определение. Множество вида

$$\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1, \dots, n\},$$

где a_i, b_i – заданные числа, $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$, называется n-мерным брусом в пространстве $\mathbb{R}^n$.

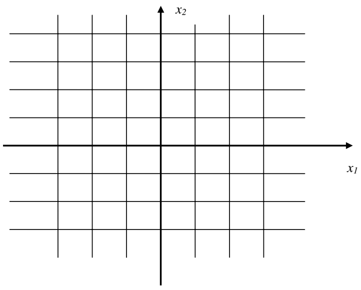
Если $b_i - a_i = b_j - a_j$ для всех $i, j = 1, \dots, n$, то брус называется n-мерным кубом.

Определение. Пусть k – натуральное число; разобьем каждую координатную ось на отрезки точками $x_i = m \cdot 10^{-k}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Таким образом, все пространство $\mathbb{R}^n$ «разобьется» на кубы вида

$$Q = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ \middle|\ \frac{m}{10^k} \le x_i \le \frac{m+1}{10^k},\ i = 1, \dots, n \right\}.$$

В этом случае будем говорить, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ построена сеть порядка k, а кубы Q, входящие в эту сеть, будем называть кубами порядка k.

Отметим, что в одномерном случае (при $n = 1$) кубы Q являются отрезками, в двумерном (при $n = 2$) — квадратами, в трехмерном (при $n = 3$) — обычными трехмерными кубами.



Сеть в пространстве $\mathbb{R}^2$

Перечислим основные свойства сети, непосредственно следующие из определения.

1. Различные кубы одного порядка не имеют общих внутренних точек. В пересечение двух кубов одного порядка могут входить только их граничные точки.

2. Куб порядка k состоит из 10^n кубов порядка $k+1$.

3. Если G – ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, то для любого натурального k существует конечное число кубов порядка k, объединение которых содержит G.

Определение. Любой конечный набор попарно различных кубов одного порядка называется элементарным множеством.

Замечание. В силу свойства 2 сети понятие элементарного множества не зависит от порядка k. Кроме того, объединение и пересечение конечного числа элементарных множеств есть элементарное множество.

1.2 Мера элементарных множеств.

По аналогии с формулой для длины ($n = 1$), площади ($n = 2$) и объема ($n = 3$) определим меру n-мерного куба.

Определение. Пусть Q – куб порядка k. Число

$$\mu Q = 10^{-nk} \tag{1}$$

называется его мерой.

Определение. Пусть S – элементарное множество, т.е.

$$S = \bigcup_i Q_i,$$

где Q_i попарно различные кубы порядка k. Меру μS элементарного множества S определим по формуле

$$\mu S = \sum_i \mu Q_i.$$

Меру пустого множества будем считать равной нулю, т.е.

$$\mu \emptyset = 0.$$

Непосредственно из определения меры элементарных множеств получаем следующие свойства:

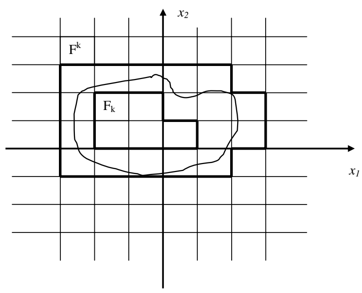
1. *Неотрицательность меры*: $\mu S \geq 0$ для любого элементарного множества S. Причем $\mu S = 0$ тогда и только тогда, когда $S = \emptyset$.

2. *Полуаддитивность меры*: $\mu(P \cup S) \leq \mu P + \mu S$ для любых элементарных множеств P и S. Причем, если P и S не имеют общих кубов, то $\mu(P \cup S) = \mu P + \mu S$

3. *Монотонность меры*: Если $P \subset S$, то $\mu P \leq \mu Q$.

1.3 Мера Жордана произвольного ограниченного множества.

Пусть F – ограниченное множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Выберем натуральное k. Обозначим через F_k множество всех тех кубов порядка k, которые целиком содержатся в F, а через F^k – множество всех тех кубов порядка k, имеющих непустое пересечение с F.



Справедливость следующих включений очевидна:

$$F_k \subset F \subset F^k. \tag{2}$$

Отметим, что множества F_k и F^k могут быть пустыми. Например, если множество F есть точка в пространстве $\mathbb{R}^n$, то не существует ни одного куба, содержащегося в F. Случай же пустого F^k возможен, когда $F = \emptyset$.

Кроме того, в силу монотонности меры элементарных множеств из (2) следует, что

$$\mu F_k \le \mu F^k. \tag{3}$$

Ясно, что при увеличении k множества F_k возрастают, а F^k убывают, т.е. справедливы включения

$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_k \ldots \subset F \subset \ldots \subset F^k \subset \ldots \subset F^1. \tag{4}$$

Тем самым, мы имеем две неотрицательные монотонные числовые последовательности мер множеств F_k и F^k, одна из которых $\{\mu F_k\}$ — возрастающая, другая $\{\mu F^k\}$ — убывающая, такие, что

$$\begin{gathered} 0 \le \mu F_1 \le \mu F_2 \le \ldots \le \mu F_k \ldots \le \\ \le \ldots \le \mu F^k \le \ldots \le \mu F^2 \le \mu F^1. \end{gathered} \tag{5}$$

Из (5) следует, что последовательность $\{\mu F_k\}$ ограничена сверху, а $\{\mu F^k\}$ – снизу. Поэтому для любого ограниченного множества F существуют конечные пределы

$$\mu_* F = \lim_{k\to\infty} \mu F_k, \quad \mu^* F = \lim_{k\to\infty} \mu F^k.$$

Определение. Числа $\mu_* F$ и $\mu^* F$ называются внутренней и внешней мерами множества F соответственно.

Определение. Если $\mu_* F = \mu^* F$, то говорят, что множество F измеримо по Жордану. Общее значение его внешней и внутренней мер называется n-мерной мерой Жордана и обозначается μF, т.е.

$$\mu F = \mu_* F = \mu^* F.$$

В дальнейшем для краткости будем, как правило, выражение «по Жордану» опускать. Например, вместо «измеримое по Жордану множество» будем говорить «измеримое множество» и т.п.

Перечислим свойства меры, непосредственно следующие из определения:

1. Мера элементарного множества совпадает с введенной ранее мерой.

2. Если $\mu^* F = 0$, то множество F измеримо и $\mu F = 0$.

3. Мера $\mu\Pi$ произвольного бруса

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

равна произведению длин его сторон, т.е.

$$\mu\Pi = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

4. Мера μA любого измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ неотрицательна, т.е.

$$\mu A \geq 0.$$

Оказывается, что не всякое ограниченное множество является измеримым. Действительно, в пространстве $\mathbb{R}^1$ рассмотрим множество Q_0 рациональных точек на отрезке $[0, 1]$. Для любого натурального k ни один куб порядка k не содержится в Q_0. Следовательно, внутренняя мера $\mu_* Q_0$ равна нулю. С другой стороны, т.к. Q_0 плотно в $[0, 1]$, то внешняя мера $\mu^* Q_0$ равна 1.

Пример. Доказать, что куб Q ранга k_0 в пространстве $\mathbb{R}^n$ измерим по Жордану и его мера Жордана совпадает с введенной в (1) мерой, т.е. равна $10^{-k_0 n}$.

Решение. Рассмотрим сеть ранга k. Если $k < k_0$, то никакой куб ранга k не содержится в Q. Поэтому, множество F_k тех кубов ранга k, которые лежат в Q пустое, т.е. $F_k = \emptyset$ и, следовательно, $\mu F_k = 0$. Если $k = k_0$, то $F_{k_0} = Q$ и $\mu F_{k_0} = 10^{-k_0 n}$. Далее, если $k > k_0$, то опять получаем, что $F_k = Q$ и $\mu F_k = 10^{-k_0 n}$. Поэтому внутренняя мера куба Q равна

$$\mu_* Q = \lim_{k \to \infty} \mu F_k = 10^{-k_0 n}.$$

Вычислим теперь внешнюю меру куба Q. Данный куб Q по определению есть множеству

$$Q = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \;\middle|\; \frac{m_i}{10^{k_0}} \leq x_i \leq \frac{m_i + 1}{10^{k_0}},\ i = 1, \ldots, n \right\},$$

где m_i – некоторые целые числа, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $k > k_0$. Рассмотрим объединение F^k всех кубов ранга k, имеющих хотя бы одну общую точку с Q. Очевидно, что

$$F^k = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \;\middle|\; \frac{m_i}{10^{k_0}} - \frac{1}{10^k} \le x_i \le \frac{m_i + 1}{10^{k_0}} + \frac{1}{10^k},\; i = 1, \ldots, n \right\}$$

– куб с ребром длины

$$\frac{1}{10_0^k} + 2\frac{1}{10^k},$$

который содержит $(10^{k-k_0} + 2)^n$ кубов ранга k. Поэтому

$$\mu F^k = (10^{k-k_0} + 2)^n \cdot 10^{-kn} = 10^{-k_0 n}\Big(1 + \frac{2}{10^{k-k_0}}\Big)^n$$

и, следовательно,

$$\mu^* Q = \lim_{k\to\infty} \mu F^k = 10^{-k_0 n}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что отбрасывание конечного числа членов числовой последовательности не влияет на ее предел. Поэтому мы не вычисляли меру F^k при $k \le k_0$.

Таким образом, мы показали, что внешняя и внутренняя меры множества Q совпадают. Следовательно, куб Q измерим и его мера равна $10^{-k_0 n}$, что совпадает с определением (1) меры куба.

Пример. Доказать, пользуясь определением меры Жордана, измеримость отрезка $F = [a, b] \subset \mathbb{R}^1$, $a < b$, и найти его меру.

Решение. Для определенности будем считать, что $a > 0$. Представим числа a и b в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_k \ldots,$$

$$b = b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_k \ldots .$$

При этом справедливы неравенства

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_k \le a \le a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_k + \frac{1}{10^k},$$

$$b_0, b_1 b_2 b_3 \dots b_k \le b \le b_0, b_1 b_2 b_3 \dots b_k + \frac{1}{10^k}.$$

Выберем натуральное k. Пусть F_k множество всех тех отрезков (кубы в одномерном случае) порядка k, которые целиком содержатся в отрезке $[a, b]$, а F^k – множество всех тех отрезков порядка k, имеющих непустое пересечение с $[a, b]$. Очевидно, что справедливы следующие неравенства

$$b_0, b_1 \dots b_k - a_0, a_1 \dots a_k - \frac{2}{10^k} \le \mu F_k \le$$

$$\le \mu F^k \le b_0, b_1 \dots b_k - a_0, a_1 \dots a_k + \frac{2}{10^k}.$$

Устремляя k к бесконечности, получаем, что

$$b - a \le \mu_* F \le \mu^* F \le b - a.$$

Откуда следует измеримость отрезка $[a, b]$. При этом его мера $\mu[a, b]$ равна $b - a$.

Задачи.

1. Доказать, что открытый куб Q порядка k в пространстве $\mathbb{R}^n$ является измеримым по Жордану множеством и его мера равна мере замкнутого куба ранга k, то есть $\mu Q = 10^{-kn}$.

2. Найти меру следующих множеств в пространстве $\mathbb{R}^1$:

а) $A = \{1\}$,

б) $X = \{1, 2, \dots, n\}$,

в) $Y = \{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,

г)* $Z = \{\frac{m}{2^n} \mid 1 \le m \le 2^n - 1,\ k = 1, 2, 3, \dots\}$.

3. Доказать, что конечное число точек в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет меру нуль.

4. Доказать, пользуясь определением меры Жордана, измеримость следующих множеств и найти их меру:

а) интервал (a, b) в $\mathbb{R}$;

б) замкнутый прямоугольник $\Pi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1, 2\}$ в $\mathbb{R}^2$;

в) открытый прямоугольник $\Pi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2\}$ в $\mathbb{R}^2$.

5*. Указать неограниченное множество с конечной внутренней мерой.

6*. Доказать, что

а) множество с положительной внутренней мерой имеет внутренние точки;

б) мера измеримого по Жордану множества, не имеющего внутренних точек, равна нулю.

7. Пусть $X_1 \subset X_2 \subset \mathbb{R}^n$. Доказать, что

$$\mu_*(X_1) \leq \mu_*(X_2), \quad \mu^*(X_1) \leq \mu^*(X_2).$$

8. Доказать, что если $\mu^*(X) = 0$, то множество X измеримо и его мера равна нулю.

9. Пусть множество M измеримо и $B \subset M$. Следует ли, что B – измеримое множество?

10. Пусть множество M – измеримо и его мера равна нулю. Может ли множество M содержать внутренние точки?

11. Пусть множество M – измеримо и его мера равна нулю. Измеримо ли замыкание $\overline{M}$ множества M?

12. Пусть замыкание $\overline{M}$ множества M измеримо. Измеримо ли множество M?

13. Привести пример неизмеримого по Жордану множества в $\mathbb{R}^2$.

14. Пусть $X = \{(x, y) \mid x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q},\ y = 0\}$. Измеримо ли множество X в $\mathbb{R}^2$? Если – да, то найти его меру.

15. Пусть множество A измеримо в $\mathbb{R}^n$. Измеримы ли проекции A на оси координат в $\mathbb{R}^1$?

16*. Пусть последовательность $\{x^k\}$ сходится в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что множество $\{x^k \in \mathbb{R}^n \mid k = 1, 2, 3 \ldots,\}$ измеримо. Найти его меру.

1.4 Критерий измеримости. Цилиндрические множества.

Сформулируем критерий измеримости множества по Жордану в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Теорема. Множество измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда мера его границы равна нулю.

Используя эту теорему можно легко доказать, что множество Q_0 рациональных точек на отрезке $[0,1]$ в пространстве $\mathbb{R}^1$ неизмеримо. Действительно, границей множества Q_0 является весь отрезок $[0,1]$, мера которого равна единице.

Определение. Пусть в $\mathbb{R}^{n-1}$ задана область Ω. Пусть в области Ω определены две непрерывные функции $\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$, $\psi(x_1,\dots,x_{n-1})$ такие, что $\varphi(x_1,\dots,x_{n-1}) \le \psi(x_1,\dots,x_{n-1})$ для всех $(x_1,\dots,x_{n-1}) \in \Omega$. Цилиндрическим множеством с основанием Ω называется множество

$$C = \{x = (x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1,\dots,x_{n-1}) \in \Omega,$$

$$\varphi(x_1,\dots,x_{n-1}) \le x_n \le \psi(x_1,\dots,x_{n-1})\}\,.$$

Теорема. Пусть функция $f(x_1,\dots,x_{n-1})$ непрерывна на измеримом, ограниченном и замкнутом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Тогда множество

$$\operatorname{epi} f = \{x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid$$

$$(x_1,\dots,x_{n-1}) \in \Omega,\ x_n = f(x_1,\dots,x_{n-1})\}$$

измеримо в $\mathbb{R}^n$ и его мера равна нулю.

Определение. Множество $\operatorname{epi} f \subset \mathbb{R}^n$ называется графиком функции $f(x_1,\dots,x_{n-1})$, $(x_1,\dots,x_{n-1}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

Теорема. Если множество Ω – ограничено, замкнуто и измеримо в $\mathbb{R}^{n-1}$, функции $\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$ и $\psi(x_1,\dots,x_{n-1})$ – непрерывны в Ω, то цилиндрическое множество C с основанием Ω измеримо в $\mathbb{R}^n$.

Задачи.

17. Доказать, что для любых множеств A, $B \subset \mathbb{R}^n$ справедливы следующие включения:

а) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$,

б) $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$,

в) $\partial(A \backslash B) \subset \partial A \cup \partial B$,

где ∂X — граница множества X.

18. Пусть мера множеств A и B равна нулю. Доказать, что множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ — измеримы и $\mu(A \cup B) = 0$, $\mu(A \cap B) = 0$, $\mu(A \backslash B) = 0$.

19. Пусть $A \cup B$ и $A \cap B$ — измеримые множества. Верно ли, что A и B — измеримы?

20. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ – измеримо, $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ – постоянный вектор. Определим множество $X + \overrightarrow{a} = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \mid y_i = x_i + a_i,\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in X,\ i = 1, \ldots, n\}$. Доказать, что множество $X + \overrightarrow{a}$ – измеримо и его мера равна мере множества X.

21*. Доказать, что на числовой прямой существует ограниченное открытое неизмеримое по Жордану множество.

22. Привести пример несчетного неизмеримого по Жордану множества, замыкание которого измеримо по Жордану.

23*. Доказать, что множество всех внутренних точек измеримого по Жордану множества, измеримо.

24. Будут ли цилиндрическими следующие множества:

$$\text{а) } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\text{б) } \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$\text{в) } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\text{г) } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q},\ y \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\text{д) } \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$\text{е) } \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3?$$

25. Измеримы ли множества из предыдущей задачи в соответствующих пространствах?

1.5 Основные свойства меры Жордана.

Свойства полуаддитивности, аддитивности и монотонности меры Жордана для элементарных множеств непосредственно следовали из определения их меры. Эти же свойства справедливы и для любых измеримых по Жордану множеств.

Теорема. Пусть множества A и B измеримы. Тогда множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ измеримы.

Теорема. Пусть множества A и B измеримы. Тогда имеет место неравенство

$$\mu(A \cup B) \leq \mu A + \mu B \quad \text{(полуаддитивность меры).}$$

Следствие. Пусть множества A_i – измеримы, $i = 1, \ldots k$. Тогда имеет место неравенство

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{k} \mu A_i.$$

Теорема. Пусть множества A и B измеримы и не имеют общих внутренних точек. Тогда имеет место равенство

$$\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B \quad \text{(аддитивность меры).}$$

Теорема. Пусть множества A и B измеримы и $A \subset B$. Тогда имеет место неравенство

$$\mu A \leq \mu B \quad \text{(монотонность меры).}$$

Задачи.

26. Привести пример двух множеств таких, что $A \subset B$, $A \neq B$, но в тоже время $\mu A = \mu B$.

27*. Пусть множества A и B измеримы. Доказать, что

$$\text{а)} \;\; \mu(A \cup B) = \mu(A \backslash B) + \mu(B \backslash A) + \mu(A \cap B);$$
$$\text{б)} \;\; \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

28. Пусть A_k – измеримые по Жордану множества меру нуль, $k = 1, \ldots, p$, и пусть

$$A = \bigcup_{k=1}^{p} A_k.$$

Доказать, что $\mu A = 0$.

29. Пусть A_k – измеримые по Жордану множества меру нуль, $k \in \mathbb{N}$, и пусть

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

– измеримое по Жордану множество. Доказать, что $\mu A = 0$.

30*. Привести пример таких измеримых множеств A_k, $k \in \mathbb{N}$, мера μA_k которых равна нулю, но в тоже время

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

– неизмеримое множество.

2. Кратные интегралы.

Ранее мы рассмотрели физические и геометрические задачи, приводящие к понятию определенного интеграла для функции одной переменной. Типичной задачей такого рода является задача о вычислении площади криволинейной трапеции.

Легко указать аналогичные «многомерные» задачи, приводящие к понятию двойного, тройного или n-кратного интегралов. Например, вычисление массы неоднородного тела T по известной объемной плотности $\rho(x)$. Для этого разобьем тело на малые участки T_i, $i = 1, \ldots, k$. Приближенно будем считать объемную плотность $\rho(x)$ каждого участка T_i постоянной и равной $\rho(x_i)$, где x_i – некоторая точка, принадлежащая T_i. Тогда приближенная масса тела будет задаваться формулой

$$\sum_{i=1}^{k} \rho(x_i)|T_i|,$$

где $|T_i|$ – объем участка T_i.

Точное значение массы тела естественно определить как предел указанной суммы при неограниченном уменьшении каждого участка T_i.

Этот предел и будет взят за определение тройного интеграла от функции $\rho(x)$ по трехмерной области T. Конечно, для этого следует уточнить термины «разбиение тела», «неограниченное уменьшение» и пр.

2.1 Разбиение измеримых множеств.

Пусть Ω – измеримое по Жордану множество в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Конечная система $\tau = \{\Omega_i\}_{i=1}^{k_\tau}$ измеримых множеств Ω_i, $i = 1, \ldots, k_\tau$, называется разбиением множества Ω, если:

1. $\mu(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0$ для любых $i \neq j$;

2. $\bigcup_{i=1}^{k_\tau} \Omega_i = \Omega$.

Замечание. Отметим, что множества Ω_i разбиения τ могут попарно пересекаться. Главное, чтобы мера такого пересечения равнялась нулю.

Определение. Число

$$\operatorname{diam} \Omega = \sup_{x,y \in \Omega} \rho(x, y)$$

называется диаметром множества Ω.

Определение. Число

$$|\tau| = \max_{i=1,\ldots,k_\tau} \{\operatorname{diam} \Omega_i\},$$

где $\operatorname{diam} \Omega_i$ – диаметр множества Ω_i, назовем мелкостью разбиения τ.

Определение. Пусть дано два разбиения $\tau_1 = \{\Omega_j^1\}_{j=1}^{k_{\tau_1}}$ и $\tau_2 = \{\Omega_i^2\}_{i=1}^{l_{\tau_2}}$ множества Ω, и для каждого $\Omega_i^2 \in \tau_2$ существует такое $\Omega_j^1 \in \tau_1$, что $\Omega_i^2 \subset \Omega_j^1$. В этом случае будем говорить, что разбиение τ_2 вписано в разбиение τ, и писать $\tau_2 \succ \tau_1$.

Перечислим основные свойства разбиений множеств:

1. Если $\tau_1 \prec \tau_2$ и $\tau_2 \prec \tau_3$, то $\tau_1 \prec \tau_3$ (транзитивность).

2. Для любых двух разбиений τ_1 и τ_2 множества Ω существует такое его разбиение τ, что

$$\tau \succ \tau_1, \quad \tau \succ \tau_2 \quad \text{(финальность).}$$

Лемма. Пусть $\tau = \{\Omega_i\}_{i=1}^{k_\tau}$ – разбиение множества Ω. Тогда справедливо равенство

$$\mu\Omega = \sum_{i=1}^{k_\tau} \mu\Omega_i.$$

Лемма. Для любого измеримого множества Ω и для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение τ множества Ω такое, что мелкость $|\tau| < \varepsilon$.

2.2 Интегральные суммы. Определение кратного интеграла.

Пусть на измеримом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ задана функция $y = f(x)$, $x \in \Omega$. Пусть $\tau = \{\Omega_i\}_{i=1}^{k_\tau}$ – разбиение множества Ω. Пусть ξ^i – произвольная точка множества Ω_i, $i = 1, \ldots, k_\tau$.

Определение. Число

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f) = \sigma_\tau(f; \xi^1, \ldots, \xi^{k_\tau}) = \sum_{i=1}^{k_\tau} f(\xi^i)\mu\Omega_i$$

называется интегральной суммой Римана функции $f(x)$, соответствующей разбиению τ.

Определение. Функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману на множестве Ω, если один и тот же предел имеет любая последовательность интегральных сумм

$$\sigma_{\tau_m} = \sum_{i=1}^{k_{\tau_m}} f(\xi^{i,m})\mu\Omega_i^m,$$

соответствующих разбиениям $\tau_m = \{\Omega_i^m\}_{i=1}^{k_{\tau_m}}$ множества Ω, у которых их мелкость $|\tau_m|$ стремится к нулю при $m \to \infty$, а точки $\xi^{i,m}$ выбраны произвольным образом из множеств Ω_i^m, $i = 1, \ldots, k_{\tau_m}$, $m = 1, 2, \ldots$

Если этот предел существует, то он называется интегралом Римана от функции $f(x)$ по множеству Ω и обозначается

$$\int\limits_\Omega f(x)\,dx \quad \text{или} \quad \int\limits_\Omega \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \sigma_{\tau_m}(f; \xi^{1,m}, \ldots, \xi^{k_{\tau_m},m}).$$

Последнее равносильно тому, что существует число, обозначаемое $\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx$, которое удовлетворяет следующему условию: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\tau = \{\Omega_i\}_{i=1}^{k_\tau}$ множество Ω мелкости $|\tau|$ и при любом выборе точек $\xi^i \in \Omega_i$, $i = 1, \ldots, k_\tau$, имеет место неравенство

$$\Big| \int\limits_{\Omega} f(x)dx - \sigma_\tau(f; \xi^1, \ldots, \xi^{k_\tau}) \Big| < \varepsilon.$$

Кратко это можно записать в виде:

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx = \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau(f; \xi^1, \ldots, \xi^{k_\tau}).$$

Определение. Множество Ω, по которому производится интегрирование, называется областью интегрирования.

Если $n > 1$, то интеграл $\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx$ называется кратным интегралом. В случае $n = 2$ он называется двойным, в случае $n = 3$ – тройным, а в случае произвольного натурального n — n-кратным.

Пример. Пусть Ω – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$; пусть $f(x) = 1$ для всех $x \in \Omega$. Вычислим интеграл от функции $f(x)$ по области Ω. Для этого рассмотрим произвольное разбиение $\tau = \{\Omega_i\}_{i=1}^{k_\tau}$ области Ω и составим для него интегральную сумму

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k_\tau} f(\xi^i)\mu\Omega_i,$$

где ξ^i произвольная точка, принадлежащая Ω_i, $i = 1, \ldots, k_\tau$. Учитывая, что $f(\xi^i) = 1$ для всех $i = 1, \ldots, k_\tau$, и свойство разбиений, получаем

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k_\tau} \mu\Omega_i = \mu\Omega.$$

Таким образом, имеем

$$\int\limits_\Omega 1\, dx = \mu\Omega.$$

Замечание. Пусть Ω – множество меры нуль в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Тогда любая функция $f(x)$, определенная на Ω, интегрируема на нем и

$$\int\limits_\Omega f(x)\, dx = 0.$$

В частности, функция $f(x)$ может быть и не ограничена на Ω. Отметим, что в случае функции одной переменной интегрируемая по Риману функция должна быть ограничена.

Замечание. Можно показать, что в случае $n = 1$ и $\Omega = [a, b]$ – отрезок на числовой прямой $\mathbb{R}$ определения определенного интеграла, изученного ранее (когда рассматриваются интегральные суммы, соответствующие только разбиению отрезка на частичные отрезки) и в смысле определения разбиения множества, данного в этом параграфе, равносильны, т.е. приводят к одному и тому же понятию интеграла.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}}\!\!\int xy\, dxy,$$

рассматривая его как предел интегральной суммы, разбивая область интегрирования на квадраты прямыми

$$x = \frac{i}{n},\ y = \frac{j}{n},\ i, j = 0, \ldots, n.$$

Задачи.

31. Вычислить диаметр следующих множеств:

$$\text{а) } \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$\text{б) } \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

$$\text{в) } \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\},$$

г) Ω – треугольник с вершинами $O(0{,}0)$, $A(1{,}0)$, $B(0{,}1)$,

$$\text{д) } \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ y = 0\},$$

$$\text{е) } \Omega = \{(0,0),\ (1,1),\ (2,0)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

32. Вычислить диаметр n-мерного куба в пространстве $\mathbb{R}^n$.

33. Пусть $f(x) = C$, где C – $const$, $x \in \Omega$, Ω – измеримое в $\mathbb{R}^n$ множество. Вычислить

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx.$$

34. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\substack{1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 3}} \int (x^2 + y^2)\,dxy,$$

рассматривая его как предел интегральной суммы, разбивая область интегрирования на квадраты прямыми

$$x = 1 + \frac{i}{n},\ y = 1 + \frac{2j}{n},\ i,j = 0,\ldots,n.$$

35. Привести пример непрерывной, не равной тождественно нулю функции $f(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, такой, что

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx = 0.$$

36*. Пусть функция $f(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, – непрерывна и неотрицательна на Ω, $\mu\Omega > 0$, и пусть

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx = 0.$$

Доказать, что $f(x) = 0$ на Ω.

37*. Привести пример неограниченной на измеримом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, функции $f(x)$ такой, что интеграл

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx$$

существует.

2.3 Верхние и нижние суммы Дарбу. Критерий интегрируемости.

По аналогии со случаем интеграла от функции одной переменной введем понятия верхних и нижних сумм Дарбу, соответствующих данному разбиению τ множества.

Определение. Пусть функция $f(x)$ ограничена на измеримом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; $\tau = \{\Omega_i\}_{i=1}^{k_\tau}$ – разбиение множества Ω,

$$m_i = \inf_{x \in \Omega_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in \Omega_i} f(x), \quad i = 1, 2, \ldots, k_\tau.$$

Тогда суммы

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k_\tau} m_i\, \mu\Omega_i, \quad S_\tau = \sum_{i=1}^{k_\tau} M_i\, \mu\Omega_i$$

называются нижней и верхней суммами Дарбу для данного разбиения τ области Ω.

Для сумм Дарбу s_τ, S_τ и интегральной суммы σ_τ справедливы очевидные неравенства

$$s_\tau \leq \sigma_\tau \leq S_\tau.$$

Кроме того, аналогично одномерному случаю можно доказать, что для любых двух разбиений τ_1 и τ_2 множества Ω выполняется неравенство $s_{\tau_1} \leq S_{\tau_2}$.

При заданной на множестве Ω функции $f(x)$ суммы s_τ и S_τ являются функциями разбиений τ множества Ω. Поэтому для них определим понятия пределов

$$\lim_{|\tau|\to 0} s_\tau, \quad \lim_{|\tau|\to 0} S_\tau.$$

Определение. Пусть задана функция $F(\tau)$, определенная на множестве всех разбиений τ измеримого множества Ω. Будем говорить, что число a является пределом функции $F(\tau)$ при $|\tau| \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех разбиений τ, мелкость которых $|\tau| < \delta$, имеет место

$$|F(\tau) - a| < \varepsilon.$$

Теорема. Пусть функция $f(x)$ – ограничена на измеримом множестве Ω. Функция $f(x)$ интегрируема по Риману на множестве Ω тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|\tau|\to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0.$$

При выполнении этого условия имеют место равенства

$$\lim_{|\tau|\to 0} s_\tau = \lim_{|\tau|\to 0} S_\tau = \int\limits_\Omega f(x)dx.$$

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Число

$$\omega(f;\Omega) = \sup_{x',x''}(f(x') - f(x''))$$

называется колебанием функции $f(x)$ на множестве Ω.

Используя это определение, последнюю теорему можно переформулировать в эквивалентном виде.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ – ограничена на измеримом множестве Ω. Функция $f(x)$ интегрируема по Риману на множестве Ω тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|\tau|\to 0}\sum_{i=1}^{k_\tau}\omega(f;\Omega_i)\,\mu\Omega_i = 0.$$

Сформулируем еще один критерий интегрируемости – критерий Дарбу.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ ограничена на измеримом множестве Ω, тогда $f(x)$ интегрируема на Ω тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение τ множества Ω такое, что

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

Кратко последнее утверждение можно записать так:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\tau:\ S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

Отметим, что все эти утверждения доказываются аналогично одномерному случаю.

Одним из важнейших классов интегрируемых функций являются непрерывные функции.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом, ограниченном и измеримом множестве Ω. Тогда $f(x)$ интегрируема на Ω.

Данная теорема является лишь достаточным признаком интегрируемости функции.Следующий пример показывает, что множество интегрируемых функций не ограничивается лишь непрерывными.

Пример. Показать, что функция

$$f(x,y) = \begin{cases} 0,\ \text{если } y \in [0,\frac{1}{2}], \\ 1, \text{если } y \in (\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

интегрируема на квадрате $\Omega = [0,1]\times[0,1]$. Вычислить интеграл

$$\int\!\!\int_{\Omega} f(x,y)\,dxdy.$$

Решение. Покажем сначала, что функция $f(x, y)$ интегрируема на Ω. Для этого воспользуемся критерием Дарбу. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое разбиение τ множества Ω, чтобы $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Разобьем множество Ω на две части:

$$\Omega_1 = \left\{(x, y) \mid x \in [0, 1],\ y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\},$$

$$\Omega_2 = \left\{(x, y) \mid x \in [0, 1],\ y \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]\right\},$$

тогда

$$\tau = \{\Omega_1, \Omega_2\}$$

искомое разбиение. Действительно, для Ω_1 имеем $M_1 = m_1 = 0$, $\mu\Omega = \frac{1}{2}$; для Ω_2 имеем $M_2 = m_2 = 1$, $\mu\Omega_2 = \frac{1}{2}$. Поэтому, $S_\tau = s_\tau = \frac{1}{2}$ и, следовательно, $0 = S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, $\forall\varepsilon > 0$.

Далее, так как функция $f(x, y)$ интегрируема на Ω и для разбиения τ ее верхняя и нижняя суммы Дарбу равны, то

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dxdy = \frac{1}{2}.$$

Приведем пример неинтегрируемой на измеримом множестве функции. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ квадрат $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ и положим

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ – рациональное}, \\ 1, & \text{если } x \text{ – иррациональное}. \end{cases}$$

Затем для любого натурального n рассмотрим разбиение τ квадрата Ω на одинаковые квадраты Ω_{ij} со стороной длины $1/n$, i, $j = 1, \ldots, n$. Так как множество рациональных чисел плотно в $\mathbb{R}$, то для всех i, $j = 1, \ldots, n$

$$m_{ij} = \inf_{(x,y)\in\Omega_{ij}} f(x, y) = 0, \quad M_{ij} = \sup_{(x,y)\in\Omega_{ij}} f(x, y) = 1.$$

Таким образом, получаем

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i,\,j=1}^{n} (M_{ij} - m_{ij})\mu\Omega_{ij} = 1$$

для любого натурального n. При $n \to \infty$ мелкость $|\tau|$ разбиения τ стремиться к нулю, но разность $S_\tau - s_\tau$ равна единице. Следовательно, функция $f(x,y)$ не интегрируема.

Задачи.

38. Составить верхнюю S_τ и нижнюю s_τ суммы Дарбу для функции $f(x,y) = xy$ в области $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x, y \le 1\}$, где τ – разбиение области Ω на квадраты прямыми

$$x = \frac{i}{n},\ y = \frac{j}{n},\ i, j = 0, \ldots, n.$$

39. Составить верхнюю S_τ и нижнюю s_τ суммы Дарбу для функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ в области $\Omega = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 3\}$, где τ – разбиение области Ω на прямоугольники прямыми

$$x = 1 + \frac{i}{n},\ y = 1 + \frac{2j}{n},\ i, j = 0, \ldots, n.$$

2.4 Свойства кратных интегралов.

На кратные интегралы от ограниченных функций переносятся все основные свойства определенного интеграла функции одной переменной: линейность, аддитивность и пр.

1. Если Ω – измеримое множество, то $\int\limits_\Omega 1 \cdot dx = \mu\Omega$.

2. Если функции $f_i(x)$ – интегрируемы на множестве Ω, то для любых действительных чисел α_i, $i = 1, \ldots, k$, функция

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x)$$

также интегрируема на множестве Ω и

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x)\, dx = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \int\limits_{\Omega} f_i(x)\, dx \quad \text{(линейность интеграла).}$$

3. Если Ω_1 и Ω_2 – измеримые множества, $\Omega_1 \subset \Omega_2$, функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на Ω_2, то она интегрируема и на множестве Ω_1.

4. Если Ω – измеримое множество, $\tau = \{\Omega_i\}_{i=1}^{k_\tau}$ – его разбиение, функция $f(x)$ ограничена на множестве Ω, а ее сужения на Ω_i интегрируемы на Ω_i, $i = 1, \ldots, k_\tau$, то функция $f(x)$ интегрируема на Ω и

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{k_\tau} \int\limits_{\Omega_i} f(x)\, dx \quad \text{(аддитивность интеграла).}$$

5. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на множестве Ω и для всех $x \in \Omega$ выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\, dx \leq \int\limits_{\Omega} g(x)\, dx.$$

6. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы и ограничены на некотором множестве Ω, то их произведение $f(x)\, g(x)$ – интегрируемая на Ω функция. Если к тому же

$$\inf_{x \in \Omega} |g(x)| > 0,$$

то и частное $f(x)/g(x)$ интегрируемо на множестве Ω.

7. Если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на Ω, то $|f(x)|$ интегрируема на Ω и справедливо неравенство

$$\Big| \int\limits_{\Omega} f(x) dx \Big| \leq \int\limits_{\Omega} |f(x)| dx.$$

8. Пусть функция $f(x)$ – ограничена, интегрируема и неотрицательна на измеримом множестве Ω, $\mu\Omega > 0$. Пусть, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на Ω и существует такая точка x^0, что $f(x^0) > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega} f(x)dx > 0.$$

Из последнего свойства следует, что если $f(x)$ – интегрируемая и непрерывная на измеримом множестве Ω с положительной мерой функция такая, что

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)|dx = 0,$$

то $f(x) \equiv 0$ в Ω.

9. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $m \le f(x) \le M$, $x \in \Omega$, и функция $g(x)$ не меняет знак на Ω, то существует такое число $\lambda \in [m, M]$, что

$$\int\limits_{\Omega} f(x)g(x)dx = \lambda \int\limits_{\Omega} g(x)dx.$$

Следствие. Если множество Ω – открытое множество, любые две точки которого можно соединить непрерывной кривой, функции $f(x)$ и $g(x)$ – интегрируемы, функция $f(x)$ – непрерывна и ограничена, а функция $g(x)$ не меняет свой знак на Ω, то в Ω существует такая точка ξ, что

$$\int\limits_{\Omega} f(x)g(x)dx = f(\xi) \int\limits_{\Omega} g(x)dx.$$

Задачи.

40*. Вычислить приближенно интеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 25} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+24}},$$

аппроксимируя область интегрирования системой вписанных квадратов, вершины которых находятся в целочисленных точках, и выбирая значения подынтегральной функции в вершинах этих квадратов, наиболее удаленных от начала координат.

41*. Приближенно вычислить интеграл

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{x+y}\, dxdy,$$

где Ω – треугольник, ограниченной прямыми $x=0$, $y=0$ и $x+y=1$, разбив область Ω прямыми $x=const$, $y=const$, $x+y=const$ на четыре равных треугольника и выбрав значение подынтегральной функции в центрах масс этих треугольников.

42. Пусть функции $X(x)$ и $Y(y)$ – непрерывны для всех $x \in [a,b]$ и $y \in [c,d]$ соответственно. Доказать равенство

$$\iint\limits_{R} X(x)Y(y)dxdy = \int\limits_a^b X(x)dx \cdot \int\limits_c^d Y(y)dy,$$

где $R=[a,b]\times[c,d]$.

43*. Какой знак имеют следующие двойные интегралы:

$$\text{а)} \iint\limits_{|x|+|y|\le 1} \ln(x^2+y^2)dxdy,$$

$$\text{б)} \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \big(1-(x^2-y^2)\big)^{\frac{1}{3}}\, dxdy.$$

44*. Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

где a,b,c,R – константы такие, что $a^2+b^2+c^2>R^2$.

2.5 Сведение двойного интеграла к повторному.

Одним из способов вычисления кратных интегралов является способ сведения их к повторным. Сначала рассмотрим случай двойного интеграла. Пусть заданы две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывные на отрезке $[a,b]$ такие, что $\varphi(x) \le \psi(x)$ для всех $x \in [a,b]$. Определим множество

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$

Множество Ω является цилиндрических множеством в пространстве $\mathbb{R}^2$ с основанием $[a,b]$ и, поэтому, – измеримо.

Определение. Пусть функция $f(x,y)$ задана на множестве Ω и при каждом $x \in [a,b]$ интегрируема на отрезке $[\varphi(x),\psi(x)]$ по y. Тогда функция

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \tag{6}$$

называется интегралом, зависящим от параметра x, а интеграл

$$\int\limits_a^b \Big(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \Big)\,dx$$

называется повторным интегралом. Обычно повторный интеграл записывают в виде

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

Теорема. (Случай прямоугольной области) Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема на прямоугольнике $P = [a,b] \times [c,d]$. Пусть для всех $x \in [a,b]$ существует интеграл,

$$F(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy,$$

зависящий от параметра x. Тогда существует повторный интеграл

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

и справедливо равенство

$$\int\int_P f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy. \qquad (7)$$

Замечание. В этой теореме можно пометь x и y местами, т.е., если предположить существование интеграла, зависящего от параметра y для всех $y \in [c,d]$, то справедливо равенство

$$\int\int_P f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Используя последнюю теорему, можно доказать теорему о сведении двойного интеграла к повторному для произвольных цилиндрических областей.

Теорема. (Случай произвольной области) Пусть область Ω – цилиндрическая с непрерывными функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема на Ω и для любых $x \in [a,b]$ существует интеграл, зависящий от параметра

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

Тогда существует повторный интеграл

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy,$$

и справедливо равенство

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

Замечание. В случаях, когда область Ω не является цилиндрической, часто удается разбить эту область на объединение конечного числа областей цилиндрического типа, не имеющих общих внутренних точек. В силу аддитивности интеграла Римана интеграл по всей области равен сумме интегралов по этим областям.

Пример. Вычислить повторный интеграл

$$I = \int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2x} \ln y\,dy.$$

Решение. Применим метод интегрирования по частям к внутреннему интегралу по переменной y:

$$\int\limits_x^{2x} \ln y\,dy = (y\ln y - y)\,\Big|_{y=x}^{y=2x} = 2x\ln(2x) - 2x - x\ln x + x =$$

$$= x\ln x + 2x\ln 2 - x$$

Следовательно, имеем

$$I = \int\limits_1^2 (x\ln x + 2x\ln 2 - x)\;dx =$$

$$= \left(\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{(2\ln 2 - 1)x^2}{2}\right)\Big|_{x=1}^{x=2} = 5\ln 2 - \frac{9}{4}.$$

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \iint\limits_{\Omega} xy\,dxdy,$$

где Ω — квадрат $[0,1]\times[0,1]$.

Решение. Так как область интегрирования — квадрат, то для вычисления интеграла можно применить формулу (7). В результате будем иметь

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 xy\,dy=\int\limits_0^1 x\,dx\cdot\int\limits_0^1 y\,dy=\frac{1}{4}.$$

Пример. Переменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I=\int\limits_0^{\pi} dx\int\limits_0^{2\sin x} f(x,y)\,dy.$$

Решение. Область Ω интегрирования задается неравенствами

$$0\le x\le\pi,\ \ 0\le y\le 2\sin x.$$

Проекция Ω на ось Oy есть отрезок $[0,2]$. Каждая прямая $y=const\in[0,2]$ пересекает область Ω по отрезку с концами $\varphi(y)$ и $\psi(y)$, которые находятся как решение уравнения $y=2\sin x$ из отрезка $[0,\pi]$: $\varphi(y)=\arcsin(y/2)$, $\psi(y)=\pi-\arcsin(y/2)$. Следовательно, область Ω задается неравенствами

$$0\le y\le 2,\ \ \arcsin(y/2)\le x\le\pi-\arcsin(y/2).$$

Таким образом, имеем

$$I=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\arcsin(y/2)}^{\pi-\arcsin(y/2)} f(x,y)\,dx.$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{\Omega}(x-y)\,dx,$$

где Ω — область, ограниченная линиями $y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$.

Решение. Найдем точки пересечения линий. Для этого необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = 2x - 1, \end{cases}$$

из которой получаем, что $A(-3, -7)$ и $B(1, 1)$ — искомые точки. Таким образом, область Ω — цилиндрическая с основанием $[-3, 1]$, лежащем на оси Ox. Следовательно, находим

$$\int\limits_{\Omega}\int (x - y)\, dx = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{2-x^2} (x - y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{-3}^{1} \left(xy - \frac{1}{2} y^2 \right) \Bigg|_{y=2x-1}^{y=2-x^2} dx = \int\limits_{-3}^{1} \left(-\frac{1}{2} x^4 - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2} \right) dx = \frac{64}{15}.$$

Пример. Вычислить двойной интеграл

$$I = \int\limits_{\Omega}\int \sqrt[4]{1 - y^2}\, dxdy,$$

где Ω — треугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 1$, $y = x$.

Решение. Область Ω является цилиндрической с основанием $[0, 1]$, лежащем на оси Ox, нижней стороной $y = x$, верхней стороной $y = 1$. Следовательно,

$$I = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{1} \sqrt[4]{1 - y^2}\, dy.$$

Известно, что внутренний интеграл не является элементарной функцией.

В то же время, область Ω — цилиндрическая с основанием $[0,1]$, лежащем на оси Oy, верхней и нижней сторонами $x=y$ и $x=0$ соответственно. Следовательно,

$$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y \sqrt[4]{1-y^2}\,dx=\int\limits_0^1 \sqrt[4]{1-y^2}y\,dy=\frac{2}{5}.$$

Данный пример показывает, что выбор порядка интегрирования при сведении кратного интеграла к повторному может существенно облегчить вычисление интеграла.

Задачи.

45. Вычислить

$$\int\limits_0^{2\pi} dx\int\limits_0^1 y\cos^2 x dy.$$

46. Вычислить

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_2^3 y(x^3-y)dy.$$

47. Вычислить

$$\int\limits_1^3 dx\int\limits_{x^3}^x (x-y)dy.$$

48. Вычислить

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_{e^y}^{e^{2y}} \ln x dy.$$

49. Вычислить следующие интегралы:

$$\text{а)}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 x\,dxdy,\quad \text{б)}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 xy\,dxdy,$$

$$\text{в)} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sin\, x \cos\, y\, dxdy, \quad \text{г)} \int_0^1\int_0^1 (x^2+y)\, dxdy,$$

$$\text{д)} \int_1^{\pi}\int_1^{\pi} x \sin(xy)\, dxdy, \quad \text{е)} \int_0^1\int_0^1 x^p y^q\, dxdy,\ p,q>0.$$

50. Вычислить

$$\iint\limits_D (x^2+2y)\, dxdy,$$

если область D ограничена прямыми $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$.

51. Вычислить

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2},$$

если область D ограничена прямыми $x=3$, $x=4$, $y=1$, $y=2$.

52. Вычислить

$$\iint\limits_D xy\, dxdy,$$

если область D ограничена прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

53. Вычислить

$$\iint\limits_D (\cos 2x + \sin y)\, dxdy,$$

если область D ограничена прямыми $x=0$, $y=0$, $4x+4y-\pi=0$.

54. Вычислить

$$\iint\limits_D \sin(x+y)\, dxdy,$$

если область D ограничена прямыми $x=0$, $y=\pi/2$, $y=x$.

55. Вычислить

$$\iint\limits_D x\, dxdy,$$

если область D – треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$.

56. Вычислить
$$\iint\limits_D y\,dxdy,$$
если область D – треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(2,1)$, $B(-2,1)$.

57. Вычислить
$$\iint\limits_D (x+y)\,dxdy,$$
если область D – трапеция с вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,2)$, $C(0,1)$.

58. Вычислить
$$\iint\limits_D 2y\,dxdy,$$
если область D ограничена параболой $y=\sqrt{x}$ и прямыми $y=0$, $x+y=2$.

59. Вычислить
$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy,$$
если область D ограничена прямыми $x=2$, $y=x$ и гиперболой $y=1/x$.

60. Вычислить
$$\iint\limits_D e^x\,dxdy,$$
если область D ограничена прямыми $x=0$, $y=1$, $y=2$ и кривой $x=\ln y$.

61. Изменить порядок интегрирования в двойных интегралах:

$$\text{а)}\ \int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy,\quad \text{б)}\ \int\limits_0^2 dx\int\limits_{x}^{2x} f(x,y)dy,$$
$$\text{в)}\ \int\limits_0^1 dy\int\limits_{y}^{2-y} f(x,y)dx,\quad \text{г)}\ \int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx,$$

$$\text{д)}\ \int\limits_0^1 dx \int\limits_{e^{-x}}^{e^x} f(x,y)dy, \quad \text{е)}\ \int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy,$$

$$\text{ж)}\ \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx, \quad \text{з)}\ \int\limits_1^2 dy \int\limits_{\ln y}^{y} f(x,y)dx.$$

62*. Вычислить повторные интегралы:

$$\text{а)}\ \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{3/2}dy, \quad \text{б)}\ \int\limits_0^{\pi} dy \int\limits_y^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx,$$

$$\text{в)}\ \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^{1/2}}^{y^{1/5}} (1-x^3)^{1/2}dx, \quad \text{г)}\ \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{1} y^2\sqrt{y^4-x^2}dy.$$

63. Вычислить следующие интегралы:

$$\text{а)}\ \iint\limits_D x^3y^5dxdy,\ \text{где}\ D = \{(x,y)\mid |x|+|y|\le 1\},$$

$$\text{б)}\ \iint\limits_D x^2dxdy,\ \text{где}\ D = \{(x,y)\mid |x|+|y|\le 1\},$$

$$\text{в)}\ \iint\limits_D \sqrt{|x-y^2|}\,dxdy,\ \text{где}\ D = \{(x,y)\mid |y|\le 1,\ 0\le x\le 2\},$$

$$\text{г)}^*\ \iint\limits_D \max\{\sin x,\sin y\}\,dxdy,\ \text{где}\ D = \{(x,y)\mid 0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \pi\},$$

$$\text{д)}^*\ \iint\limits_D \operatorname{sign}(x^2-y^2-2)\,dxdy,\ \text{где}\ D = \{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}.$$

2.6 Сведение тройного и n-кратного интеграла к повторным.

Сформулируем теоремы о сведении n-кратного интеграла к повторному в случае $n \geq 3$.

Теорема. Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ определена и интегрируема на цилиндрическом множестве

$$\Omega_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})\},$$

где функции $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ заданы на ограниченном и замкнутом множестве $\Omega_{n-1} \subset R^{n-1}$ и непрерывны на нем. Пусть для любых точек $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Omega_{n-1}$ существует интеграл, зависящий от параметров $(x_1, \ldots, x_{n-1})$

$$F(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \int\limits_{\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\psi(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) dx_n.$$

Тогда существует $(n-1)$-кратный интеграл

$$\int\int\limits_{\Omega_{n-1}}\ldots\int dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1} \int\limits_{\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\psi(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) dx_n$$

и справедлива формула

$$\int\int\limits_{\Omega_n}\ldots\int f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int\int\limits_{\Omega_{n-1}}\ldots\int dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1} \int\limits_{\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\psi(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) dx_n.$$

Рассмотрим случай $n = 3$. Пусть функция трех переменных $f(x, y, z)$ определена на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и непрерывна на нем. Пусть Ω – цилиндрическое множество вида

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in \Omega_{xy},\ \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

где Ω_{xy} – ограниченное и замкнутое множество в $\mathbb{R}^2$, функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ непрерывны на Ω_{xy}. Тогда к интегралу

$$\int\int\limits_{\Omega}\int f(x, y, z)dxdydz$$

применима теорема о сведении кратного интеграла к повторному, т.е. справедливо равенство

$$\int\int\limits_{\Omega}\int f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_{\Omega_{xy}}\int dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)dz. \qquad (8)$$

Если в свою очередь множество Ω_{xy} тоже является цилиндрическим множеством вида

$$\Omega_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \psi_1(x)\},$$

где функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то, применив в правой части формулы (8) формулу сведения двукратного интеграла по множеству Ω_{xy} к повторному, получим

$$\int\int\limits_{\Omega}\int f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)dz. \qquad (9)$$

Если обозначить через $\Omega(x_0)$ сечение множества Ω плоскостью $\{x = x_0\}$, т.е.

$$\Omega(x_0) = \Omega \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_0\},$$

то при условии $x \in [a, b]$ включение $(x, y, z) \in \Omega(x)$ равносильно включениям $\varphi_1(x) \le y \le \psi_1(x)$ и $\varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y)$. Поэтому, объединив в формуле (9) два внутренних интегрирования по переменным y и z, получим формулу

$$\int\int\limits_{\Omega}\int f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\Omega(x)}\int f(x, y, z)dydz.$$

Например, если $f(x,y,z)=1$, то

$$\iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \mu_3\Omega, \quad \iint\limits_{\Omega(x)} dydz = \mu_2\Omega(x),$$

где μ_3 – трехмерная мера (объем), μ_2 – двумерная мера (площадь). Тогда получаем

$$\mu_3\Omega = \int\limits_a^b \mu_2\Omega(x)dx,$$

т.е. объем тела Ω равен одномерному интегралу от площадей сечений $\Omega(x)$.

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz,$$

где область Ω определяется неравенствами $0 \le x \le 1/2$, $x \le y \le 2x$, $0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Решение. Область Ω — цилиндрическая с основанием Ω_{xy}, где

$$\Omega_{xy} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1/2,\ x \le y \le 2x\}.$$

В свою очередь Ω_{xy} также является цилиндрической. Поэтому можно применить формулу (9). Таким образом, находим

$$I = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_x^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_x^{2x} z^2 \Big|_{z=0}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_x^{2x} (1-x^2-y^2)\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(y - yx^2 - \frac{1}{3}y^2\right)\Big|_{y=x}^{y=2x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{10}{3} x^3 \right) dx = \frac{7}{192}.$$

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int\int_{\Omega}\int x^2 yz \, dxdydz,$$

где область Ω ограничена плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x+y+z-2 = 0$.

Решение. Проекция области Ω на плоскость Oxy есть треугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $y = 2 - x$. Сверху область Ω ограничена плоскостью $z = 2 - x - y$, снизу — $z = 0$. Таким образом, имеем

$$I = \int_0^2 x^2 \, dx \int_0^{2-x} y \, dx \int_0^{2-x-y} z \, dz = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 \, dx \int_0^{2-x} y(2-x-y)^2 \, dy =$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^2 x^2 (2-x)^4 \, dx = \frac{16}{315}.$$

Пример. Вычислить тройной интеграл

$$I = \int\int_{\Omega}\int y \, dxdydz,$$

где

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \le z \le 1, |x| \le z, \ z \le y, \ x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}.$$

Решение. Неравенства $|x| \le z$, $0 \le z \le 1$ задают треугольник Ω' на плоскости Oxz. Решим исходную систему неравенств относительно y.

Из первого и третьего неравенства следует, что $y \geq 0$, поэтому третье и четвертое неравенства равносильны системе

$$z \leq y \leq \sqrt{4 - x^2 - z^2}.$$

Эта система имеет решение при условии, что $\sqrt{4 - x^2 - z^2} \geq z$. Этому условию удовлетворяют все точки треугольника Ω'. Следовательно, область Ω — цилиндрическая с основанием Ω', нижней и верхней сторонами $y = z$ и $y = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ соответственно. В свою очередь область Ω' на плоскости Oxz тоже является цилиндрической

$$\Omega'\{(x, z) \mid 0 \leq z \leq 1, \ -z \leq x \leq z\}.$$

Следовательно,

$$I = \int\limits_0^1 dz \int\limits_{-z}^{z} dx \int\limits_{z}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} y\, dy = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dz \int\limits_{-z}^{z} (4 - x^2 - 2z^2)\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(4z - \frac{7}{3} z^3\right) dz = \frac{17}{12}.$$

Пример. Пусть Π_n — пирамида в $\mathbb{R}^n$,

$$\Pi_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid 0 \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \ldots \leq x_2 \leq x_1 \leq 1\}.$$

Вычислить n-кратный интеграл

$$I_n = \int\limits_{\Pi_n} x_1 x_2 \ldots x_n \, dx.$$

Решение. Из уравнений, задающих пирамиду, следует, что Π_n — является цилиндрической областью, которую можно представить в виде

$$\Pi_n = \{x_1, \ldots, x_n) \mid 0 \leq x_1 \leq 1, \ 0 \leq x_2 \leq x_1,$$

$$0 \le x_3 \le x_2, \dots, 0 \le x_n \le x_{n-1}\}.$$

Поэтому, сводя кратный интеграл к повторному и применяя метод математической индукции, получим

$$I_n = \int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \dots \int\limits_0^{x_{n-1}} x_1 \dots x_{n-1} x_n \, dx_n = \frac{1}{(2n)!!}.$$

Задачи.

64. Вычислить следующие повторные интегралы:

$$\text{а)} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 xyz \, dz,$$

$$\text{б)} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} (x+y+z) \, dz,$$

$$\text{в)} \int\limits_0^2 dy \int\limits_y^2 dx \int\limits_0^{\frac{1}{xy}} \frac{dz}{x(1+x^2y^2z^2)},$$

$$\text{г)} \int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_y^0 dz \int\limits_0^{zy} y^2 \cos x \, dx,$$

$$\text{д)} \int\limits_0^4 dz \int\limits_{-z}^z dx \int\limits_0^{\sqrt{z^2-x^2}} xy^2z^2 \, dz,$$

$$\text{е)} \int\limits_1^3 dz \int\limits_{1-z}^{3-z} dy \int\limits_0^{3-y-z} \frac{dx}{(x+y+z)^2}.$$

65. Вычислить интегралы:

$$\text{а)}\ \int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^1 \int\limits_0^1 xyz\,dxdydz,$$

$$\text{б)}\ \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (xy + yz + xz)\,dxdydz,$$

$$\text{в)}\ \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \sin(x + y + z)\,dxdydz.$$

66. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_D x^2y^2z\,dxdydz,$$

если область D ограничена плоскостями $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 2$, $z = 5$.

67. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{(x + y + z + 1)^3},$$

если область D ограничена плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x+y+z = 1$.

68. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_D xyz\,dxdydz,$$

если область D ограничена плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

69. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_D x\,dxdydz,$$

если область D ограничена плоскостями $z = 0$, $z = 3$ и цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

70*. Вычислить следующие тройные интегралы:

$$\text{а)}\ \iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\,dxdydz,$$

если область Ω ограничена поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$;

$$\text{б)}\ \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz,$$

если область Ω ограничена поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0,$$

$$\text{в)}\ \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz,$$

если область Ω ограничена поверхностями

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 1.$$

71. Различными способами расставить пределы интегрирования в следующих повторных интегралах:

$$\text{а)}\ \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x, y, z)\,dz,$$

$$\text{б)}\ \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z)\,dz,$$

$$\text{в)}\ \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz,$$

$$\text{г)}\ \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz,$$

$$\text{д)}\ \int_0^1 dx \int_0^{x} dy \int_0^{y} f(x,y,z)\,dz,$$

$$\text{е)}\ \int_0^1 dx \int_0^{2} dy \int_0^{1-|y-1|} f(x,y,z)\,dz.$$

72*. Упростить следующие выражения, заменяя тройные интегралы однократными:

$$\text{а)}\ \int_0^x d\xi \int_0^{\xi} d\eta \int_0^{\eta} f(\zeta)\,d\zeta, \qquad \text{б)}\ \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z)\,dz.$$

73*. Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ – непрерывная функция в области

$$\Omega = \{(x_1,\dots,x_n) \mid 0 \le x_i \le x,\ i = 1,\dots,n\}.$$

Доказать равенство

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_n =$$

$$= \int_0^x dx_n \int_{x_n}^{x} dx_{n-1} \dots \int_{x_2}^{x} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1.$$

74*. Вычислить следующие многократные интегралы:

$$\text{а)} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

$$\text{б)} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

75*. Пусть Π_n — пирамида в пространстве $\mathbb{R}^n$, определенная ранее. Вычислить следующие интегралы

$$\text{а)} \int\limits_{\Pi_n} 1 \cdot dx,$$

$$\text{б)} \int\limits_{\Pi_n} (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\, dx.$$

2.7 Замена переменных в кратных интегралах.

В этом параграфе рассмотрим теорему о замене переменных в кратных интегралах, которая является одним из важнейших средств вычисления кратных интегралов.

Пусть функция $f(y_1, \ldots, y_n)$ интегрируема в Ω, т.е. существует интеграл

$$\int\limits_{\Omega} f(y)\, dy = \int\limits_{\Omega}\!\!\ldots\!\!\int f(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n, \tag{10}$$

где Ω – ограниченная замкнутая измеримая область в пространстве $\mathbb{R}^n$ переменных $y_1, \ldots, y_n$. Предположим далее, что переменные $y_1, \ldots, y_n$ в свою очередь зависят от переменных $x_1, \ldots, x_n$, т.е. задано преобразование координат

$$\begin{cases} y_1 = \psi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ y_2 = \psi_2(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = \psi_n(x_1, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{11}$$

Для краткости преобразование (11) будем обозначать символом

$$y = \psi(x),$$

понимая, что $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – точки n-мерного пространства, а ψ – совокупность n функций $\psi_1, \ldots, \psi_n$.

Обозначим через Ω' такую область в пространстве переменных x, которая при действии преобразования (11) переходит в Ω. Кратко это будем обозначать так: $\Omega = \psi(\Omega')$. Кроме того, будем считать, что преобразование (11) взаимно однозначно, т.е. существует $x = \psi^{-1}(y)$ такое, что $\Omega' = \psi^{-1}(\Omega)$.

Определение. Пусть в каждой точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ области Ω' существуют все частные производные первого порядка от функций $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_2} \\ \cdots & & & \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

называется матрицей Якоби, а ее определитель – Якобианом, который обозначается

$$\frac{D(y)}{D(x)} \quad \text{или} \quad \frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Сформулируем теорему о замене переменных в кратных интегралах.

Теорема. Пусть преобразование (11) отображает область Ω' в Ω взаимно однозначно. Пусть функции $\psi_1, \ldots, \psi_n$ имеют непрерывные частные производные первого порядка. Пусть Якобиан преобразования (11) отличен от нуля в любой точке области Ω'. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на Ω. Тогда справедлива формула замены переменных

$$\int\limits_{\Omega} f(y)dy = \int\limits_{\Omega'} f(\psi(x)) \left| \frac{D(y)}{D(x)} \right| dx. \tag{12}$$

В подробной записи формула (12) имеет вид

$$\int\int\limits_{\Omega} \cdots \int f(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 dy_2 \ldots dy_n =$$

$$= \int\int\limits_{\Omega'}\dots\int f(\psi_1(x_1\dots,x_n),\dots,\psi_n(x_1,\dots,x_n))\times$$

$$\times \left| \frac{D(y_1,\dots,y_n)}{D(x_1,\dots,x_n)} \right| dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Отметим, что доказательство этой теоремы разбивается на несколько этапов: сначала справедливость формулы (12) доказывается для линейного преобразования координат, а затем сводится к общему случаю.

Замечание. В условиях теоремы о замене переменных в кратном интеграле можно допустить обращение в нуль якобиана преобразования на некотором множестве S, принадлежащему Ω', при условии, что n-мерная мера множества S равна нулю.

Замечание. Величину $dy_1 dy_2 \dots dy_n$ называют элементом объема в декартовой системе координат $Oy_1 y_2 \dots y_n$. С помощью преобразования (11) мы переходим от декартовых координат
$Oy_1 y_2 \dots y_n$ к новым криволинейным координатам $Ox_1 x_2 \dots x_n$. Интеграл

$$I = \int\int\limits_{\Omega'}\dots\int 1\, dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

равен n-мерному объему области Ω'. Используя формулу замены переменных в кратных интегралах (12), получаем

$$I = \int\int\limits_{\Omega}\dots\int \left| \frac{D(y)}{D(x)} \right| dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Поэтому величину

$$\left| \frac{D(y)}{D(x)} \right| dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

называют элементом объема в криволинейной системе координат $Ox_1 x_2 \dots x_n$.

2.8 Криволинейные координаты.

Взаимно однозначное отображение

$$y = F(x) = \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = y_n(x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \qquad x \in \Omega, \tag{13}$$

которое отображает множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n_x$ в пространство $\mathbb{R}^n_y$ ставит в соответствие каждой точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ набор чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Эти числа можно рассматривать как другие координаты той же точки x. Такие координаты называют криволинейными, так как кривые, получающиеся из уравнений

$$y_i = y_i(x_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

при фиксировании всех аргументов, кроме одного, называемые координатными кривыми, не являются, вообще говоря, прямыми, в отличие случае декартовых координат. Отметим, что в случае декартовых координат уравнения (13) имеют вид

$$y_1 = x_1,\ y_2 = x_2, \ldots, y_n = x_n.$$

Таким образом, формулы (13) можно рассматривать не только как формулы, задающие отображение из одного пространства в другое, но и как переход от координат $x_1, \ldots, x_n$ к координатам $y_1, \ldots, y_n$ в том же пространстве. В этом случае множество $\Omega' = F(\Omega)$ представляет собой множество наборов новых координат точек множества Ω.

Полярная система координат. Из криволинейных координат на плоскости отметим полярные координаты r, φ, связанные с декартовыми x, y соотношениями

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{14}$$

В декартовой системе координат координаты x, y точки (x, y) могут принимать значения от $-\infty$ до $+\infty$. В полярной системе координат $r \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. В этом случае отображение (14) является взаимно однозначным. Координатными линиями полярных координат являются концентрические окружности $r = const$ с центром в начале координат и лучи $\varphi = const$, выходящие из начала координат.

Якобиан преобразования (14) равен r, т.е.

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r.$$

Заметим, что якобиан обращается в ноль в точке $(0,0)$, но 2-мерная мера точки равна нулю. Поэтому в силу замечания к теореме о замене переменных в кратном интеграле формула (12) для замены переменных (14) верна.

Из криволинейных координат в пространстве $\mathbb{R}^3$ отметим цилиндрическую и сферическую.

Цилиндрическая система координат. Цилиндрические координаты r, φ, h связаны с декартовыми x, y, z соотношениями

$$x = r\,\cos\varphi,\ \ y = r\,\sin\varphi,\ \ z = h, \tag{15}$$

$$r \geq 0,\ \ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ \ -\infty < h < +\infty.$$

Фактически цилиндрические координаты – это полярные координаты на плоскости Oxy и обычная система координат в ортогональном дополнении плоскости Oxy – оси Oz. Легко вычислить якобиан преобразования (15)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,h)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Сферическая система координат. Сферические координаты r, φ, ψ связаны с декартовыми x, y, z соотношениями

$$x = r\cos\varphi\cos\psi,\ \ y = r\sin\varphi\cos\psi,\ \ z = r\sin\psi, \tag{16}$$

$$r \geq 0,\ \ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ \ -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Так же, как и полярные координаты (r, φ) на плоскости, сферические координаты (r, φ, ψ) точки M в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеют простой геометрический смысл: r – длина радиуса-вектора из начала координат в точку M, φ – угол проекции радиуса-вектора на плоскость Oxy с положительным направлением оси Ox (долгота), ψ – угол радиуса-вектора с плоскостью Oxy (широта).

Якобиан преобразования (16) равен

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\sin\psi & r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\cos\psi.$$

Пример. Переходя к полярной системе координат, вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$$

где Ω — четверть круга $x^2+y^2 \le a^2$, $a > 0$.

Решение. Сделав замену переменных

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

получим, что область Ω взаимно однозначно отобразиться на область $\Omega' = \{(r,\varphi) \mid r \in [0,a],\ \varphi \in [0,\pi/2]\}$. В результате будем иметь

$$I = \iint\limits_{\Omega'} \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi r}\,drd\varphi = \int\limits_0^a r^2\,dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi a^3}{6}.$$

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \iint\limits_{\Omega} \frac{x^2\sin\left(\frac{xy}{2}\right)}{y}\,dxdy,$$

если область Ω ограничена четырьмя параболами

$$x^2 = \frac{\pi y}{3},\ x^2 = \frac{2\pi y}{3},\ y^2 = 2x,\ y^2 = 4x.$$

Решение. Для вычисления интеграла сделаем замену переменных

$$x = \sqrt[3]{uv^2},\ y = \sqrt[3]{u^2 v}.$$

Такая замена переменных устанавливает взаимно однозначное соответствие между областью Ω и прямоугольником Ω', где

$$\Omega' = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \le u \le 4,\ \frac{\pi}{3} \le v \le \frac{2\pi}{3}\right\}.$$

Найдем якобиан преобразования

$$\frac{D(x,y)}{D(u,u)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

Следовательно, имеем

$$I = \iint\limits_{\Omega'} \frac{u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{4}{3}}\sin\left(\frac{uv}{2}\right)}{u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}}|J|\,dudv =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} v\,dv \int\limits_{2}^{4} \sin\left(\frac{uv}{2}\right)\,du = \frac{2}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\cos v - \cos(2v))\,dv = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Пример. Переходя к полярным координатам, свести двойной интеграл к однократному

$$I = \iint\limits_{\Omega} f\left(\frac{y}{x}\right)\,dxdy,$$

где Ω — множество, ограниченное петлей декартова листа $x^3+y^3 = 3xy$.

Решение. Перейдем в полярную систему координат

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

в которой уравнение петли будет иметь следующий вид:

$$r = \frac{3\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}.$$

При этом угол φ меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, т.к. в этом случае $r \geq 0$, а значениям $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ соответствует точка $(0,0)$ в декартовой системе координат. Таким образом, множество Ω является образом множества Ω' в полярной системе координат, где

$$\Omega' = \left\{(r,\varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq \frac{3\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}\right\}.$$

Окончательно, получаем

$$I = \iint\limits_{\Omega'} f\left(\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi}\right) r\,drd\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^{\frac{3\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}} r\,dr =$$

$$= \frac{9}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg}\varphi)\frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2}\,d\varphi.$$

Пример. Вычислить

$$I = \iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,$$

где область Ω ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$.

Решение. Перейдем к цилиндрическим координатам, в которых цилиндр описывается следующим образом:

$$r = \cos\varphi,\ 0 \leq z \leq 1.$$

Следовательно, прообразом области Ω в цилиндрических координатах есть множество

$$\Omega' = \left\{(r, \varphi, z) \mid 0 \le r \le 2\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le z \le 1\right\}.$$

Поэтому

$$I = \int\!\!\int\limits_{\Omega'}\!\!\int zr^2\,drd\varphi dz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2\,dr \int\limits_0^1 z\,dz =$$

$$= \frac{4}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{8}{9}.$$

Пример. Вычислить

$$I = \int\!\!\int\limits_{\Omega}\!\!\int (x^2 + y^2)\,dxdydz,$$

где область Ω — верхняя половина шара $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$.

Решение. Перейдем к сферическим координатам. Тогда прообразом множества Ω является множество

$$\Omega' = \{(r, \varphi, \psi) \mid 0 \le r \le a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}\}.$$

Таким образом, получаем

$$I = \int\!\!\int\limits_{\Omega'}\!\!\int r^4\cos^2\psi\,drd\varphi d\psi = \int\limits_0^a r^4\,dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi d\psi =$$

$$= \frac{2\pi}{5}\,a^5 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\varphi)\,d(\sin\varphi) =$$

$$= \frac{2\pi}{5}\, a^5 \left(\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{15}\, a^5.$$

Задачи.

76. Переходя к полярной системе координат, расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$, если

а) Ω – круг $x^2 + y^2 \le a^2$,

б) Ω – круг $x^2 + y^2 \le ax$, $a > 0$,

в) Ω – кольцо $a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$,

г) Ω – треугольник $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$,

д)* Ω – квадрат с вершинами $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$,

е)* $\Omega = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + y^2 \le 1,\ x^2 + (y-1)^2 \le 1\}$,

ж)* $\Omega = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + y^2 \le 1,\ 1 \le x \le y\}$.

77. Переходя к полярным координатам, вычислить следующие интегралы:

$$\text{а)} \iint\limits_{\Omega} \cos(x^2+y^2)\, dxdy,\ \text{где } \Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\},$$

$$\text{б)} \iint\limits_{\Omega} \ln(1+x^2+y^2)\, dxdy,\ \text{где } \Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\},$$

$$\text{в)} \iint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dxdy,\ \text{где } \Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le x\},$$

$$\text{г)} \iint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy,\ \text{где } \Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le y\},$$

$$\text{д)} \iint\limits_{\Omega} y^2\sqrt{1-x^2}\, dxdy,\ \text{где } \Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}.$$

78. Переходя к полярным координатам, свести двойные интегралы к однократным:

$$\text{а) } \iint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy,\ \text{где } \Omega = \{x^2+y^2 \le x,\ x^2+y^2 \le y\},$$

$$\text{б) } \iint\limits_{\Omega} f\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\,dxdy,\ \text{где } \Omega = \{\sqrt{|x|} \le y \le 1\},$$

$$\text{в) } \iint\limits_{\Omega} f\left(\frac{y}{x}\right)\,dxdy,\ \text{где}$$

$$\Omega = \{x^2+y^2 \le \sqrt{6}x,\ (x^2+y^2) \le 9(x^2-y^2)\}.$$

79. Вместо x и y ввести новые переменные u и v и определить пределы интегрирования в следующих двойных интегралах:

$$\text{а) } \int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)\,dxdy,\quad (0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta),\ \text{если}$$

$$u = x,\quad v = \frac{y}{x},$$

$$\text{б) } \int\limits_0^2 dx \int\limits_{1-x}^{2-x} f(x,y)\,dxdy,\quad \text{если } u = x+y,\quad v = y-x.$$

80. Ввести новые переменные u и v и вычислить следующие интегралы:

$$\text{а) } \iint\limits_{D} (x^2y^2+y^2)\,dxdy,$$

$$\text{где } D = \{1/x \le y \le 2/x,\ x \le y \le 3x\},$$

$$\text{б) } \iint\limits_{D} \frac{(x+y)^2}{x}\,dxdy,$$

где $D = \{1 - x \leq y \leq 3 - x,\ x/2 \leq y \leq 2x\}$,

$$\text{в)}\ \iint\limits_D xy(x+y)\,dxdy,$$

где $D = \{-1 \leq x - y \leq 1,\ 1/x \leq y \leq 2x\}$,

$$\text{г)}\ \iint\limits_D x^2\,dxdy,\ \text{где}\ D = \{x^3 \leq 2x^3,\ x \leq 2y \leq 6x\},$$

$$\text{д)}\ \iint\limits_D xy(x+y)\,dxdy,$$

где $D = \{x - 1 \leq y \leq x + 1,\ -x - 1 \leq y \leq -x + 1\}$.

81. В интеграле $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz$ перейти к сферическим координатам и затем записать его в виде повторного, если:

$$\text{а)}\ D = \{a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2,\ y \geq 0\},$$

$$\text{б)}\ D = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ y \geq 0,\ x \geq 0,\ x + y \geq 0\},$$

$$\text{в)}\ D = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ x^2 + y^2 \geq 3z^2\},$$

$$\text{г)}\ D = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az,\ x^2 + y^2 \geq z^2\}.$$

82. В интеграле $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz$ перейти к цилиндрическим координатам и затем записать его в виде повторного, если:

$$\text{а)}\ D = \left\{\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\},$$

$$\text{б)}\ D = \{x^2 + y^2 \leq z,\ 0 \leq z \leq H\},$$

$$\text{в)}\ D = \{x^2 + y^2 \leq 2x,\ x^2 + y^2 \leq 1 - z,\ z \geq 0\},$$

$$\text{г)}\ D = \{|z| \leq 5 - \sqrt{3x^2 + 3y^2},\ z^2 \leq x^2 + y^2 + 1\}.$$

83. Вычислить

$$\text{а) } \iiint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdydz,\ D=\{x^2+y^2\le 2z,\ 0\le z\le 2\},$$

$$\text{б) } \iiint\limits_D (x^2-4xy+y^2)\,dxdydz,$$

$$D=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1,\},$$

$$\text{в) } \iiint\limits_D xyz\,dxdydz,$$

$$D=\{x^2+y^2+z^2\le\sqrt{3}x,\ x^2+y^2+z^2\le y,\ z\ge 0\},$$

$$\text{г) } \iiint\limits_D z\,dxdydz,\ D=\{x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0\},$$

$$\text{д) } \iiint\limits_D z^2\,dxdydz,\ D=\{x^2+y^2+z^2\ge 1,\ x^2+y^2+z^2\le 2z\}.$$

84. Показать, что при переходе к обобщенным сферическим координатам

$$x=ar\cos\varphi\cos\psi,\ y=br\sin\varphi\cos\psi,\ z=cr\sin\psi$$

якобиан отображения равен $J=abcr^2\cos\psi$.

85. Пусть

$$\Omega=\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}.$$

Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \iiint\limits_\Omega \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz,$$

$$\text{б) } \iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\,dxdydz.$$

86*. Вычислить интеграл

$$\iiint\limits_{D} xyz\,dxdydz,$$

где область Ω ограничена поверхностями

$$yz = a_1 x,\ yz = a_2 x,\ a_2 > a_1 > 0,$$

$$zx = b_1 y,\ zx = b_2 y,\ b_2 > b_1 > 0,$$

$$xy = c_1 z,\ xy = c_2 z,\ c_2 > c_1 > 0,$$

сделав замену переменных

$$u = \frac{yz}{x},\ v = \frac{zx}{y},\ w = \frac{xy}{z}.$$

87*. Подобрав подходящую замену координат, вычислить интеграл $\iiint\limits_{D} x\,dxdydz$, где

$$D = \{a \leq xyz \leq b,\ cx \leq yz \leq dx,\ my \leq x \leq ny\}.$$

2.9 Несобственные кратные интегралы.

Выше мы ввели понятие кратного интеграла для ограниченных областей и, кроме того, основные его свойства сформулировали для ограниченных функций. В приложениях же часто встречаются задачи, когда необходимо рассматривать неограниченные области или функции. В этом параграфе мы введем понятие несобственного кратного интеграла. В отличие от одномерного случая мы не будем рассматривать два вида несобственных интегралов — по неограниченным областям и от неограниченных функций, а определим их сразу.

Определение. Последовательность измеримых по Жордану множеств $\{\Omega_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\Omega_m \subset \mathbb{R}^n$, называют исчерпывающей множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если

1) $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots \subset \Omega_m \subset \Omega$ для всех $m \geq 1$,

$$2)\ \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m = \Omega.$$

Далее будем рассматривать такие функции $f(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, которые интегрируемы на любом открытом измеримом по Жордану множестве ω таком, что $\overline{\omega} \subset \Omega$.

Определение. Пусть для любой последовательности множеств $\{\Omega_m\}_{m=1}^{\infty}$, исчерпывающих Ω, существует предел

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega_m} f(x)\, dx,$$

не зависящий от выбора последовательности $\{\Omega_m\}_{m=1}^{\infty}$. Тогда этот предел называют несобственным кратным интегралом от функции $f(x)$ на множестве Ω и обозначают

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\, dx.$$

При этом функцию f называют интегрируемой в несобственном смысле на Ω. Таким образом,

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\, dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega_m} f(x)\, dx. \tag{17}$$

Определение. Если предел (17) существует, то говорят, что несобственный интеграл сходится. В противном случае, говорят, что несобственный интеграл расходится.

Замечание. Если функция $f(x)$, $x \in \Omega$, интегрируема по Риману на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то предел (17) существует для любой последовательности $\{\Omega_m\}$, исчерпывающей множество Ω и равен интегралу от функции $f(x)$ на множестве Ω, то есть

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega_m} f(x)\, dx = \int\limits_{\Omega} f(x)\, dx.$$

Таким образом, понятие несобственного интеграла является обобщением понятия интеграла Римана.

Определение. Несобственный интеграл

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)|\;dx.$$

Теорема. Несобственный интеграл $\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда он сходится абсолютно.

Смысл этой теоремы в том, что понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают, т.е. отсутствует понятие условной сходимости. Напомним, что в одномерном случае, вообще говоря, из сходимости несобственного интеграла не следует его абсолютная сходимость.

Перечислим основные свойства несобственных интегралов.

1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы в несобственном смысле на множестве Ω. Тогда $\alpha f(x) \pm \beta g(x)$ интегрируема в несобственном смысле на Ω и

$$\int\limits_{\Omega} (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\,dx = \alpha \int\limits_{\Omega} f(x)\,dx \pm \beta \int\limits_{\Omega} g(x)\,dx \quad (\textit{линейность}).$$

2. Пусть $f(x) \geq 0$, $x \in \Omega$. Тогда, если предел (17) существует хотя бы для одной последовательности $\{\Omega_m\}$, то предел (17) существует для любой последовательности, исчерпывающей область Ω и они все равны, т.е. несобственный интеграл

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx$$

сходится.

Замечание. Из этого свойства следует, что для исследования сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции достаточно выбрать одну исчерпывающую последовательность множеств и исследовать существование предела (17).

3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на одних и тех же подмножествах множества Ω. Пусть $0 \leq f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in \Omega$. Тогда из сходимости интеграла $\int\limits_{\Omega} g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx$; из расходимости интеграла $\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_{\Omega} g(x)\,dx$ (*признак сравнения*).

4. Пусть множества $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ и отображение

$$\varphi:\ \Omega_1 \to \Omega_2$$

удовлетворяют следующим условиям: а) Ω_1 и Ω_2 – открытые; б) существуют множества S_1 и S_2 меры нуль такие, что множества $\Omega_1 \backslash S_1$ и $\Omega_2 \backslash S_2$ – открытые и $\varphi:\ \Omega_1 \backslash S_1 \to \Omega_2 \backslash S_2$ – диффеоморфизм, т.е. взаимно однозначное дифференцируемое отображение. Тогда для любой неотрицательной функции $f(x)$, $x \in \Omega_2$ из сходимости интеграла $\int\limits_{\Omega_2} f(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_{\Omega_1} f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt$ и оба интеграла равны (*теорема о замене переменных в несобственном интеграле*).

Пример. Исследовать сходимость интеграла

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

и найти его значение.

Решение. Подынтегральная функция положительна. Рассмотрим последовательность множеств $\Omega_k = \{x^2 + y^2 \leq k^2\}$, $k = 1, 2, \ldots$, исчерпывающую все пространство $\mathbb{R}^2$:

$$I_k = \int\limits_{\Omega_k} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$I_k = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^k e^{-r^2} r dr = 2\pi \int\limits_0^k e^{-r^2} r dr =$$

$$= \pi(1 - e^{-k^2}) \to \pi \text{ при } k \to \infty.$$

Так как подынтегральная функция неотрицательна, то для любой исчерпывающей пространство $\mathbb{R}^2$ последовательности предел числовой последовательности I_k будет один и тот же. Поэтому интеграл I сходится и равен π.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл

$$I = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{dxdydz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha}.$$

Решение. Так как подынтегральная функция положительна, то можно выбрать одну исчерпывающую множество интегрирования последовательность. В этом примере удобно рассмотреть последовательность колец Ω_k, где

$$\Omega_k = \{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq k^2\}.$$

Переходя к сферическим координатам в интеграле

$$I_k = \iiint\limits_{\Omega_k} \frac{dxdydz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha},$$

после преобразований получим

$$I_k = 4\pi \int\limits_1^k \frac{dr}{r^{\alpha-2}} = \left\{ \begin{array}{l} \ln k \text{ при } \alpha = 3, \\ \frac{1}{3-\alpha}\left(\frac{1}{k^{\alpha-3}} - 1\right) \text{ при } \alpha \neq 3 \end{array} \right. .$$

Отсюда видно, что предел последовательности $\{I_k\}$ при $k \to \infty$ существует тогда и только тогда, когда $\alpha > 3$. Таким образом, интеграл I сходится при $\alpha > 3$, и расходится при $\alpha \leq 3$.

Пример. Исследовать сходимость интеграла

$$I = \iint\limits_{\Omega} \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dxdy,$$

где $\Omega = \{x+y \geq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Решение. Как было указано выше, несобственный кратный интеграл сходится тогда и только тогда, когда он сходится абсолютно. Кроме того, множество Ω симметрично относительно прямой $y = x$, поэтому сходимость исходного интеграла эквивалентна сходимости интеграла

$$I_1 = 2\iint\limits_{\Omega_1} \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dxdy,$$

где $\Omega_1 = \{x+y \geq 1,\ x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x\}$.

Так как подынтегральная функция непрерывна, то в свою очередь сходимость интеграла I_1 эквивалентна сходимости интеграла

$$I_2 = \iint\limits_{\Omega_2} \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dxdy,$$

где $\Omega_2 = \{x^2+y^2 \geq 1,\ x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x\}$. Переходя в последнем интеграле к полярным координатам, получаем

$$I_2 = \int\limits_0^{\pi/4} (\cos\varphi - \sin\varphi)\,d\varphi \int\limits_1^{\infty} dr,$$

который расходится. Следовательно, интеграл I – тоже расходится.

Задачи.

88. Переходя к полярным координатам, вычислить интегралы:

$$\text{а)} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)\,dxdy,$$

б) $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,dxdy.$

89. Исследовать сходимость и вычислить интегралы (параметры положительны):

$$\text{а) } \iint\limits_{\substack{xy\ge 1\\ x\ge 1}} \frac{dxdy}{x^p y^q}, \quad \text{б) } \iint\limits_{\substack{x+y\ge 1\\ 0\le x\le 1}} \frac{dxdy}{(x+y)^p},$$

$$\text{в) } \iint\limits_{x^2+y^2\ge 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}, \quad \text{г) } \iint\limits_{0\le x\le y} e^{-(x+y)}\,dxdy.$$

90. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\substack{|x|\le n\\ |y|\le n}} \sin(x^2+y^2)\,dxdy = \pi,$$

тогда как

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\le 2\pi n} \sin(x^2+y^2)\,dxdy = 0.$$

91. Показать, что интеграл

$$\iint\limits_{x\ge 1,\ y\ge 1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

расходится, но повторные интегралы

$$\int_1^\infty dx\int_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy, \quad \int_1^\infty dy\int_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx$$

сходятся.

92*. Исследовать на сходимость следующие интегралы в зависимости от параметра:

$$\text{а)} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+xy+y^2)^\alpha}, \quad \text{б)} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^4+y^4)^\alpha}.$$

93. Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{dxdydz}{x^p y^q z^r}, \quad \text{б)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\, dxdydz,$$

$$\text{в)} \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} \frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}.$$

94. Исследовать сходимость следующих интегралов:

$$\text{а)} \iint\limits_{\Omega} \frac{y}{x}\, dxdy, \text{ где } \Omega = \{x \ge 1,\ -1 \le y \le 1\},$$

$$\text{б)} \iint\limits_{\Omega} \frac{y}{x}\, dxdy, \text{ где } \Omega = \{x \ge 1,\ -1 \le xy \le 1\},$$

$$\text{в)} \iint\limits_{\Omega} \frac{e^{-x}}{\sqrt{y}}\, dxdy, \text{ где } \Omega = \{x \ge 0,\ -1 \le y \le 1\}.$$

95. Исследовать сходимость следующих интегралов:

$$\text{а)} \iiint\limits_{\Omega} \frac{1-x-y-z}{xyz}\, dxdydz,$$

где $\Omega = \{x+y+z \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$,

$$\text{б)} \iiint\limits_{\Omega} \frac{1-x-y-z}{\sqrt{xyz}}\, dxdydz,$$

где $\Omega = \{x + y + z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$,

в) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{x-y}{\sqrt{z^3}}\,dxdydz,$ где $\Omega = \{x \geq 1,\ y \geq 1,\ z \geq 1\}$.

3. Геометрические и физические приложения кратных интегралов.

3.1 Геометрические приложения кратных интегралов.

1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое по Жордану множество. Тогда мера $\mu\Omega$ множества Ω вычисляется по формуле

$$\mu\Omega = \int\limits_{\Omega} dx.$$

В пространстве $\mathbb{R}^2$ мера – это площадь S, в $\mathbb{R}^3$ – объем V:

$$S = \int\!\!\int\limits_{\Omega} dxdy,$$

$$V = \int\!\!\int\limits_{\Omega}\!\!\int dxdydz.$$

Определение. Пусть функцию двух переменных $z = f(x, y)$ – непрерывна и неотрицательна, $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Тело $V \subset \mathbb{R}^3$, ограниченное сверху графиком функции $z = f(x, y)$, снизу – областью Ω, называется цилиндрическим.

Цилиндрическое тело является измеримым по Жордану множеством в пространстве $\mathbb{R}^3$ и его объем вычисляется по формуле

$$V = \int\!\!\int\limits_{\Omega} f(x, y)\, dxdy.$$

Таким образом, вычисление площадей плоских фигур и объемов цилиндрических тел сводится к вычислению двойных интегралов.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

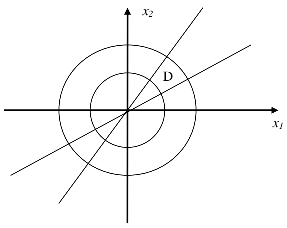
$$x = 4y - y^2,\ x + y = 6.$$

Решение. Найдем координаты точек пересечения заданных линий. Для этого нужно решить систему уравнений $x = 4y - y^2,\ x + y = 6$. В результате получим две точки пересечения $A(4,2)$ и $B(3,3)$. Следовательно, площадь фигуры равна

$$S = \int\limits_{\Omega}\int dxdy = \int\limits_{2}^{3} dy \int\limits_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int\limits_{2}^{3} (-y^2 + 5y - 6)\, dy = \frac{1}{6}.$$

Пример. Найти площадь S области, ограниченной кривыми

$$x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4,\ y = 2x,\ y = 3x.$$



Решение. Рассмотрим область D в полярной системе координат

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi.$$

Тогда части границы области D, соответствующие окружностям в полярной системе координат будут описываться уравнениями $r = 1$ и $r = 2$, а прямым – $\varphi = \operatorname{arctg} 2$ и $\varphi = \operatorname{arctg} 3$. Таким образом, в полярной системе координат $D = \{1 \le r \le 2,\ \operatorname{arctg} 2 \le \varphi \le \operatorname{arctg} 3\}$. Следовательно, площадь S равна

$$S = \int\limits_{\operatorname{arctg} 2}^{\operatorname{arctg} 3} d\varphi \int\limits_1^2 r dr = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2).$$

Отметим, что задачу можно решить и другими способами. Например, область D разбить на цилиндрические подобласти. Но такой способ трудоемкий, т.к. пришлось бы искать точки пересечения линий, и, в этом случае, необходимо решать систему нелинейных уравнений.

Пример. Вычислить площадь плоской области Ω, ограниченной кривой

$$(x^2 + y^2)^2 = 2x^3.$$

Решение. Введем полярные координаты на плоскости. Подставим $x = r\cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ в уравнение кривой. В результате получим, что в полярных координатах кривая имеет вид

$$r^4 = 2r^3 \cos^3\varphi \quad \text{или} \quad r = 2\cos^3\varphi.$$

Заметим, что область Ω симметрична относительно оси Ox. Поэтому достаточно вычислить площадь половины области Ω, лежащей в первой четверти и результат удвоить.

Для верхней половины области Ω угол φ меняется от 0 до $\pi/2$, а радиус r – от 0 до $2\cos^3\varphi$. Таким образом, получаем

$$S = \iint\limits_{\Omega} dxdy = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos^3\varphi} r\,dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \Big|_0^{2\cos^3\varphi} d\varphi =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos\,2\varphi)^3 d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 3\cos\,2\varphi +$$

$$+3\cos^2 2\varphi + \cos^3 2\varphi)d\varphi = \frac{5\pi}{16}.$$

Пример. Вычислить объем тела, вырезанного цилиндром $x^2+y^2=Rx$ из сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Решение. Тело симметрично относительно плоскости Oxy. Поэтому можно найти объем верхней половины и удвоить его. Сверху тело ограничено графиком функции $\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, поэтому

$$V = 2\iint\limits_{\Omega} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy.$$

Здесь область интегрирования Ω — это проекция цилиндра на плоскость Oxy, т.е. круг $x^2+y^2 \le Rx$. В полярных координатах граница этого круга имеет вид $r = R\cos\varphi$. Таким образом, получаем

$$V = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2-r^2}r\,dr =$$

$$= -\frac{2R^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\varphi - 1)\,d\varphi = \frac{2(3\pi-4)}{9}R^3.$$

Пример. Найти объем тела D, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=x,\ x^2+y^2=2x,\ z=x^2+y^2,\ z=0.$$

Решение. Воспользуемся цилиндрическими координатами, в которых поверхности, ограничивающие область, имеют вид:

$$r=\cos\varphi,\ r=2\cos\varphi,\ h=r^2,\ h=0.$$

Поэтому D в полярных координатах имеет вид

$$D = \left\{\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ r \in [\cos\varphi, 2\cos\varphi],\ h \in [0, r^2]\right\}.$$

Следовательно, объем V области D равен

$$V = \iiint\limits_D dxdydz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r dr \int\limits_0^{r^2} dh =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r^3 dr = \frac{15}{4} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi = \frac{45}{32}\pi.$$

Пример. Найти объем тела D, ограниченного следующими поверхностями:

$$z = x^2 + y^2,\ z = 2\,(x^2 + y^2),\ y = x,\ y = x^2.$$

Решение. Проекция области D на плоскость Oxy представляет собой множество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$, поэтому

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x,\ x^2 + y^2 \le z \le 2(x^2 + y^2)\}.$$

Объем тела равен

$$V = \iiint\limits_D dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} (x^2 + y^2) dy = \int\limits_0^1 \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 - \frac{1}{3}x^6\right) dx = \frac{3}{35}.$$

Пример. Найти объем тела D, ограниченного поверхностью

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (x^2 + y^2 - z^2).$$

Решение. Если заменить x, y, z на $-x$, $-y$, $-z$, то уравнение поверхности не изменится. Следовательно, область симметрична относительно всех координатных плоскостей, поэтому можно найти объем тела, находящегося в первом октанте, и умножить его на 8. Далее, перейдем к сферическим координатам, тогда уравнение поверхности будет иметь следующий вид:

$$r^2 = \cos 2\psi.$$

Таким образом, имеем

$$V = \int\int\limits_D\int dxdydz = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\,\psi\, d\psi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\psi}} r^2\, dr =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\psi\,(\cos 2\psi)^{\frac{3}{2}}\, d\psi = \frac{4\pi}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}\, d(\sin\psi).$$

Вычисляя последний интеграл с помощью метода замены переменной, получим

$$V = \frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}.$$

Пример. Пользуясь подходящей заменой переменных, вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2 + y^2,\ z = 2\,(x^2 + y^2),\ xy = 1,\ xy = 2,\ x = 2y,$$

$$2x = y,\ (x > 0,\ y > 0).$$

Решение. Для нахождения объема необходимо вычислить интеграл

$$I = \int\int\limits_\Omega\int dxdydz$$

где Ω — область, которую занимает тело. Произведем в интеграле замену переменных, положив

$$u = xy,\ v = \frac{y}{x},\ z = z.$$

При указанной замене

$$x = u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}},\ y = u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}},\ z = z.$$

Вычислим якобиан

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,z)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}\,u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}\,u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Кроме того, прообраз множества Ω есть множество

$$\Omega' = \Bigg\{ (u,v,z) \mid 1 \le u \le 2,\ \frac{1}{2} \le v \le 2,$$

$$u(v+v^{-1}) \le z \le 2u(v+v^{-1}) \Bigg\}.$$

Таким образом, получаем

$$I = \int\int\limits_{\Omega'}\int \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,z)}\,dudvdz = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 du \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dv}{v} \int\limits_{u(v+v^{-1})}^{2u(v+v^{-1})} dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^2 u\,du \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{v^2}\right) dv = \frac{3}{2}.$$

Задачи.

96. Вычислить площади фигур, ограниченные заданными линиями:

а) $x = y^2 - 2y,\ x + y = 0,$ б) $y = 2 - x,\ y^2 = 4x + 4,$

в) $y^2 = 4x - x^2,\ y^2 = 2x,$ г) $3y^2 = 25x,\ 5x^2 = 9y,$

д) $y^2 + 2y - 3x + 1 = 0,\ 3x - 3y - 7 = 0,$

е) $y = 4x - x^2,\ y = 2x^2 - 5x.$

97. Переходя в полярную систему координат, найти площади плоской фигуры, ограниченной кривой:

$$\text{а) } (x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2), \quad \text{б) } (x^2+y^2)^3 = x^4+y^4,$$

$$\text{в) } (x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2.$$

98*. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми:

$$\text{а) } x^2+y^2 = 2ax,\ x^2+y^2 = 2bx,\ y = x,\ y = 0,\ b > a > 0,$$

$$\text{б) } (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2),\ x^2+y^2 = a^2,\ (\sqrt{x^2+y^2} \geq a > 0).$$

99. Вычислить объемы тел, ограниченные следующими поверхностями:

$$\text{а) } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,$$

$$\text{б) } z = x^2+y^2,\ x+y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,$$

$$\text{в) } z = x^2+y^2,\ y = x^2,\ z = 0,\ y = 1.$$

100. Используя цилиндрические координаты, найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

$$\text{а) } x^2+y^2+z^2 = 1,\ x^2+y^2 \geq |x|,$$

$$\text{б)}^*\ x^2+y^2-az = 0,\ (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2),\ z = 0,$$

$$\text{в)}^*\ z = x^2+y^2,\ x^4+y^4 = x^2+y^2,\ z = 0,$$

$$\text{г) } x^2+y^2 = x,\ z^2 = x^2+y^2,\ z \geq 0.$$

101. Использую сферические координаты, найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями

$$\text{а) } x^2+y^2+z^2 = 4,\ z^2 = x^2+y^2,\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2},$$

$$\text{б) } (x^2+y^2+z^2)^2 = xyz,$$

$$\text{в) } (x^2+y^2+z^2)^2 = z(x^2+y^2),$$

$$\text{в) } (x^2+y^2+z^2)^2 = x.$$

102. Пользуюсь подходящей заменой переменных, вычислить объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

$$\text{а) } xy=1,\ xy=3,\ x=2y,\ x=3y,\ z=x^2+y^2,\ z=0,$$

$$\text{б) } y^2=x,\ y^2=x,\ x=y,\ x=2y,\ z=\frac{1}{xy},\ z=0,$$

$$\text{в) } y^2=2x,\ y^2=3x,\ x^2=y,\ x^2=2y,\ z=xy,\ z=0,$$

$$\text{г) } xy=1,\ xy=4,\ y^2=x,\ y^2=3x,\ z^2=xy,\ z=0,$$

$$\text{д) } x+y+z=1,\ x+y+z=2,\ x+y=z,\ x+y=2z,$$

$$y=x,\ y=3x.$$

3.2 Приложения кратных интегралов к геометрии масс.

Одной из физических характеристик материальной области (плоской или пространственной) является плотность – неотрицательная функция ρ, заданная на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n=2$ или $n=3$) и интегрируемая на Ω.

Определение. Массой материальной фигуры Ω с плотностью $\rho(x,y)$ (при $n=2$) или $\rho(x,y,z)$ (при $n=3$) называют величину

$$M = \iint\limits_{\Omega} \rho(x,y)\,dxdy \quad \text{при} \quad n=2, \tag{18}$$

$$M = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)\,dxdydz \quad \text{при} \quad n=3. \tag{19}$$

Определение. Центром масс тела Ω с плотностью $\rho(x,y,z)$ называют точку $C \in \mathbb{R}^3$ с координатами

$$x_C = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$y_C = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$z_C = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)\,dxdydz,$$

где M – масса тела, которую можно вычислить по формуле (19).

Аналогично определяется центр масс плоской фигуры.

Определение. Величины $M_{yz} = Mx_C$, $M_{zx} = My_C$, $M_{xy} = Mz_C$ называют статистическими моментами тела Ω относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy.

Определение. Моментом инерции тела Ω относительно оси l называют величину

$$I_l = \iiint\limits_{\Omega} d_l^2\,\rho\,dxdydz, \tag{20}$$

где $d_l = d_l(x,y,z)$ – расстояние от точки (x,y,z) тела до оси l, $\rho = \rho(x,y,z)$ – плотность тела. В частности, если в качестве l взять координатную ось Ox, то формула (20) имеет вид

$$I_{xx} = \iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dxdydz.$$

Аналогично определяются моменты инерции I_{yy} и I_{zz} относительной координатных осей Oy и Oz соответственно.

Определение. Моменты инерции I'_{xy}, I'_{yz}, I'_{zx} относительно координатных плоскостей Oxy, Oyz, Ozx определяют по формулам

$$I'_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z^2\rho(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$I'_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} x^2\rho(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$I'_{zx} = \iiint\limits_{\Omega} y^2 \rho(x,y,z)\, dxdydz.$$

Определение. Момент инерции относительно точки M_0 с координатами (x_0, y_0, z_0) определяют по формуле

$$I_{M_0} = \iiint\limits_{\Omega} d_{M_0}^2 \rho\, dxdydz,$$

где $d_{M_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ – расстояние от точки (x,y,z) тела до точки M_0. В частности, момент инерции I_O относительно начала координат

$$I_O = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x,y,z)\, dxdydz.$$

Пример. Найти массу тела, занимающего единичный куб $\Omega = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$ в $\mathbb{R}^3$, если плотность тела в точке $M(x,y,z)$ дается формулой

$$\rho(x,y,z) = x + y + z.$$

Решение. Масса m тела Ω с плотностью $\rho(x,y,z)$ вычисляется по формуле

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)\, dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (x+y+z)\, dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2}\right)\, dy = \int\limits_0^1 (x+1)\, dx = \frac{3}{2}.$$

Пример. Найти координаты центра масс однородной пластинки, ограниченной параболой $ay = x^2$ и прямой $y = 2$, $a > 0$.

Решение. В силу симметрии пластинки относительно оси Oy (это следует из того, что при замене x на $-x$ уравнения границы пластинки не меняются) имеем, что $x_C = 0$. Найдем массу пластинки

$$m = \iint\limits_{\Omega} dxdy = 2\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{ay}} dx = 2\sqrt{a}\int\limits_0^2 \sqrt{y}\,dy = \frac{8\sqrt{2a}}{2}.$$

Отсюда получаем, что

$$y_C = \frac{1}{m}\iint\limits_{\Omega} y\,dxdy = \frac{3}{4\sqrt{2a}}\int\limits_0^2 y\,dy \int\limits_0^{\sqrt{ay}} dx = \frac{3}{4\sqrt{2}}\int\limits_0^2 y^{\frac{3}{2}}dy = \frac{6}{5}.$$

Пример. Найти момент инерции квадрата со стороной a, поверхностная плотность которого равна y, относительно одной из вершин.

Решение. Поместим начало координат в одну из вершин квадрата, а координатные оси направим по двум взаимно перпендикулярным его сторонам. Найдем момент инерции относительно начала координат:

$$I_0 = \iint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)y\,dxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a (x^2y+y^3)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^a \left(\frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^4}{4}\right) dx = \frac{5a^5}{12}.$$

Пример. Найти статический момент однородного полукруга радиуса R относительно диаметра.

Решение. Поместим начало координат в середину диаметра полукруга , а ось Oy направим по диаметру. Тогда статический момент полукруга относительно диаметра будет равен статическому моменту полукруга относительно оси Oy. Вводя полярные координаты, получим

$$M_y = \iint\limits_{\Omega} x\,dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R r^2\cos\varphi\,dr =$$

$$= \frac{R^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi = \frac{2R^3}{3}.$$

Пример. Найти координаты центра тяжести однородного (с единичной плотностью) тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = z,\ x + y + z = 0.$$

Решение. Из второго уравнения, описывающего границу тела Ω следует, что $z = -x-y$ на этой границе. Поэтому проекция Ω на плоскость Oxy есть множество $D = \{x^2 + y^2 \le -x - y\}$, т.е. круг

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{2}.$$

Кроме того, в силу симметрии тела относительно плоскости $\{x = y\}$ имеем $x_C = y_C$. Рассмотрим следующую замену переменных:

$$x = r\cos\varphi - \frac{1}{2},\ y = r\sin\varphi - \frac{1}{2}.$$

Якобиан такой замены будет такой же, как и полярной, т.е. равен r. Итак, масса тела

$$m = \iint\limits_D\int dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} rdr \int\limits_{r^2 - r(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{1}{2}}^{1 - r(\cos\varphi + \sin\varphi)} dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2}r - r^3\right) dr = \frac{\pi}{8}.$$

Координаты центра масс

$$x_C = y_C = \frac{1}{m}\iint\limits_D\int x\,dxdydz =$$

$$= \frac{1}{m}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\left(r\cos\varphi - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - r^2\right) dr = -\frac{1}{2},$$

$$z_C = \frac{1}{m}\iiint\limits_D z\,dxdydz =$$

$$= \frac{1}{m}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dr \int\limits_{r^2 - r(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{1}{2}}^{1 - r(\cos\varphi + \sin\varphi)} rz\,dz =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\left(1 - 2r(\cos\varphi + \sin\varphi) + r^2 + \frac{1}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1 - r^2 - \frac{1}{2}\right) dr = \frac{5}{6}.$$

Таким образом, получили, что координаты центра масс $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right)$.

Пример. Найти массу и момент инерции однородного (с единичной плотностью) тела D, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 2z,\ x^2 + y^2 = z^2$$

относительно прямой l:

$$x = 0,\ z = 4.$$

Решение. Масса тела равна

$$m = \iiint\limits_D dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} dr \int\limits_{\frac{r^2}{2}}^{r} rdz =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{2}\left(r^2 - \frac{r^3}{2}\right) dr = \frac{4\pi}{3}.$$

Момент инерции тела относительно прямой l равен

$$I_l = \iiint\limits_D d_l^2 \, dxdydz,$$

где d_l – расстояние от точки (x, y, z) тела D до прямой l. Квадрат этого расстояния находим по формуле $d_l^2 = x^2 + (z-4)^2$, следовательно

$$I_l = \iiint\limits_D \left(x^2 + (z-4)^2\right) \, dxdydz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 dr \int\limits_{\frac{r^2}{2}}^{r} r \left(\cos^2 \varphi + (z-4)^2\right)^2 dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(r^4 \cos^2 \varphi - \frac{r^5}{2} \cos^2 \varphi + r\frac{(r-4)^3}{3} - r\frac{\left(\frac{r^2}{2} - 4\right)^3}{3} \right) dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{5} r^5 \cos^2 \varphi - \frac{r^6}{12} \cos^2 \varphi + \frac{(r-4)^5}{15} + \right.$$

$$\left. + \frac{4(r-4)^4}{12} - \frac{\left(\frac{r^2}{2} - 4\right)^4}{24} \right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \frac{40\pi}{3}.$$

Задачи.

103. Найти координаты центра масс однородной (с единичной плотностью) плоской фигуры:

$$\text{а) } \Omega = \left\{ \frac{y^2}{a^2} \le x \le 2a - y, \; a > 0 \right\},$$

$$\text{б) } \Omega = \left\{ y \le \frac{a^2}{x}, \; \frac{y^2}{8a} \le x \le 2a, \; a > 0 \right\},$$

$$\text{в})^* \ \Omega = \left\{\sqrt{x} + \sqrt{y} \le \sqrt{a},\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\},$$

$$\text{г}) \ \Omega = \left\{x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$$

104. Найти момент инерции относительно координатных осей и относительно начала координат однородной (с единичной плотностью) плоской фигуры Ω, если

$$\text{а}) \ \Omega = \left\{x^2 + y^2 \le a^2,\ |y| \le x \operatorname{tg} \alpha,\ \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ a, \alpha - const\right\},$$

$$\text{б}) \ \Omega = \left\{(x-a)^2 + (y-a)^2 \ge a^2,\ a \ge x \ge 0,\ a \ge y \ge 0\right\},$$

$$\text{в}) \ \Omega = \left\{\frac{x}{a} + \frac{y}{c} \le 1,\ \frac{x}{b} + \frac{y}{c} \ge 1,\ y \ge 1,\ a > b > 0,\ c > 0\right\},$$

$$\text{г})^* \ \Omega = \left\{xy = a^2,\ xy = 2a,\ x = 2y,\ y = 2x,\ x > 0,\ y > 0\right\}.$$

105. Найти моменты инерции относительно координатных осей однородных (с единичной плотностью) тел:

$$\text{а}) \ D = \{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c\},$$

$$\text{б}) \ D = \{x^2 + y^2 \le R^2,\ 0 \le z \le h\},$$

$$\text{в}) \ D = \left\{0 \le z \le h(R - \sqrt{x^2 + y^2})\right\},$$

$$\text{г}) \ D = \{x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ z \ge 0\}.$$

106. Найти координаты центра масс тела Ω с плотностью $\rho(x, y, z)$, если

$$\text{а}) \ \Omega = \{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a\},\ \rho(x, y, z) = (x + y + z)^2,$$

$$\text{б}) \ \Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ x \ge 0\},\ \rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\text{в}) \ \Omega = \{R^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4R^2,\ y \ge 0\},\ \rho = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\text{г}) \ \Omega = \left\{\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le h\right\},\ \rho(x, y, z) = z^2,$$

д)* $\Omega = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ 0 \le z \le h\},\ \rho(x,y,z) = z.$

3.3 Приложения кратных интегралов к физике.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^2$ задана область Ω и функция $\mu(\xi,\eta)$, $(\xi,\eta) \in \Omega$.

Определение. Логарифмическим потенциалом в точке $M(x,y)$ называется интеграл

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} \mu(\xi,\eta) \ln r \, d\xi d\eta,$$

где $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ – расстояние от точки (x,y) до точки (ξ,η). Функцию μ называют плотностью (например, плотность масс, плотность электрического заряда).

Определение. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана область G и функция $\rho(\xi,\eta,\zeta) \in G$. Ньютоновским потенциалом в точке M с координатами (x,y,z) называют интеграл

$$u(x,y,z) = k \iiint\limits_{G} \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta,$$

где $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$ – расстояние от точки (x,y,z) до точки (ξ,η,ζ), $k = const$. Функцию ρ называют плотностью (например, плотность масс, плотность электрического заряда). Если ρ – плотность масс, то ньютонов потенциал – это потенциал гравитационного поля материального тела G.

Определение. Если ньютонов потенциал $u(x,y,z)$ определен в области G, то говорят, что в G задано поле с ньютоновым потенциалом $u(x,y,z)$. Напряженностью этого поля в точке $M(x,y,z)$ называют вектор

$$\overrightarrow{E}(x,y,z) = k \iiint\limits_{G} \frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|^3} \rho(\xi,\eta,\zeta) d\xi d\eta d\zeta,$$

где $N = N(\xi, \eta, \zeta)$, $\overrightarrow{MN} = (\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$,

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}\,.$$

Определение. Пусть потенциал определен плотностью $\rho(\xi, \eta, \zeta)$, заданной в области G, и пусть в поле с этим потенциалом находится область G_1 с заданной в ней плотностью $\rho_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$. Силой, действующей на G_1, называют вектор

$$\overrightarrow{F} = \int\int\limits_{G_1}\int \overrightarrow{E}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\rho_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1.$$

Определение. Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ – материальная точка с массой m находится в гравитационном поле напряженностью $\overrightarrow{E}(x, y, z)$. Тогда силой, действующей на материальную точку M, называется вектор

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{E}(x_0, y_0, z_0).$$

Аналогично определятся сила, действующая на точечный заряд, находящийся в электростатическом поле.

Пример. Гравитационное поле создано полым шаром G с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2, имеющим плотность

$$\rho(x, y, z) = \frac{\rho_0}{r}, \quad \rho_0 = const,$$

где r – расстояние от центра шара до точки (x, y, z). Найти силу, действующую на материальную точку M массы m, удаленную на расстояние R от центра шара, $R > R_2$.

Решение. Поместим начало системы координат в центр шара, ось Oz направим через точку M. Тогда точка M имеет координаты $(0, 0, R)$. Область, занимаемая шаром, описывается уравнениями

$$R_1 \le \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \le R_2.$$

Пусть $N(\xi, \eta, \zeta)$ – произвольная точка шара, тогда $\overrightarrow{MN} = (\xi, \eta, \zeta - R)$, $|\overrightarrow{MN}| = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + R^2 - 2\zeta R = r^2 + R^2 - 2\zeta R$, где $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

Следовательно, составляющие вектора сил $\overrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z)$ вычисляются по формулам

$$F_x = m\rho_0 \int\int\limits_G\int \frac{\xi\, d\xi d\eta d\zeta}{r(r^2+R^2-2\zeta R)^{3/2}},$$

$$F_y = m\rho_0 \int\int\limits_G\int \frac{\eta\, d\xi d\eta d\zeta}{r(r^2+R^2-2\zeta R)^{3/2}},$$

$$F_z = m\rho_0 \int\int\limits_G\int \frac{(\zeta - R)\, d\xi d\eta d\zeta}{r(r^2+R^2-2\zeta R)^{3/2}}.$$

Очевидно, что первый и второй интегралы равны нулю, т.е. $F_x = F_y = 0$. В третьем интеграле перейдем к сферическим координатам

$$\xi = r\cos\varphi\cos\psi,\ \eta = r\sin\varphi\cos\psi,\ \zeta = r\sin\psi.$$

В результате получим

$$F_z = m\rho_0 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{(r\,\sin\psi - R)r\,\cos\psi\, d\varphi d\psi dr}{(r^2+R^2-2rR\,\sin\psi)^{3/2}} =$$

$$= 2\pi m\rho_0 \int\limits_{R_1}^{R_2} dr \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r(r\sin\psi - R)\,\cos\psi\, d\psi}{(r^2+R^2-2rR\,\sin\psi)^{3/2}}.$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену переменных

$$t = r^2 - R^2 - 2rR\,\sin\psi,$$

тогда

$$F_z = \frac{\pi m\rho_0}{2R^2}\int\limits_{R_1}^{R_2} dr \int\limits_{(R-r)^2}^{(R+r)^2} \Big((r^2-R^2)t^{-3/2} - t^{-1/2}\Big)\, dt =$$

$$= -\frac{2\pi m\rho_0}{R^2}\left(R_2^2 - R_1^2\right).$$

Пример. Найти ньютонов потенциал в точке $P(0,0,z)$, $z>0$ неоднородного шара $x^2+y^2+z^2=1$, если его плотность $\rho(\xi,\eta,\zeta)=k\xi^2$, $k-const$, т.е. плотность пропорциональна квадрату расстояния точки шара до плоскости Oxy.

Решение. Ньютонов потенциал вычисляется по формуле

$$u(0,0,z) = k\iiint\limits_G \frac{\zeta\, d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-z)^2}}.$$

Перейдем к сферическим координатам, тогда

$$u(0,0,z) = k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^R \frac{r^4 \sin^2\psi\, \cos\psi\, dr}{\sqrt{r^2\cos^2\psi + (r\sin\,\psi - z)^2}} =$$

$$= 2\pi k\int\limits_0^R r^4 dr \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\psi\,\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{r^2+z^2-2rz\,\sin\,\psi}}.$$

Сделаем замену переменных $t = r^2+z^2-2rz\sin\,\psi$, тогда получим

$$u(0,0,z) = \frac{\pi k}{4}\int\limits_0^R dr \int\limits_{(z-r)^2}^{(z+r)^2} \frac{r(r^2+z^2-t^2)^2}{z^3 t^{1/2}}\, dt = \frac{4k\pi}{15z^3}\left(\frac{2}{7}R^7 + z^2R^5\right).$$

Задачи.

107. Найти логарифмический потенциал, если $\Omega = \{x^2+y^2 \le 1\}$ и

$$\text{а) } \mu(x,y)=1, \quad \text{б) } \mu(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

108. Найти ньютонов потенциал в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, создаваемый шаром с плотностью $\rho_0 = const$ и радиусом R.

109. Найти силу, с которой конус с плотностью $\rho_0 = const$, высотой H и радиусом основания R притягивает точку массой m, расположенной в вершине конуса.

110. Найти силу, с которой цилиндр с плотностью $\rho_0 = const$, высотой H и радиусом R притягивает материальную точку массой m, расположенной

а) в центре основания цилиндра,

б) на границе основания цилиндра.

111. Найти силу притяжения материальной точки массой m с координатами $(0, 0, h)$ материальным кругом

$$\Omega = \{x^2 + y^2 \leq R^2,\ z = 0\},$$

по которому равномерно распределена масса с поверхностной плотностью $\rho_0 = const$.

4. Примеры контрольных работ

4.1 Контрольная работа №1.

1. Используя определение меры Жордана, вычислить меру множества F на числовой прямой $\mathbb{R}$, если

$$1.1.\ F = \left\{ \frac{1}{10^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$1.2.\ F = \left\{ 1 - \frac{1}{10^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$1.3.\ F = \left\{ 1 + \frac{1}{10^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$1.4.\ F = \left\{ 1 - \frac{1}{10^{n+1}} \mid n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$1.5.\ F = \left\{ \frac{(-1)^n}{10^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$1.6.^*\ F = [0, \sqrt{2});$$

$$1.7.^*\ F = [0, \sqrt{3}].$$

2. Дано множество $M \subset \mathbb{R}^2$. Найти двумерную меру M, если

2.1. а) $M -$ точка $(0,1)$,
б) $M = \{(x,y) \mid x \in (0,1],\ y = 0\}$;

2.2. а) $M -$ точка $(1,0)$,
б) $M = \{(x,y) \mid x \in (0,1),\ y = 0\}$;

2.3. а) $M -$ точка $(1,1)$,
б) $M = \{(x,y) \mid x \in (0,1],\ y = 1\}$;

2.4. а) $M -$ точка $(0,0)$,
б) $M = \{(x,y) \mid x = 0,\ y \in [0,1]\}$;

2.5. а) $M -$ точка $(0,0)$,
б) $M = \{(x,y) \mid x = 0,\ y \in (0,1)\}$;

2.6*. а) $M -$ точка $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, б) $M = \{(x,y) \mid x = 0,\ y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$;

2.7*. а) $M -$ точка $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$,

б) $M = \{(x,y) \mid x \in [0,1] \cap \mathbb{Q},\ y = 0\}$;

3. Пусть Ω — квадрат $[0,1] \times [0,1]$ на плоскости, τ — разбиение квадрата прямыми $x = i/n$, $y = j/n$, $i, j = 1, \ldots, n$. Составить интегральную сумму и суммы Дарбу функции $f(x,y)$ для разбиения τ, если:

$$3.1.\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2};$$

$$3.2.\ f(x,y) = (x^2+y^2)^2;$$

$$3.3.\ f(x,y) = e^{x^2+y^2};$$

$$3.4.\ f(x,y) = \sin{(x^2+y^2)};$$

$$3.5.\ f(x,y) = \cos{(x^2+y^2)};$$

$$3.6^*.\ f(x,y) = e^{x^2-y^2};$$

$$3.7^*.\ f(x,y) = \sin{(x^2-y^2)}.$$

4. Пусть Ω — круг $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$. Оценить значение интеграла $\int\limits_\Omega\int f(x,y)\,dxdy$, если:

$$4.1.\ f(x,y) = x^2+xy+y^2-12x-3y;$$

$$4.2.\ f(x,y) = 3+2x-y-x^2+xy-y^2;$$

$$4.3.\ f(x,y) = 3x+6y-x^2-xy+y^2;$$

$$4.4.\ f(x,y) = 4x^2-4xy+y^2+4x-2y+1;$$

$$4.5.\ f(x,y) = x^2+2y^2+3xy-4x-5y;$$

$$4.6^*.\ f(x,y) = x^2\cos\,\pi(x^2+y^2);$$

$$4.7^*.\ f(x,y) = y^2\sin\,\pi(x^2+y^2).$$

4.2 Контрольная работа №2.

1. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

$$1.1.\ \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dy;$$

$$1.2.\ \int_0^1 dy \int_0^{y^2+y} f(x,y)\,dx;$$

$$1.3.\ \int_{-1}^1 dx \int_{2x}^{\frac{7x+10}{6}} f(x,y)\,dy;$$

$$1.4.\ \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-1}^{\cos x} f(x,y)\,dy;$$

$$1.5.\ \int_1^2 dx \int_{\ln x}^{3x} f(x,y)\,dy;$$

$$1.6^*.\ \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int_{\sqrt{12-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx;$$

$$1.7^*.\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} dx \int_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)\,dy.$$

2. Вычислить двойной интеграл:

$$2.1.\ \iint_{\Omega} (x+y)\,dxdy,\ \Omega = \{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1,\ y\ge x\};$$

2.2. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} xy\,dxdy,\ \Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 25,\ 3x+y \ge 5\};$

2.3. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} x\,dxdy,$

$$\Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2,\ x^2-y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\};$$

2.4. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} (2y-x)\,dxdy,\ \Omega = \{(x,y) \mid y(y-x) \le 2,\ x(x+y) \le 3\};$

2.5. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} xy\,dxdy,\ \Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1,\ (x-1)^2+y^2 \le 1\};$

2.6*. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} x\,dxdy,$

$$\Omega = \{(x,y) \mid y \ge 0,\ \cos x \ge 0,\ \sin x \ge 0,\ 0 \le x \le \pi\};$$

2.7*. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} xy\,dxdy,$

$$\Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1,\ (x-1)^2+y^2 \le 1,\ x^2+(y-1)^2 \le 1\}.$$

3. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы:

3.1. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \cos\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,\ \Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\};$

$$3.2.\ \iint\limits_{\Omega} \frac{dxdy}{x^2+y^2-1},\ \Omega = \{(x,y) \mid 9 \le x^2+y^2 \le 25\};$$

$$3.3.\ \iint\limits_{\Omega} e^{x^2+y^2}\,dxdy,\ \Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\};$$

$$3.4.\ \iint\limits_{\Omega} \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy,\ \Omega = \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ \};$$

$$3.5.\ \iint\limits_{\Omega} \frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\,dxdy,\ \Omega = \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 9\};$$

$$3.6^*.\ \iint\limits_{\Omega} y^2\,dxdy,\ \Omega = \{(x,y) \mid 2x \le x^2+y^2 \le 6x,\ y \le x\};$$

$$3.6^*.\ \iint\limits_{\Omega} x\,dxdy,\ \Omega = \{(x,y) \mid x \le x^2+y^2 \le 2x,\ y \ge 0\}.$$

4. Вычислить тройные интегралы:

$$4.1.\ \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+y+z\right)dxdydz,$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\};$$

$$4.2.\ \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2y+z\right)dxdydz,$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\};$$

$$4.3.\ \iiint\limits_{\Omega} xyz\,dxdydz,$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\};$$

$$4.4.\ \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\,dxdydz,$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1,\ -1 \le z \le 1\};$$

$$4.5.\ \iiint\limits_{\Omega} (xy+yz+zx)\,dxdydz,$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\};$$

$$4.6^*.\ \iiint\limits_{\Omega} xy\,dxdydz,$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le y \le z \le 1\};$$

$$4.7^*.\ \iiint\limits_{\Omega} ze^x\,dxdydz,$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3\}.$$

4.3 Контрольная работа №3.

1. Исследовать на сходимость несобственный двойной интеграл:

$$1.1.\ \iint\limits_{\Omega} \frac{x}{y}\,dxdy,\ \Omega = \{(x,y) \mid x \ge 1,\ y \ge 1\};$$

$$1.2.\ \iint\limits_{\Omega} \frac{y}{x}\,dxdy,\ \Omega = \{(x,y) \mid 0 < x \le 1,\ 0 < y \le 1\};$$

$$1.3.\ \iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\ \Omega = \{(x,y) \mid x \ge 1,\ y \ge 1\};$$

1.4. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\ \Omega = \{(x,y) \mid 0 < x \le 1, 0 < y \le 1\};$

1.5. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy,\ \Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \ge 1\};$

1.6*. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^4}}\,dxdy,\ \Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \ge 1\};$

1.7*. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^4}}\,dxdy,\ \Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\};$

2. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми:

2.1. $4y = x^2 - 4x,\ x = y + 3;$

2.2. $y^2 = 10x + 25,\ y^2 = 9 - 6x;$

2.3. $y^2 = 2x + 1,\ y^2 = 1 - 2x;$

2.4. $x^2 + y^2 = 4,\ y^2 = 4 - 4x,\ x < 1;$

2.5. $y = \cos x,\ y = \cos 2x,\ 0 \le x \le \dfrac{2\pi}{3};$

2.6*. $2x^2 + 2y^2 = 2x + 1,\ x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 \ge 1;$

2.7*. $(x + y)^2 + x^2 = 1.$

3. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

3.1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$

3.2. $(x^2 + y^2)^2 = y^2;$

3.3. $x^2 + y^2 = x + y;$

$$3.4.\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1,\ x+y=1;$$

$$3.5.\ (x^2+y^2)^2=2xy;$$

$$3.6^*.\ x^4+y^4=2xy;$$

$$3.7^*.\ x^3+y^3=xy.$$

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$4.1.\ x^2+y^2=x,\ z=x^2+y^2,\ z=0;$$

$$4.2.\ y=x^2,\ y=1,\ z=0,\ z=x^2+y^2;$$

$$4.3.\ x+y+z=1,\ 4x+y=1,\ 4x+3y=3,\ y=0,\ z=0;$$

$$4.4.\ x^2+y^2=\pi,\ z=\sin{(x^2+y^2)}, z=0;$$

$$4.5.\ z^2+y^2=1,\ x+y+z=1,\ x+y+z=-1;$$

$$4.6^*.\ x^2+y^2=1,\ x^2+z^2=1;$$

$$4.7.\ z^2-x^2=1,\ z^2-y^2=1,\ z=\sqrt{2}.$$

Список литературы

1. Ильин, В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. — М.: Наука, 1973. Ч. 2. 448 с.

2. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. Гармонический анализ: Учебник. / Л.Д. Кудрявцев. — М.: Физматлит, 2002. Т. 2. 400 с.

3. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович. — М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2005. 558 с.

4. Кудрявцев, Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: Учеб. пособие для вузов / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. — М.: Наука. Физматлит, 1995. 496 с.

5. Виноградова, И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн. Кн. 2. Ряды, несобственные интегралы, кратные и поверхностные интегралы: Учеб. пособие для университетов, ред. вузов / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Са -довничий; Под ред. В.А. Садовничего — 2-е изд., перераб. — М.: Высшая школа, 2002. 712 с.

6. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: Учеб. пособие для втузов. — 5-е изд., испр. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. — М.: Высшая школа, 1999. 416 с.

7. Ярахмедов, Г.Я. Математический анализ. Многомерный математический анализ / Г.Я. Ярахмедов. Новосибирск, 2001.

Приложение.

Таблица неопределенных интегралов элементарных функций

$$\int 0 \cdot dx = C,$$

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \backslash \{-1\},$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln\,|x+a| + C,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln\,a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$\int \sin\,x\,dx = -\cos\,x + C,$$

$$\int \cos\,x\,dx = \sin\,x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\,|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} + C,\ a \neq 0.$$

Некоторые интегралы, зависящие от параметра

1. Интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

где

$$\operatorname{sign}\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha > 0, \\ 0, & \text{если } \alpha = 0, \\ -1, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$$

2. Интеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие ... 3
1. Мера Жордана ... 4
    1.1. Сеть в $\mathbb{R}^n$. Кубы и элементарные множества ... 4
    1.2. Мера элементарных множеств ... 6
    1.3. Мера Жордана произвольного ограниченного множества ... 7
    1.4. Критерий измеримости. Цилиндрические множества ... 12
    1.5. Основные свойства меры Жордана ... 14
2. Кратные интегралы ... 16
    2.1. Разбиение измеримых множеств ... 17
    2.2. Интегральные суммы. Определение кратного интеграла ... 18
    2.3. Верхние и нижние суммы Дарбу. Критерий интегрируемости ... 22
    2.4. Свойства кратных интегралов ... 26
    2.5. Сведение двойного интеграла к повторному ... 29
    2.6. Сведение тройного и n-кратного интеграла к повторным ... 38
    2.7. Замена переменных в кратных интегралах ... 47
    2.8. Криволинейные координаты ... 51
    2.9. Несобственные кратные интегралы ... 61
3. Геометрические и физические приложения кратных интегралов ... 69
    3.1. Геометрическое приложение кратных интегралов ... 69
    3.2. Приложение кратных интегралов к геометрии масс ... 77
    3.3. Приложение кратных интегралов к физике ... 84
4. Примеры контрольных работ ... 89
    4.1. Контрольная работа №1 ... 89
    4.2. Контрольная работа №2 ... 90
    4.3. Контрольная работа №3 ... 94
Список литературы ... 97

Приложение. 98