Е.М. РУДОЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(теория, примеры, упражнения)

2008

Предисловие

Учебное пособие состоит из пяти глав, отражающих основные теоретические и практические аспекты университетского курса математического анализа, читаемого в первом семестре второго курса для студентов математического факультета Новосибирского государственного педагогического университета, обучающихся по специальности «информатика-математика». В первых четырех главах приведены основные определения и теоремы, а также примеры решения задач. Пятая глава содержит три контрольные работы, которые рекомендуется провести в течение семестра. Для каждой контрольной работы составлено семь вариантов задач.

Большинство задач, включенных в пособие, содержится в качестве упражнений и примеров в различных изданиях (см. список литературы). Часть примеров составлена специально для настоящего издания.

Нумерация упражнений сквозная и не зависит от номера главы и параграфа. Сложные задачи помечены звездочкой.

При составлении упражнений автор попытался собрать задачи, соответствующие теоретическому курсу. В основном сборник содержит вычислительные задачи, но есть и чисто теоретические, которые иногда помечены звездочкой как сложные, так как решение таких задач зачастую вызывает трудности у студентов.

В конце учебного пособия приведены таблица производных основных элементарных функций, формулы разложения в ряд Тейлора некоторых элементарных функций и формулы из тригонометрии, которые могут быть полезны при решении задач настоящего пособия.

1. Функции нескольких переменных

1.1 Определение n-мерного пространства.

Определение. Множество всевозможных упорядоченных систем $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из n действительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ называется n-мерным арифметическим евклидовым пространством и обозначается $\mathbb{R}^n$, если для любых его элементов x, y и для любых действительных чисел α, β определены линейная комбинация $\alpha x + \beta y$ и скалярное произведение (x, y) по правилам

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n),$$

$$(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

соответственно.
Элементы $x = (x_1, \ldots, x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ называются векторами, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координатами вектора x.

Определение. Длиной вектора x называется число $|x|$, где

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

Лемма. Для скалярного произведения векторов справедливо следующее неравенство – *неравенство Коши-Буняковского*:

$$|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|.$$

В координатной записи оно выглядит следующим образом:

$$\Big| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Big| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Следствие. Для любых векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

первое из которых называется *неравенством треугольника.*

Определение. Расстояние $\rho(x, y)$ между двумя векторами x, y определяется по формуле

$$\rho(x, y) = |x - y|,$$

которое в координатной записи выглядит следующим образом:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Определение. Множество всех упорядоченных систем $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, для которых определено расстояние, называется n-мерным арифметическим евклидовым точечным пространством и также обозначается через $\mathbb{R}^n$. Элементы $x = (x_1, \ldots, x_n)$ называются точками, а числа $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, – координатами.

Пример. Доказать, что скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ обладает свойством: $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = (0, \ldots, 0)$, то есть x – нулевой вектор.

Решение. По определению скалярного произведения имеем

$$(x, x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0$$

как сумма конечного числа неотрицательных чисел.

Пусть теперь $(x, x) = 0$, то есть $x_1^2 \ldots + x_n^2 = 0$. Покажем, что x – нулевой вектор. Предположим противное, то есть существует такое j, что $x_j \neq 0$. Тогда $x_j^2 > 0$, и поэтому $(x, x) = x_1^2 + \ldots + x_j^2 + \ldots + x_n^2 \geq x_j^2 > 0$. Противоречие.

Пусть теперь x – нулевой вектор, то есть $x_i = 0$ для всех i: $1 \leq i \leq n$. Очевидно, что $(x, x) = 0$.

Задачи.

1. Доказать, что расстояние $\rho(x, y)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ обладает следующими свойствами:

а) $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

б) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$;

в) $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$ для любых $x,y,z \in \mathbb{R}^n$.

Замечание. В теории функционального анализа любая функция, обладающая свойствами а)– в) называется расстоянием. Например, легко проверить, что функция

$$\rho_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

удовлетворяет а)– в).

2. Доказать, что скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ обладает свойствами ($x,y,z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$):

а) $(x,y) = (y,x)$;

б) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$;

в) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$.

3. Доказать неравенство Коши-Буняковского:

$$|(x,y)| \le |x| \cdot |y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n.$$

1.2 Типы множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение. Множество $B(x^0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x,x^0) < r\}$ называется открытым n-мерным шаром радиуса r с центром в точке x^0.

Определение. Множество $\bar{B}(x^0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x,x^0) \le r\}$ называется замкнутым n-мерным шаром радиуса r с центром в точке x^0.

Замечание. Двумерным шаром являться круг; одномерным шаром – интервал.

Определение. Множество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x,x^0) = r\}$ называется $n-1$-мерной сферой радиуса r с центром в точке x^0.

Определение. Пусть $d_i \in \mathbb{R}$, $d_i > 0$, $1 \le i \le n$ и $y \in \mathbb{R}^n$. Множество $P(y;d_1,\dots,d_n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i - y_i| < d_i,\ 1 \le i \le n\}$ называется n-мерным параллелепипедом с центром в точке y.

Если $d_1 = \ldots = d_n = d$, то множество $P(y;d) = P(y;d,\dots,d)$ называется n-мерным кубом с центром в точке y и с ребром $2d$.

Определение. ε-окрестностью точки x^0 называется открытый шар с центром в точке x^0 и радиусом ε; обозначается $U_\varepsilon(x^0)$ или $U(x^0)$.

Определение. Точка $x \in M$ множества M называется внутренней, если существует некоторая ε-окрестность этой точки, целиком содержащаяся во множестве M.

Определение. Точка x называется граничной точкой множества M, если в любой ее окрестности есть точки, принадлежащие множеству M, и точки, не принадлежащие множеству M. Совокупность всех граничных точек множества M называется его границей и обозначается ∂M.

Определение. Множество M называется открытым множеством, если любая точка этого множества является внутренней точкой.

Определение. Множество M называется ограниченным, если существует некоторый шар, целиком содержащий множество M.

Определение. Точка x называется точкой прикосновения множества M, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку множества M.

Замечание. Точки прикосновения могут как принадлежать множеству, так и не принадлежать ему.

Определение. Точка x называется предельной точкой множества M, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку множества M, отличную от x.

Замечание. Любая предельная точка множества является его точкой прикосновения. Обратное в общем случае не верно.

Определение. Точка $x \in M$ называется изолированной точкой множества M, если существует окрестность точки x, не содержащая никаких других точек множества M, кроме самой точки x.

Определение. Множество M называется замкнутым, если оно содержит все свои точки прикосновения.

Определение. Множество M называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в этом множестве.

Пример. В пространстве $\mathbb{R}$ дано множество

$$M = (0,1] \cup \{2\}.$$

Указать внутренние точки множества M, а также точки прикосновения, изолированные, предельные и граничные точки множества M.

Решение. Внутренними точками являются все точки интервала $(0,1)$, точками прикосновения – все точки отрезка $[0,1]$ и точка $x = 2$. Множество M имеет одну изолированную точку $x = 2$. Предельными точками являются все точки отрезка $[0,1]$, граничными – $x = 0, 1, 2$.

Пример. Доказать, что объединение двух открытых множеств является открытым множеством.

Решение. Пусть M и N – открытые множества. Пусть $K = M \cup N$ – объединение этих множеств. Рассмотрим произвольную точку x, принадлежащую множеству K. Тогда точка x принадлежит или множеству M, или множеству N. В силу того, что множества M и N открытые, то существует ε-окрестность точки x, целиком содержащаяся или в M, или N. Но это означает, что эта же окрестность содержится и в объединении K этих множеств. Таким образом, для произвольной точки x существует некоторая ее окрестность, содержащаяся в K. Следовательно, $K = M \cup N$ – открытое множество.

Задачи.

4. Доказать, что пересечение двух открытых множеств является открытым множеством.

5. Доказать, что объединение двух замкнутых множеств является замкнутым множеством.

6. Доказать, что пересечение двух замкнутых множеств является замкнутым множеством.

7*. Верно ли утверждение задачи 4 для случая пересечения бесконечного числа открытых множеств.

Указание: В $\mathbb{R}$ рассмотреть систему множеств

$$X_n = \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right).$$

8^*. Верно ли утверждение задачи 5 для случая объединения бесконечного числа замкнутых множеств.
Указание: В $\mathbb{R}$ рассмотреть систему множеств
$$X_n = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right].$$

9. В пространстве $\mathbb{R}$ дано множество M. Указать внутренние точки множества M, а также точки прикосновения, изолированные, предельные и граничные точки множества M:

а) $M = (1,3) \cup (4,5)$;
б) $M = \{0\} \cup [1,2]$;
в) $M = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\}$;
г) $M = (0,+\infty)$;
д) $M = (-\infty,1]$.

10. В пространстве $\mathbb{R}^2$ дано множество N. Указать внутренние точки множества N, а также точки прикосновения, изолированные, предельные и граничные точки множества N:

а) $N = [1,2] \times [1,2]$;
б) $N = (0,1) \times [1,3]$;
в) $N = (0,1) \times (0,1)$;
г) $N = (-\infty,0) \times (0,+\infty)$;
д)*. $N = \{0\} \times [0,1]$;
е)*. $N = \{0\} \times (0,1)$;

11^*. Доказать, что граница каждого множества является замкнутым множеством.

12^*. Доказать, что множество является замкнутым тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

13^*. Доказать, что множество является замкнутым тогда и только тогда, когда оно содержит все свои граничные точки.

14. Доказать, что пространство $\mathbb{R}^n$ является одновременно открытым и замкнутым множеством.

15^*. Доказать, что множество
$$M = \mathbb{Q} \cap (0,1),$$
где $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел, не содержит внутренних точек. Найти границу этого множества.

1.3 Последовательности в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ последовательность точек, которую будем обозначать через $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ или просто $\{x^m\}$.

Определение. Последовательность $\{x^m\}$ называется сходящейся, если существует такая точка $x \in \mathbb{R}^n$, что

$$\lim_{m\to\infty} \rho(x^m, x) = 0.$$

При этом точка x называется пределом последовательности $\{x^m\}$.

Лемма. Для того, чтобы последовательность $\{x^m\} \subset \mathbb{R}^n$ сходилась к точке $x \in \mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы числовые последовательности $\{x_1^m\}, \dots, \{x_n^m\}$ сходились к $x_1, \dots, x_n$ соответственно, где $x_1^m, \dots, x_n^m$ координаты m-го элемента последовательности x^m, а $x_1, \dots, x_n$ координаты точки x.

Определение. Последовательность $\{x^m\} \subset \mathbb{R}^n$ называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое натуральное число M, что для любого $m \geq M$ и для любого натурального числа p выполняется неравенство $\rho(x^m, x^{m+p}) < \varepsilon$.

Теорема. Последовательность $\{x^m\} \subset \mathbb{R}^n$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Пример. Исследовать сходимость и найти предел последовательности $\{x^m\} \subset \mathbb{R}^2$ (при условии, что он существует), если

$$x^m = \Big(\frac{1}{m}, \frac{m-1}{m}\Big)$$

Решение. Для того, чтобы исследовать сходимость последовательности точек в пространстве $\mathbb{R}^2$ необходимо и достаточно исследовать сходимость последовательностей соответствующих координат. Рассмотрим две последовательности $\{x_1^m\}$ и $\{x_2^m\}$, где

$$x_1^m = \frac{1}{m}, \quad x_2^m = \frac{m-1}{m}.$$

Имеем, что

$$\lim_{m\to\infty} x_1^m = 0, \quad \lim_{m\to\infty} x_2^m = 1,$$

и поэтому последовательность $\{x^m\}$ сходится и

$$\lim_{m\to\infty} x^m = x, \quad \text{где} \quad x = (0,1)$$

Задачи.

16. Исследовать сходимость и найти предел последовательности $\{x^m\}$ (при условии, что он существует), если

$$\text{а) } x^m = \Bigl(\frac{1}{m+1}, 1\Bigr);$$

$$\text{б) } x^m = \Bigl(\frac{1}{m+1}, \frac{m+1}{m-1000}\Bigr);$$

$$\text{в) } x^m = \Bigl(\sqrt{m+1} - \sqrt{m}, \frac{m-1}{m}, \frac{5m^2-100}{m^2-1000}\Bigr);$$

$$\text{г) } x^m = \Bigl(\frac{(-1)^m}{m}, (1+\frac{1}{m})^m, \frac{m}{m^2+1}\Bigr);$$

$$\text{д) } x^m = \Bigl((-1)^m, \frac{(-1)^m}{m}\Bigr);$$

$$\text{е) } x^m = (\sin m, m, 1);$$

$$\text{ж) } x^m = \Bigl(m\sin\frac{1}{m}, \frac{\sin m}{m}, \frac{1}{m}\Bigr);$$

$$\text{з) } x^m = \Bigl(m, \frac{1}{\sqrt{m}}\Bigr).$$

17. Исследовать сходимость следующих последовательностей:

$$\text{а) } x^m = \Bigl(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}, 1, \frac{1}{m^2}\Bigr);$$

$$\text{б) } x^m = \Bigl(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}, \frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}\Bigr);$$

в) $x^m = \Big(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}, \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2}\Big);$

г) $x^m = \Big(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k}, \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}\Big);$

д) $x^m = \Big(\sum_{k=1}^{m} (-1)^k, \frac{1}{1000m}, \frac{1}{m^2}\Big);$

е) $x^m = \Big(\sum_{k=1}^{m} (-1)^k, \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1}\Big)$

1.4 Функции нескольких переменных.

Пусть дано множество $M \subset \mathbb{R}^n$, и пусть каждой точке $x \in M$ ставится в соответствие число $u \in \mathbb{R}$. В этом случае говорят, что на множестве M определена числовая функция:

$$u = f(x), \ x \in M \quad \text{или} \quad u = f(x_1, \ldots, x_n), \ (x_1, \ldots, x_n) \in M.$$

Определение. Множество M называют множеством определения функции, точку x – аргументом или независимой переменной, ее координаты $x_1, ..., x_n$ – независимыми переменными, функцию $u = f(x)$ – функцией n переменных.

В дальнейшем мы, главным образом, будем рассматривать функции двух и трех переменных. При этом будут использоваться обозначения двумерной точки (x, y) и трехмерной (x, y, z) вместо (x_1, x_2) и (x_1, x_2, x_3) соответственно.

Определение. Графиком функции двух переменных называют множество

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in M, \ z = f(x, y)\}.$$

Аналогично определяется график функции трех и более переменных.

Определение. Уровнем (c-уровнем, $c \in \mathbb{R}$) функции $u = f(x)$, $x \in M \subset \mathbb{R}^n$ называют множество точек $x \in M$ таких, что

$$f(x) = c.$$

В случае $n = 2$ уровни функции называют линиями уровня; при $n = 3$ – поверхностями уровня.

Пример. Дана функция

$$f(x, y) = xy - \frac{y}{x}.$$

Найти область определения функции, вычислить значение функции в точке $(1, 1)$. Вычислить $f(y, -x)$.

Решение. Функция определена в тех и только в тех точках (x, y), первая координата которых не обращается в нуль. Таким образом, $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ – ее область определения.

Для вычисления частного значения функции нужно подставить $x = 1$, $y = 1$. В результате получим $f(1, 1) = 0$.

Для вычисления $f(y, -x)$ нужно вместо x подставить y, а вместо y подставить $(-x)$. В результате получим $f(y, -x) = -xy + \frac{x}{y}$.

Пример. Найти область определения и линии уровня функции

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y}}.$$

Решение. Функция определена в тех и только в тех точках (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенству $y > 0$. Таким образом, областью определения функции является верхняя полуплоскость.

Для нахождения линий уровня нужно для произвольного фиксированного $c \in \mathbb{R}$ найти множество точек плоскости, координаты которых x, y удовлетворяют уравнению

$$\frac{x}{\sqrt{y}} = c.$$

Если $c = 0$, то линией уровня является интервал

$$\{(x, y) \mid x = 0, \ y > 0\}.$$

Если $c \neq 0$, то линиями уровня являются параболы $y = \frac{x^2}{c^2}$ с выколотой точкой $(0, 0)$.

Пример. Выразить объем кругового конуса u как функцию его высоты x и радиуса основания y.

Решение. Объем кругового конуса равен одной трети произведения площади S его основания на высоту x. Так как $S = \pi y^2$, то искомая функция

$$u = \frac{1}{3}\pi x y^2.$$

Задачи.

18. Найти $f(1, 2)$, $f(2, -1)$, если

$$f(x, y) = \sqrt{xy^2 + x + 1}.$$

19. Найти $f(1, 2, \pi)$, $f(\pi, -1, 0)$, если

$$f(x, y, z) = \sin(xyz) + \cos(x + yz)$$

20. Найти $f(x, -y)$, $f(-x, y)$, $f(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$, если

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y}{y^2 - x}.$$

21. Найти $f(x, -y, z)$, $f(-x, y, z)$, $f(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$, если

$$f(x, y) = \frac{x + y + z}{x + y^2 z^2}.$$

22. Найти область определения функций двух переменных, заданных формулами:

$$\text{а) } f(x, y) = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y},$$

$$\text{б) } f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

$$\text{в) } f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1),$$

$$\text{г) } f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}},$$

$$\text{д) } f(x,y) = \ln \frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2},$$

$$\text{е) } f(x,y) = \frac{\ln x \ln y}{\sqrt{1-x-y}},$$

$$\text{ж) } f(x,y) = \sqrt{1-|x|-|y|},$$

$$\text{з) } f(x,y) = x^y,$$

$$\text{и) } f(x,y) = \sqrt{y \sin x}.$$

23. Найти область определения функций трех переменных, заданных формулами:

$$\text{а) } f(x,y,z) = \sqrt{x-y} + \sqrt{y-z} + \sqrt{z-x},$$

$$\text{б) } f(x,y,z) = \ln (1-x^2-y^2),$$

$$\text{в) } f(x,y,z) = \sqrt{1-|x|-|y|-|z|},$$

$$\text{г) } f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}},$$

$$\text{д) } f(x,y,z) = \ln \frac{x^2+y^2}{z-x^2-y^2},$$

$$\text{е) } f(x,y,z) = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x-y-z}},$$

$$\text{ж) } f(x,y,z) = x^{yz},$$

$$\text{з) } f(x,y,z) = \sqrt{\sin (xyz)}.$$

24. Доказать, что областью определения функции, заданной формулой

$$f(x,y,z) = \arcsin x \, \arcsin(2x+y) \arcsin(3x+2y+z),$$

является замкнутый параллелепипед.

25. Найти линии уровня функций двух переменных, заданных формулами:

$$\text{а) } f(x,y) = x-y,$$

$$\text{б) } f(x,y) = \sqrt{y-x},$$

$$\text{в) } f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2),$$

$$\text{г) } f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2},$$

$$\text{д) } f(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2},$$

$$\text{е) } f(x,y) = \ln x - \ln y,$$

$$\text{ж) } f(x,y) = \max\{|x|,|y|\},$$

$$\text{з) } f(x,y) = x^y,$$

$$\text{и) } f(x,y) = \min\{x^2,y\}.$$

26. Найти поверхности уровня функций трех переменных, заданных формулами:

$$\text{а) } f(x,y,z) = x - y + 3z,$$

$$\text{б) } f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2,$$

$$\text{в) } f(x,y,z) = e^{(1-x-y)},$$

$$\text{г) } f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\text{д) } f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2}.$$

27. Выразить площадь треугольника с данным периметром $2p$ как функцию длин двух его сторон x и y.

28. Найти $u = f(x,y)$, задающую площадь ромба u как функцию от его периметра x и суммы длин его диагоналей y. Вычислит $f(1,2)$.

29. Найти функцию $u = f(x,y)$, если u – объем прямого кругового конуса, x – длина его образующей, y – высота конуса.

30. Найти функцию $u = f(x,y)$, если u – объем прямого кругового конуса, x – длина его образующей, y – длина окружности основания.

31*. Найти функцию $u = f(x, y)$, если u – объем прямого кругового конуса, x – величина угла между образующей и плоскостью основания конуса, y – площадь сечения конуса плоскостью, параллельной основанию и проходящей через центр вписанного в конус шара.

32. Найти функцию $u = f(x, y, z)$, если u – площадь равнобочной трапеции, x, y – длины оснований, z – длина боковой стороны трапеции.

33. Найти функцию $u = f(x, y, z)$, где u – объем прямоугольного параллелепипеда, x, y – длины двух из его сторон, z – длина его диагонали.

34*. Найти $f(x, y)$, если для всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$f(x + y, x - y) = y(x + y)$$

35*. Найти $f(x, y)$, если для всех $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ выполнено

$$f\big(xy, \frac{x}{y}\big) = x^2 - y^2.$$

1.5 Предел функций нескольких переменных.

Существует два эквивалентных определения предела функции в точке: по Гейне и по Коши.

Определение. Пусть x^0 – предельная точка области определения M функции $u = f(x)$, $x \in M \subset \mathbb{R}^n$. Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x^0, если для любой последовательности точек $\{x^m\} \subset M$, сходящейся к x^0 и $x^m \neq x^0$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ числовая последовательность $f(x^m)$ сходится к a (определение предела функции по Гейне)

Определение. Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in M$, удовлетворяющих условию $0 < \rho(x, x^0) < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$ (определение предела функции по Коши)

Если число a является пределом функции $f(x)$ в точке x^0, то пишут

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = a \quad \text{или} \quad f(x) \to a \ \text{ при } \ x \to x^0.$$

В следующей теореме перечислены арифметические свойства предела функции.

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x^0 пределы a и b соответственно. Тогда в точке x^0 существуют пределы функций

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

(в случае $b \neq 0$), равные соответственно

$$a \pm b, \quad ab, \quad \frac{a}{b}.$$

Теорема. Пусть справедливо неравенство

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \text{ для всех } x \in U(x^0) \backslash \{x^0\},$$

где $U(x^0)$ – некоторая окрестность точки x^0; пусть

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = \lim_{x \to x^0} h(x) = a.$$

Тогда существует предел функции $g(x)$ в точке x^0, и этот предел равен a (теорема о промежуточной переменной).

Следствие. Если

$$\lim_{x \to x^0} |f(x)| = 0,$$

то в точке x^0 существует предел функции $f(x)$ и

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = 0.$$

Теорема. Для того, чтобы функция $f(x)$ имела предел в точке x^0, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось число $\delta > 0$ такое, что для любых точек x' и x'' из области определения функции, удовлетворяющих условиям $0 < \rho(x', x^0) < \delta$

и $0 < \rho(x'', x^0) < \delta$, выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ (критерий Коши существования предела функции).

Определение. Пусть функция $f(x, y)$ определена на параметрически заданной кривой L:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Пусть точка (x_0, y_0), принадлежащая кривой L такая, что

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0), \quad t_0 \in [\alpha, \beta].$$

Пределом функции $f(x, y)$ по кривой L в точке (x_0, y_0) называется предел

$$\lim_{t \to t_0} f(x(t), y(t)).$$

Пример. Найти предел

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-2)^2}.$$

Решение. Рассмотрим $\rho = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$. Стремление (x, y) к точке $(0, 2)$ означает, что $\rho \to 0$, поэтому

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-2)^2} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\sqrt{\rho^2 + 1} - 1}{\rho^2} = \frac{1}{2}.$$

Пример. Найти предел

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Решение. Справедливы следующая цепочка равенств и неравенств:

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |y| \leq |y|.$$

Далее, имеем

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = \lim_{y \to 0} |y| = 0$$

и
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \equiv 0.$$
Поэтому из теоремы о промежуточном значении следует, что
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

Пример. Выяснить, существует ли предел
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Решение. Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Построим две последовательности точек, сходящихся к точке $(0,0)$, но пределы значений функции на этих последовательностях не будут равны. Отсюда будет следовать, что функция не имеет передела в точке $(0,0)$.

Возьмем первую последовательность $(x_m, y_m) = (\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$, сходящуюся к $(0,0)$ при $m \to \infty$. В этом случае $f(x_m, y_m) = 0$, и поэтому $f(x_m, y_m) \to 0$ при $m \to \infty$.

Возьмем вторую последовательность $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, 0)$, также сходящуюся к $(0,0)$ при $k \to \infty$; тогда $f(x_k, y_k) = 1$, и поэтому $f(x_k, y_k) \to 1$ при $k \to \infty$. Таким образом, предел функции $f(x,y)$ в точке $(0,0)$ не существует.

Пример. Найти предел функции
$$f(x,y) = y\cos\frac{1}{y-x}$$
в точке $(0,0)$.

Решение. Заметим, что функция $f(x,y)$ не определена в точках прямой $y = x$. Во всех остальных точках плоскости справедливы неравенства
$$0 \le \left| y\cos\frac{1}{y-x} \right| \le |y|.$$

Отсюда следует, что предел функции $f(x,y)$ в точке $(0,0)$ равен нулю.

Пример. Найти предел функции

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{y^2 + x^4}$$

в точке $(0,0)$ по прямой $x = t$, $y = 2t$.

Решение. Найдем значение функции $f(x,y)$ на заданной прямой:

$$f(t,2t) = \frac{2t}{4 + t^2}.$$

Видно, что $f(t,2t) \to 0$ при $t \to 0$.

Задачи.

Вычислить предел функции $f(x,y)$ в точке $(0,0)$:

36. $$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2} - 2};$$

37. $$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 6} + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - \sqrt{x^2 + y^2}};$$

38. $$f(x,y) = (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}};$$

39. $$f(x,y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2};$$

40. $$f(x,y) = \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2};$$

41*. $$f(x,y) = \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right)^{x^2+y^2}.$$

Вычислить предел функции $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0):

42. $$f(x,y) = (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{xy}, \quad (0,0);$$

43. $$f(x,y) = (x - 2)\cos\frac{1}{y - 3}, \quad (2,3);$$

44. $f(x,y) = x + y\sin\dfrac{1}{x-1}, \quad (1,0);$

45. $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{x} + y\cos\dfrac{1}{y}, \quad (0,0).$

Показать, что при $(x,y) \to (0,0)$ функция $f(x,y)$ не имеет предела:

46. $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2};$

47. $f(x,y) = \dfrac{x}{y};$

48. $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3};$

49. $f(x,y) = \dfrac{\sin x}{\sin y}.$

50. Найти предел функции $f(x,y)$ в точке $(0,0)$ по прямой $x = \alpha t$, $y = \beta t$, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$, если

а) $f(x,y) = \dfrac{y-2x^2}{y-x^2};$

б) $f(x,y) = \dfrac{x^2\sin y + y^2\sin x}{x^4+y^2};$

в) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4};$

г) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2};$

д) $f(x,y) = x\cos\dfrac{\pi}{\beta y} + y\sin\dfrac{\pi}{2\alpha}, \quad \alpha, \quad \beta \neq 0.$

51. Найти предел функции

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^4+y^4+z^2}$$

в точке $(0,0,0)$ по прямой $x = \alpha t$, $y = \beta t$, $z = \gamma t$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \neq 0$.

52. Найти предел функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$ по кривой L, если

$$\text{а) } f(x,y) = e^{x^2+y},\ L:\ x = \sin t,\ y = t;$$

$$\text{б) } f(x,y) = x^2 + y^2,\ L:\ x = \sin t,\ y = 1 - \cos t;$$

$$\text{в) } f(x,y) = \ln(x^4 + (1-y)^4),\ L:\ x = \sqrt{\sin t},\ y = 1 - \sqrt{\cos t};$$

$$\text{г) } f(x,y) = \frac{x^2 - y^4}{x^2 + y^2 + 1},\ L:\ x = t,\ y = \sqrt{t};$$

$$\text{д) } f(x,y) = \frac{e^{xy} - 1}{xy},\ L:\ x = t^2,\ y = t^3;$$

$$\text{е) } f(x,y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{xy},\ L:\ x = \sqrt{t},\ y = 2\sqrt{t}.$$

1.6 Повторные пределы.

Для функций нескольких переменных можно ввести понятие предела по одной переменной при фиксированных значениях других. В этом случае возникает понятие повторного предела.

Будем иметь дело с функциями двух переменных $f(x, y)$. Пусть (x_0, y_0) – некоторая точка, а U – ее некоторая окрестность. Зафиксируем y и рассмотрим предел

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y - \text{фикс.}}} f(x, y)$$

Если для любого y такого, что $(x_0, y) \in U$, существует этот предел, то мы получим некоторую функцию $\phi(y)$ одной переменной y. Далее, если существует

$$\lim_{y \to y_0} \phi(y),$$

то в этом случае говорят, что существует повторный предел функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), который обозначается следующим образом:

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$$

Аналогично определяется повторный предел

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

Пример. Вычислить повторные пределы функции

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

в точке $(0,0)$.

Решение. По определению имеем

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1;$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

Этот пример показывает, что повторные пределы функции могут существовать, не смотря на то, что функция не имеет предела.

С другой стороны, функция может иметь предел, но повторные пределы могут не существовать.

Пример. Показать, что функция

$$f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$$

имеет предел в точке $(0,0)$, но оба повторных предела не существуют.

Решение. Так как $|\sin t|\le 1$ для любых $t\in\mathbb{R}$, то

$$0\le|f(x,y)|\le|x|+|y|;$$

следовательно, $f(x,y)\to 0$ при $(x,y)\to(0,0)$. Теперь покажем, что повторные пределы не существуют. Рассмотрим функцию $f(x,y)$ при фиксированном y. В силу того, что не существует предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y - \text{фикс.}}}\Big(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\Big),$$

следует, что не существует и повторный предел

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\bigl(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\bigr)$$

Аналогичные рассуждения проводятся и для второго повторного предела.

Задачи.

53. Исследовать существование и найти

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y),\quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y),\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),$$

если

$$\text{а) } f(x,y)=\frac{x^3-y}{x^3+y};$$

$$\text{б) } f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2};$$

$$\text{в) } f(x,y)=\frac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2};$$

$$\text{г) } f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2};$$

$$\text{д)}^*.\ f(x,y)=\frac{x^8+x^5+x^4+y^4+y^5-y^8}{x^4+y^4}.$$

54*. Построить функцию $f(x,y)$, определенную на всей плоскости, для которой

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0,$$

а предел

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

не существует.

55*. Построить функцию $f(x,y)$, определенную на всей плоскости, для которой

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0,$$

а пределы

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y), \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0,$$

не существуют.

1.7 Непрерывные функции нескольких переменных.

Определение. Функцию $f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки $x^0\in\mathbb{R}^n$, называют непрерывной в точке x^0, если

$$\lim_{x\to x^0} f(x)=f(x^0)$$

Определение. Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке множества $M\subset\mathbb{R}^n$, то говорят, что она непрерывна на множестве M.

Определение. Приращением функции $u=f(x)$ в точке x^0 называют выражение

$$\Delta u = f(x)-f(x^0),$$

где x – произвольная точка из области определения функции $f(x)$.

Введем обозначения $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0, \dots, \Delta x_n = x_n - x_n^0$. Тогда приращение функции можно записать в виде

$$\Delta u = f(x_1^0+\Delta x_1,\dots,x_n^0+\Delta x_n)-f(x_1^0,\dots,x_n^0)$$

Теорема. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x^0 тогда и только тогда, когда

$$\lim_{(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\to(0,\dots,0)} \Delta u = 0.$$

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x^0; тогда

$$f(x)g(x), \quad f(x)\pm g(x) \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{при } g(x^0)\neq 0)$$

непрерывны в точке x^0.

Введем понятие сложной функции нескольких переменных. Пусть функции

$$\begin{aligned}
&x_1 = \phi_1(t_1, \ldots, t_k),\\
&x_2 = \phi_2(t_1, \ldots, t_k),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_n = \phi_n(t_1, \ldots, t_k)
\end{aligned}$$

заданы на множестве $N \subset \mathbb{R}^k$. В этом случае каждой точке $(t_1, \ldots, t_k)$ множества N ставится в соответствие точка $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $M \subset \mathbb{R}^n$ множество всех таких точек. Пусть $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ – функция, заданная на множестве M. В этом случае будем говорить, что на множестве N задана сложная функция

$$u = f(\phi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \phi_n(t_1, \ldots, t_k))$$

Теорема. Пусть функции $x_1 = \phi_1(t_1, \ldots, t_k)$,...,$x_n = \phi_n(t_1, \ldots, t_k)$ непрерывны в точке $(t_1^0, \ldots, t_k^0)$; функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, где $x_1^0 = \phi_1(t_1^0, \ldots, t_k^0)$,...,$x_n^0 = \phi_n(t_1^0, \ldots, t_k^0)$. Тогда сложная функция $u = f(\phi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \phi_n(t_1, \ldots, t_k))$ непрерывна в точке $(t_1^0, \ldots, t_k^0)$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x^0, кроме, быть может, самой точки x^0. Точку x^0 называют точкой разрыва функции $f(x)$ в следующих случаях:

1) функция $f(x)$ неопределена в точке x^0;

2) функция $f(x)$ определена в точке x^0, но

а) не существует предел в точке x^0,

б) предел функции в точке x^0 существует, но не равен $f(x^0)$.

В случае б) точку x^0 называют точкой устранимого разрыва.

Сформулируем основные свойства непрерывных функций нескольких переменных.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$; пусть $f(x^0) \neq 0$. Тогда существует такая ε-окрестность точки x^0, что для любой точки x, принадлежащей этой окрестности и области определения функции, $f(x) \neq 0$ и знак $f(x)$ совпадает со знаком $f(x^0)$ (теорема об устойчивости знака непрерывной функции)

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна во всех точках связного множества $X \in \mathbb{R}^n$. Пусть $f(x_1)$ и $f(x_2)$ – значения функции в точках x_1 и x_2 из X соответственно; пусть c любое число, лежащее между $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Тогда для любой непрерывной кривой L, соединяющей точки x_1 и x_2 и целиком лежащей в X, найдется такая точка $y \in L$, что $f(y) = c$ (теорема о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение)

Теорема. Если функция непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, то она ограничена на этом множестве (первая теорема Вейерштрасса)

Теорема. Если функция непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, то она достигает на этом множестве своих точных верхней и нижней граней (вторая теорема Вейерштрасса)

Пример. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x, y) = \frac{x + y + 1}{x^2 + y^2}.$$

Решение. В числителе и знаменателе стоят многочлены, которые являются непрерывными функциями (как сумма степенных функций) в любой точке плоскости. Поэтому функция $f(x, y)$ будет непрерывна везде, где знаменатель не обращается в нуль (как частное непрерывных функций) Знаменатель обращается в нуль в единственной точке $(0, 0)$. В этой точке функция не определена и, следовательно, терпит разрыв.

Пример. Найти и исследовать точки разрыва функции

$$u = \cos \frac{1}{x - y}.$$

Решение. Функция u представляет собой композицию функций $u = \cos v$, где $v = \frac{1}{x-y}$. Функция $\cos v$ непрерывна при любом значении аргумента v. Таким образом, достаточно найти точки разрыва функции $\frac{1}{x-y}$. В этих точках функция u будет разрывной. Очевидно, что функция $v = \frac{1}{x-y}$ терпит разрыв во всех точках прямой $y = x$. При стремлении точки (x, y) к любой из точек этой прямой функция $u = \cos \frac{1}{x-y}$ не имеет предела.

Пример. Найти и исследовать точки разрыва функции

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}.$$

Решение. Функция $f(x,y)$ является непрерывной во всех точка плоскости, кроме точки $(0,0)$ как частное двух многочленов. Найдем предел функции в точке $(0,0)$:

$$0 \le |\frac{x^3}{x^2+y^2}| = |x|\frac{x^2}{x^2+y^2}| \le |x| \to 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \to (0,0),$$

и поэтому по теореме о промежуточной переменной

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Следовательно, точка $(0,0)$ является точкой устранимого разрыва, то есть, доопределяя функцию $f(x,y)$ в точке $(0,0)$ нулем, получим непрерывную на всей плоскости функцию.

Задачи.

56. Исследовать на непрерывность функции

$$\text{а) } f(x,y) = \frac{x^2+2y+4}{y^2-2x};$$

$$\text{б) } f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2};$$

$$\text{в) } f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}};$$

$$\text{г) } f(x,y) = \frac{1}{(x-y)^2}$$

$$\text{д) } f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{при} \quad x^2+y^2 \le 1, \\ 0 & \text{при} \quad x^2+y^2 > 1; \end{cases}$$

$$\text{е) } f(x,y,z) = \frac{1}{z^2+x^2+y^2};$$

ж) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{z^2 - x^2 - y^2}.$

57. Найти все точки разрыва функции $f(x,y)$; указать точки устранимого разрыва:

$$\text{а) } f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2};$$

$$\text{б) } f(x,y) = x \sin \frac{y^2}{x^2 + y^2};$$

$$\text{в) } f(x,y) = \frac{xy - 2x - y + 2}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5};$$

$$\text{г) } f(x,y) = \frac{\sin^4 x}{\sin^2 x + \sin^2 y};$$

$$\text{д) } f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} & \text{при} \quad y \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad y = 0 \end{cases}$$

$$\text{е) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x + y} & \text{при} \quad x + y \neq 0, \\ 3 & \text{при} \quad x + y = 0 \end{cases}$$

58*. Найти все точки разрыва функции $f(x,y,z)$, если

$$\text{а) } f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{y^2 + z^2}, \quad \text{если} \quad y^2 + z^2 \neq 0, \\ 0, \quad \text{если} \quad y^2 + z^2 = 0. \end{cases};$$

$$\text{б) } f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + z^2}, \quad \text{если} \quad x^2 + z^2 \neq 0, \\ 0, \quad \text{если} \quad x^2 + z^2 = 0. \end{cases};$$

$$\text{в) } f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{\sin(xyz)}{z}, \quad \text{если} \quad z \neq 0, \\ 0, \quad \text{если} \quad z = 0. \end{cases};$$

$$\text{г) } f(x,y,z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 14};$$

$$\text{д) } f(x,y,z) = \frac{1}{x^2 + z^2 + 2(y^2 - yz - y + 1)};$$

$$\text{е) } f(x,y,z) = \sin\frac{x}{yz};$$

$$\text{ж) } f(x,y,z) = \frac{x}{\sin(yz)};$$

$$\text{з) } f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}, & \text{если} \quad x^2+y^2+z^2 \neq 0, \\ 1, \quad \text{если} & x=y=z=0. \end{cases}$$

2. Дифференцируемость функций нескольких переменных

2.1 Частные производные функций нескольких переменных.

Пусть задана функция n-переменных $u = f(x)$, $x \in M \subset \mathbb{R}^n$; пусть x^0 – внутренняя точка множества M. Придадим k-тому аргументу приращение Δx_k, $k = 1, \ldots, n$, и рассмотрим частное приращение $\Delta_k u$ функции $f(x)$ по k-му аргументу, где

$$\Delta_k u = f(x_1^0, \ldots, x_k^0 + \Delta x_k, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

Определение. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k u}{\Delta x_k},$$

то этот предел называется частной производной первого порядка функции $f(x)$ в точке $x = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ по аргументу x_k, $k = 1, \ldots, n$. Частная производная обозначается следующими способами:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, \quad f'_{x_k}(x^0), \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{x=x^0}.$$

Для вычисления частной производной f_{x_k} обычно пользуются формулами и правилами дифференцирования функций одной переменной, считая, что все переменные, кроме x_k, фиксированные.

Пример. Найти частные производные в точке $(0, 1)$ функции двух переменных

$$f(x, y) = x + y^2 + \ln (x + y^2).$$

Решение. Найдем частную производную по переменной x. Для этого нужно рассмотреть функцию $f(x, 1) = x + 1 + \ln(x + 1)$ одного переменного x. Производная этой функции при $x = 0$ равна $(1 + \frac{1}{x+1})|_{x=0} = 2$. Таким образом, получаем

$$\frac{\partial f(0, 1)}{\partial x} = 2.$$

Для того, чтобы найти производную по аргументу y, нужно рассмотреть функцию $f(2, y)$, найти производную этой функции по y и подставить значение $y = 1$. В результате получим, что

$$\frac{\partial f(0, 1)}{\partial y} = 4.$$

Пример. Найти область определения функции $f(x, y, z)$ и вычислить частные производные первого порядка в произвольной точке области определения, если

$$f(x, y, x) = xe^{yz} + \ln(x - y + z)$$

Решение. Функция определена в области $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^n \mid x - y + z > 0\}$. Фиксирую переменные y, z, находим

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{yz} + \frac{1}{x - y + z}.$$

Фиксируя переменные x, z, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xze^{yz} - \frac{1}{x - y + z}.$$

Наконец, фиксируя переменные y, z, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xye^{yz} + \frac{1}{x - y + z}.$$

Заметим, что из существования всех частных производных первого порядка функции не следует ее непрерывность. Следующий пример это показывает.

Пример. Найти все частные производные первого порядка функции

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{при} \quad x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Решение. По определению производной

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично вычисляется $f'_y(0,0) = 0$. Отметим здесь, что предела в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)$ не имеет (докажите это!) и, поэтому, является разрывной в этой точке. Это и означает, что из существования частных производных первого порядка не следует непрерывность функции.

Задачи.

59. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных $f(x,y)$. Вычислить их значения в точке (x^0, y^0), если

а) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad (1,1);$

б) $f(x,y) = e^{-xy}, \quad (0,1);$

в) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}, \quad (1,1);$

г) $f(x,y) = 2x^2y + 3xy^2 - x^3 + y^3 + 2xy + 1, \quad (0,0);$

д) $f(x,y) = \sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}, \quad (1,1);$

е) $(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (1,0);$

ж) $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}), \quad (1,1).$

60. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных $f(x,y,z)$, если

$$\text{а) } f(x,y,z) = x\sqrt[4]{z} + zy + \frac{y}{\sqrt[4]{x}};$$

$$\text{б) } f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\text{в) } f(x,y,z) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z};$$

$$\text{г) } f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2};$$

$$\text{д) } f(x,y,z) = x\cos(yz) + y\cos(xz) + z\cos(xy);$$

$$\text{е) } f(x,y,z) = xy + yz + zx;$$

$$\text{ж) } f(x,y,z) = (x+y+z)e^{x+y+z}.$$

61. Доказать, что функция $f(x,y) = \ln(x^2+xy+y^2)$ удовлетворяет уравнению

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2.$$

62. Пусть $f(x,y,x) = \ln(1+x+y^2+z^3)$; найти значение суммы $f'_x + f'_y + f'_z$ в точке $(1,1,1)$.

63. Пусть $f(x,y) = x^3y - xy^3$; найти выражение

$$\Phi = \frac{f'_x + f'_y}{f'_x f'_y}$$

и вычислить Φ в точке $(1,2)$.

64. Показать, что функция $f(x,y,z) = (x-y)(y-z)(z-x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

65. Пусть $f(x,y,z) = x + \frac{x-y}{y-z}$; вычислить

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}.$$

66*. Найти частные производные первого порядка функции $f(x,y,z)$, если

$$\text{а) } f(x,y,z) = z^{xy};$$

$$\text{б) } f(x,y) = \left(\frac{x}{y}\right)^z;$$

$$\text{в) } f(x,y,z) = xyze^{\sin(\pi xyz)};$$

$$\text{г) } f(x,y,z) = (xyz)^{xyz}.$$

2.2 Дифференцируемость функций нескольких переменных. Дифференциал.

Для наглядности будем рассматривать функции $f(x,y)$ двух переменных x, y. Тем не менее, все понятия и теоремы легко обобщаются на общий случай n переменных.

Определение. Функция $u = f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если ее приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

где A, B – числа, не зависящие от Δx, Δy; $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ и

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0.$$

Определение. Пусть функция $u = f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). Тогда главную линейную относительно приращений аргументов часть приращения этой функции в точке (x_0, y_0) называют полным дифференциалом и обозначают du, то есть

$$du = A\Delta x + B\Delta y.$$

Определение. Дифференциалом независимой переменной x или y называют ее приращение и обозначают dx или dy соответственно, то есть по определению $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$.

Определение. Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого множества M, то говорят, что она дифференцируема на множестве M.

Теорема. Если функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то есть существуют такие A, B, не зависящие от Δx, Δy, что $\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, то

$$A = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Таким образом, дифференциал функции $u = f(x, y)$ может быть вычислен по формуле

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Следствие. Если хотя бы одна частная производная первого порядка функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) не существует, то функция не дифференцируема в точке (x_0, y_0).

Заметим, что обратное, вообще говоря, не верно, то есть из существования всех частных производных первого порядка не следует ее дифференцируемость.

Теорема. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Теорема. Пусть функция $f(x, y)$ имеет все частные производные первого порядка в точке (x_0, y_0); пусть все эти частные производные непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0).

Теорема. Пусть задана сложная функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$, где

$$\begin{aligned}
&x_1 = \phi_1(t_1, \ldots, t_k),\\
&x_2 = \phi_2(t_1, \ldots, t_k),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_n = \phi_n(t_1, \ldots, t_k)
\end{aligned}$$

Пусть функции $\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)$ дифференцируемы в точке $(t_1^0, \ldots, t_k^0)$, а функция $u = f(x)$ дифференцируема в точке $(x_1^0, \ldots, x_0^n)$, где

$x_1^0 = \phi_1(t_1^0, \ldots, t_k^0)$,...,$x_n^0 = \phi_n(t_1^0, \ldots, t_k^0)$. Тогда сложная функция

$$u = f(\phi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \phi_n(t_1, \ldots, t_k))$$

дифференцируема в точке $(t_1^0, \ldots, t_k^0)$; при этом частные производные первого порядка сложной функции вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1},\\
&\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial u}{\partial t_k} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k},
\end{aligned}$$

в которых частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

берутся в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, а частные производные

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j} \quad (i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, k)$$

берутся в точке $(t_1^0, \ldots, t_k^0)$ (теорема о производной сложной функции).

Теорема. Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ дифференцируемы в окрестности некоторой точки x^0. Тогда функции $u \pm v$, uv, u/v (в последнем случае предполагается, что $v \neq 0$) дифференцируемы в этой окрестности и справедливы формулы

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad d(uv) = vdu \pm udv, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Пример. Найти полный дифференциал функции

$$u(x, y) = x^2y - y^2x$$

в любой точки области определения этой функции. Вычислить его значение в точке $(1,1)$.

Решение. Областью определения функции $u(x,y)$ является вся плоскость. Найдем частные производные первого порядка функции u:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 2xy.$$

Очевидно, что эти частные производные непрерывны во всех точках области определения. Следовательно, функция $u(x,y)$ дифференцируема и

$$du = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy.$$

Отсюда получаем, что $du(1,1) = dx - dy$.

Пример. Исследовать функцию

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

на дифференцируемость в точке $(0,0)$.

Решение. Найдем приращение функции f в точке $(0,0)$

$$\Delta f(0,0) = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = \sqrt{|\Delta x \Delta y|}$$

и вычислим частные производные в этой точке. Так как $f(0,y) = f(x,0) = 0$, то $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Предположим, что функция $f(x,y)$ дифференцируема в $(0,0)$, тогда

$$\Delta f(0,0) = f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) =$$

$$= o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$$

Отсюда следует, что

$$o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) = \sqrt{|\Delta x \Delta y|}.$$

Покажем, что предел

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

не существует. Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Рассмотрим две последовательности точек, сходящиеся к $(0,0)$:

$$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),\quad \left(0,\frac{1}{n}\right).$$

В первом случае предел значений функции

$$\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

переменных $(\Delta x,\Delta y)$ равен $\sqrt{2}/2$, а во втором – 0. Это означает, что указанный выше предел функции не существует.

Следовательно, предположение о том, что функция $f(x,y)$ дифференцируема, не верно.

Пример. Найти дифференциал функции

$$u=\frac{xy}{z}+xy.$$

Решение. Функция определена в любой точке $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ за исключением плоскости $z=0$. Пользуясь правилами дифференцирования суммы, произведения и частного функций, получаем

$$du=d\left(\frac{xy}{z}+xy\right)=d\left(\frac{xy}{z}\right)+d(xy)=\frac{zd(xy)-xydz}{z^2}+ydx+xdy=$$

$$=\frac{yzdx+xzdy-xydz}{z^2}+ydx+xdy=\left(\frac{y}{z}+y\right)dx+\left(\frac{x}{z}+x\right)dy-\frac{xy}{z}dz.$$

Пример. Пусть функция $f(u,v)$ дифференцируема в $\mathbb{R}^2$,

$$u=xy,\quad v=x^2+y^2.$$

Выразить f'_x и f'_y через f'_u и f'_v.

Решение. По формулам дифференцирования сложной функции получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial u}+2x\frac{\partial f}{\partial v},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial u}+2y\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Задачи.

67. Найти дифференциал функции $f(x, y)$; вычислить его значение в точке (x_0, y_0), если

$$\text{а) } f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad (1,0);$$

$$\text{б) } f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad (0,1);$$

$$\text{в) } f(x,y) = \ln(x^2+y^2), \quad (1,1);$$

$$\text{г) } f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad (1,1);$$

$$\text{д) } f(x,y) = e^{xy}, \quad (0,0);$$

$$\text{е) } f(x,y) = x^y + y^x, \quad (1,1);$$

$$\text{ж) } f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}), \quad (1,0);$$

$$\text{з) } f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad (1,1);$$

$$\text{и) } f(x,y) = (1+x)^{1+y}, \quad (0,0).$$

68. Найти дифференциал функции $f(x, y, z)$, если

$$\text{а) } f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

$$\text{б) } f(x,y,z) = \frac{x-y}{y+z};$$

$$\text{в) } f(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2};$$

$$\text{г) } f(x,y,z) = \operatorname{arctg}(xyz);$$

$$\text{д) } f(x,y,z) = e^{xy\sin z}.$$

69. Найти точки, в которых дифференциал функции f равен нулю, если

а) $f(x, y) = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$;

б) $f(x, y, z) = 2y^2 + z^2 - xy^2 - yz + 4x + 1$.

70*. Доказать, что функция f дифференцируема в точке $(0,0)$, если

а) $f(x,y) = |y|\sin x$;

б) $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{y}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$;

в) $f(x,y) = (\sin x + \sqrt[3]{xy})^2$;

г) $f(x,y) = |xy|$.

71*. Доказать, что функция f недифференцируема в точке $(0,0)$, если

а) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;

б) $f(x,y) = \ln(3 + \sqrt[4]{|xy|})$;

в) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$.

72. Для функции $f(u)$ найти f'_x и f'_y, если

а) $u = x^2 + e^{xy}$;

б) $u = \sin(xy)$;

в) $u = \sin(x\cos y)$.

73. Для функции $f(u,v)$ найти f'_x и f'_y, если

$$\text{а) } u = xy, \quad v = \frac{x}{y};$$

$$\text{б) } u = ye^{\sin x}, \quad v = xe^{\cos y};$$

$$\text{в) } u = \frac{y}{x+y}, \quad v = x^2+y^2.$$

74. Найти частные производные функции $f(x,y)$ в точке $(0,0)$ и исследовать на дифференцируемость в этой точке, если:

а) $f(x,y) = y\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}$;

б) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^4}$;

в) $f(x,y) = \sqrt[3]{\sin^4 x + \cos^4 y}$;

г) $f(x,y) = y + \ln(3 + \sqrt[3]{x^2 y})$.

2.3 Частные производные высших порядков.

Определение. Пусть частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ определена во всех точках $x = (x_1, \ldots, x_n)$ некоторого множества $M \subset \mathbb{R}^n$. В этом случае ее можно рассматривать как функцию n переменных $x_1, \ldots, x_n$, определенную в области M. Эта функция может быть дифференцируемой по какой-нибудь переменной x_k в некоторой точке множества M. В этом случае указанную частную производную называют второй частной производной (или частной производной второго порядка) по переменным x_i и x_k функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и обозначают

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}, \quad f^{(2)}_{x_i x_k}, \quad f''_{x_i x_k}.$$

В случае, если $i = k$ используют следующее обозначение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Таким образом, по определению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)$$

Определение. Если $i \neq k$, то частную производную второго порядка называют смешанной частной производной второго порядка.

После того как введено понятие частной производной второго порядка, можно по индукции ввести понятие частной производной m-го порядка. Это – первая частная производная от частной производной $(m-1)$-го порядка. Например, частная производная третьего порядка от функции f есть первая частная производная от частной производной второго порядка функции f. В общем случае частная производная m-го порядка определяется из следующей формулы:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \partial x_{i_{m-1}} \ldots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} \left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_{m-1}} \ldots \partial x_{i_1}} \right)$$

Пример. Вычислить все частные производные второго порядка функции

$$f(x, y) = e^{x^2 y}.$$

Решение. Для того, чтобы вычислить частные производные второго порядка функции f нужно знать частные производные первого порядка этой функции. Легко находим, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xye^{x^2y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2e^{x^2y}.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y(2x^2y+1)e^{x^2y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^4e^{x^2y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x(x^2+1)e^{x^2y}.$$

Заметим, что в рассмотренном примере смешанные производные равны.

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется m раз дифференцируемой в некоторой точке A_0 области определения, если все частные производные $(m-1)$-го порядка функции f являются дифференцируемыми функциями в точке A_0.

Теорема. Для того, чтобы функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ была m раз дифференцируемой в некоторой точке, достаточно, чтобы все ее частные производные m-го порядка были непрерывны в этой точке.

Теорема. Пусть функция $f(x, y)$ двух переменных дважды дифференцируема в точке (x_0, y_0). Тогда смешанные производные в этой точке равны, то есть $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Теорема. Пусть в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет частные производные f'_x, f'_y, f'_{xy}, f''_{yx}. Пусть, кроме того, частные производные f''_{xy}, f''_{yx} непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда в этой точке $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Заметим, что последние две теоремы являются лишь достаточными условиями равенства смешанных производных.

Приведем пример такой функции, у которой смешанные частные производные второго порядка не равны друг другу в некоторой точке.

Пример. Доказать, что

$$f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0),$$

если

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Решение. Частная производная первого порядка по x в окрестности точки $(0,0)$ равна

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Тогда по определению

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(0,\Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} = -1.$$

Аналогично вычисляется $f''_{xy}(0,0)$, которая равна 1. Таким образом, получили, что $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

Задачи.

75. Найти вторые частные производные функции $f(x,y)$; убедится, что

$$f'_{xy}(x,y) = f'_{yx}(x,y),$$

если

а) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$;

б) $f(x,y) = \sin(xy)$;

в) $f(x,y) = x\sin y$;

г) $f(x,y) = \sqrt{2xy+y^2}$;

д) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$;

е) $f(x,y) = x^y$.

76. Найти частные производные третьего порядка функции $f(x, y, z)$, если

а) $f(x, y, z) = x^3 y^2 z^4$;

б) $f(x, y, z) = xe^y \ln z$;

в) $f(x, y, z) = \sin x \, \mathrm{tg} z$;

77*. Выяснить, существуют ли частные производные второго порядка функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$, если

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

78. Доказать, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

если

$$\text{а) } f(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y);$$

$$\text{б) } f(x, y) = \mathrm{arctg} \frac{y}{x};$$

$$\text{в) } f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

79. Доказать, что функция

$$f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

удовлетворяет трехмерному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,$$

80. Пусть f и g – произвольные дважды дифференцируемые функции. Доказать, что функция u удовлетворяет данному уравнению:

$$\text{а) } u = xf(x + y) + yg(x + y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$\text{б) } u = f(xy) + \sqrt{xy}\, g(\frac{y}{x}), \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

в) $u = f(x)g(y), \quad u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}.$

2.4 Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

Будем использовать для обозначения дифференциалов символы d и δ, то есть для функции двух переменных $u = f(x, y)$ ее дифференциал будем записывать как

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

или

$$\delta u = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y.$$

Пусть функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и дважды дифференцируема в этой точке. При этих предположениях существует первый дифференциал функции $u = f(x, y)$:

$$du = f'_x dx + f'_y dy.$$

Будем считать, что значения dx и dy одни и те же для всех точек рассматриваемой окрестности точки (x_0, y_0). В этом случае дифференциал du представляет собой функцию переменных x, y в рассматриваемой окрестности; кроме того, в силу сделанных предположений – дифференцируемую функцию. Вычислим ее дифференциал

$$\delta du = \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx\delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(dx\delta y + dy\delta x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\delta y.$$

Полученное выражение представляет собой квадратичную форму переменных dx, dy, δx, δy. Положим теперь $\delta x = dx$ и $\delta y = dy$; для краткости будем обозначать $(dx)^2 = dx^2$ и $(dy)^2 = dy^2$.

Определение. Вторым дифференциалом d^2u функции $u = f(x, y)$ называется выражение

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

По индукции определяется дифференциал m-го порядка. Пусть определен дифференциал $(m-1)$-го порядка. Зафиксируем дифференциалы dx, dy аргументов x, y и найдем $\delta(d^{m-1}u)$; затем в полученном выражении нужно положить $\delta x = dx$ и $\delta y = dy$.

Теорема. Для дифференциала порядка m справедлива формула

$$d^m u = \sum_{i=1}^{m} C_m^i \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-i} \partial y^i} dx^{m-i} dy^i,$$

где

$$C_m^i = \frac{m!}{i!(m-i)!}.$$

Замечание. Аналогично рассмотренному случаю функции двух переменных определяется дифференциал m-го порядка для функции n переменных.

Пример. Найти дифференциал второго порядка функции

$$u = 3x^2y - 2xy + y^2 - 1.$$

Решение. Решим задачу двумя способами.

Способ 1. Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6x - 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2.$$

В результате получаем, что $d^2u = 6ydx^2 + 2(6x-2)dxdy + 2dy^2$.

Способ 2. Найдем сначала первый дифференциал: $du = (6xy-2y)dx + (3x^2 - 2x + 2y)dy$. Теперь, для того, чтобы найти дифференциал дифференциал второго порядка функции u нужно найти первый дифференциал от du, то есть

$$d^2u = d(du) = d((6xy - 2y)dx) + d((3x^2 - 2x + 2y)dy) =$$

$$= d(6xy-2y)dx + d(3x^2-2x+2y)dy = (6ydx+6xdy-2dy)dx+$$
$$+(6xdx-2dx+2dy)dy = 6ydx^2+2(6x-2)dxdy+2dy^2.$$

Пример. Найти d^2u и d^3u, если

$$u = xyz.$$

Решение. Первый дифференциал $du = yzdx + xzdy + xydz$; тогда

$$d^2u = d(du) = d(yz)dx + d(xz)dy + d(xy)dz =$$
$$= (zdy+ydz)dx + (zdx+xdz)dy + (xdt+ydx)dz =$$
$$= 2zdxdy + 2ydzdx + 2xdydz.$$

Для нахождения дифференциала третьего порядка нужно вычислить первый дифференциал от d^2u:

$$d^3u = d(d^2u) = d(2zdxdy + 2ydzdx + 2xdydz) =$$
$$= 2dzdxdy + 2dydzdx + 2dxdydz = 6dxdydz.$$

Теорема. (Формула Тейлора) Пусть функция $u = f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x^0 и $(k+1)$ раз дифференцируема в этой окрестности. Тогда справедлива следующая формула:

$$f(x) = f(x^0)+df(x^0)+\frac{1}{2!}d^2f(x^0)+\ldots+\frac{1}{k!}d^kf(x^0)+\frac{1}{(k+1)!}d^{k+1}f(y),$$

где y – некоторая точка (вообще говоря, зависящая от x) из указанной окрестности. Кроме того, дифференциалы dx_i, $i = 1,\ldots,n$, входящие в d^lf, $l = 1,\ldots,k$, равны $\Delta x_i = x_i - x_i^0$.

Замечание. Формулу Тейлора часто записывают в следующем виде (с остаточным членом в форме Пеано)

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2!}d^2f(x^0) + \ldots + \frac{1}{k!}d^kf(x^0) + o(\rho^k),$$

где

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}, \quad \lim_{\rho\to 0}\frac{o(\rho^k)}{\rho^k} = 0.$$

Пример. Найти два первых ненулевых члена в формуле Тейлора функции

$$u = e^{xy}$$

в окрестности точки $(0,0)$.

Решение. Имеем $du = (ye^{xy}dx + xe^{xy}dy)$, $d^2u = d(du) = d(ye^{xy})dx + d(xe^{xy})dy = y^2e^{xy}dx^2 + 2e^{xy}dxdy + x^2dy^2$, откуда получаем, что $du(0,0) = 0$, $d^2u(0,0) = 2dxdy$, кроме того $u(0,0) = 1$. В формуле Тейлора значения дифференциалов dx и dy равны $\Delta x = x - 0 = x$ и $\Delta y = y - 0 = y$ соответственно. Таким образом, получаем, что в окрестности точки $(0,0)$

$$e^{xy} \approx 1 + xy.$$

Определение. Если $x^0 = (0,\ldots,0)$, то формулу Тейлора называют формулой Маклорена.

Пример. Разложить по формуле Тейлора функцию

$$f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$$

в окрестности точки $(-2,1)$.

Решение. Так как функция $f(x,y)$ представляет собой многочлен второй степени, то достаточно найти частные производные до второго порядка включительно, так как старше второго порядка частные производные будут тождественно равны нулю. Итак, имеем

$$f'_x(x,y) = -2x + 2y - 6, \quad f'_y(x,y) = 2x + 6y - 2,$$

$$f''_{xx}(x,y) = -2, \quad f''_{xy}(x,y) = 2, \quad f''_{yy}(x,y) = 6.$$

Вычислим значение функции и значения полученных производных в точке $(-2,1)$:

$$f(-2,1) = 1, \quad f'_x(-2,1) = 0, \quad f'_y(-2,1) = 0.$$

Подставим полученные значения в формулу Тейлора

$$f(x,y) = 1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2.$$

Пример. Разложить по формуле Тейлора в точке $(0,0)$ функцию

$$f(x,y)=e^{x+y}$$

до $o(\rho^2)$.

Решение. Решим эту задачу, используя известные нам формулы разложения по Тейлору элементарных функций одной переменной. Известно, что

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^k}{k!} + o(t^k)$$

Представим функцию $f(x,y)$ в виде $f(x,y) = e^x e^y$. Применяя для каждой функции e^x и e^y формулу Тейлора, получим

$$e^{x+y} = (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(\rho^2))(1 + y + \frac{y^2}{2} + o(\rho^2)).$$

Из того, что $\rho \to 0$, следует $x \to 0$, $y \to 0$. Поэтому x^3, y^3, x^4, y^4, а также произведение $o(\rho^2)$ на x , y, x^2, y^2 являются $o(\rho^2)$. Таким образом, получаем ответ

$$e^{x+y} = 1 + x + y + xy + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + o(\rho^2).$$

Задачи.

81. Найти d^2u, если

а) $u = x\ln\dfrac{y}{x}$;

б) $u = e^x\cos y$;

в) $u = \sin x\cos y$;

г) $u = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}$;

д) $u = xye^{xy}$;

е) $u = y\sin(\cos x)$.

82. Найти d^2u, если

$$\text{а) } u = \frac{xy}{z};$$

$$\text{б) } u = \sin(xyz);$$

$$\text{в) } u = \sin x \cos y \sin z;$$

$$\text{г) } u = e^{xyz};$$

$$\text{д) } u = zx^y.$$

83. Найти d^3u, если
а) $u = x^3 + y^3$;
б) $u = e^x + e^y$;
в) $u = x^2 + y^3 + 6x^2y$;
г) $u = \cos x + \cos y$;
д) $u = \ln(xy)$.
84*. Найти d^3u, если
а) $u = xyz$;
б) $u = e^{xyz}$;
в) $u = \sin x + \sin y + \sin z$;
г) $u = z \sin xe^y$;
д) $u = \ln(xyz)$.
85. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x, y)$ в окрестности заданной точки:
а) $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y$, $(1, -2)$;
б) $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$, $(1, 2)$;
в) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(1, 1)$;
г) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$, $(1, 3)$;
д) $f(x, y) = x^2 - 2y^2 - x - y$, $(2, 2)$;
е) $f(x, y) = 3xy^2$, $(1, 1)$;
ж) $f(x, y) = x^3 + y^3 + x + y$, $(1, 2)$;
з) $f(x, y) = x^3 + x^2y + xy^2 + xy$, $(1, 1)$;
и)*. $f(x, y) = \cos x \cos y$, $(\pi, 2\pi)$;
к)*. $f(x, y) = \cos x + \sin y$, $(\pi/2, \pi)$.

86. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x, y)$ в окрестности точки $(0,0)$ до $o(\rho^3)$, если

$$\text{а) } f(x, y) = \sin x + \cos y;$$

$$\text{б) } f(x, y) = e^x + e^{y^2};$$

$$\text{в) } f(x, y) = \sin(x + y);$$

$$\text{г) } f(x, y) = \cos(x^2 + y^2);$$

$$\text{д) } f(x, y) = \ln\Big(1 - \frac{x - y}{1 + y}\Big);$$

$$\text{е) } f(x, y) = \ln(1 + xy);$$

$$\text{ж) } f(x, y) = xe^{1+x} + y^2;$$

$$\text{з) } f(x, y) = \ln(1 + x)\sin y^2;$$

$$\text{и)}^* \; f(x, y) = x^y;$$

$$\text{к)}^* \; f(x, y) = (\sin x)^{\cos y}.$$

3. Экстремумы функций нескольких переменных

3.1 Определение экстремума. Необходимые условия его существования.

Пусть на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ задана функция $u = f(x_1, \dots, x_n)$; пусть x^0 – некоторая точка множества X.

Определение. Говорят, что функция $u = f(x)$ имеет локальный минимум (максимум) в точке x^0, если существует некоторая окрестность $U(x^0)$ точки x^0 такая, что $f(x^0) \le f(x)$ ($f(x^0) \ge f(x)$) для всех x, принадлежащих $U(x^0)$.

Определение. Локальный максимум и локальный минимум называют локальными экстремумами.

Рассмотрим приращение $\Delta u = f(x) - f(x^0)$ функции $u = f(x)$ в точке x^0. Тогда определение локального минимума и максимума можно переформулировать в следующем виде:

Определение. Функция $u = f(x)$ имеет в точке x^0 локальный минимум (максимум), если существует окрестность $U(x^0)$ точки x^0 такая, что для всех x из $U(x^0)$ выполняется неравенство $\Delta u \geq 0$ $(\Delta u \leq 0)$

Сформулируем необходимое условие существования локального экстремума дифференцируемой функции.

Теорема. Пусть функция $u = f(x)$ имеет частные производные первого порядка в точке x^0; пусть точка x^0 – точка локального экстремума этой функции. Тогда частные производные первого порядка функции $u = f(x)$ равны нулю в точке x^0.

Следствие. Если функция $u = f(x)$ дифференцируема в точке x^0, и точка x^0 является точкой локального экстремума этой функции, то $du(x^0) = 0$.

Замечание. Последние две теоремы является лишь необходимыми условиями существования локального экстремума дифференцируемой функции. Это означает, что их выполнение в общем случае не влечет за собой существование локального экстремума.

Определение. Если в точке x^0 все частные производные первого порядка функции $f(x)$ равны нулю, то точка x^0 называется стационарной точкой (или точкой возможного экстремума) функции $f(x)$.

Пример. Показать, что функция

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

имеет в точке $(0, 0)$ локальный минимум.

Решение. Выберем в качестве окрестности точки $(0, 0)$ все пространство $\mathbb{R}^2$. Имеем следующую цепочку равенств и неравенств:

$$f(0, 0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x, y) \quad \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

из которой следует, что точка $(0, 0)$ – точка локального минимума.

Пример. Показать, что функция

$$f(x, y) = xy$$

не имеет локального экстремума в точке $(0,0)$.

Решение. Для того, чтобы доказать, что функция $f(x,y)$ не имеет локального экстремума в данной точке, нужно показать, что в любой ее окрестности найдется две различные точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2), для которых выполняются неравенства

$$f(x_1,y_1) > f(0,0) = 0, \quad f(x_2,y_2) < f(0,0) = 0.$$

Пусть ε – произвольное положительное число, $U_\varepsilon = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < \varepsilon\}$ – ε-окрестность точки $(0,0)$. Выберем произвольную точку (x_0,y_0) из указанной ε-окрестности, такую, что $x_0 \neq 0$ и $y_0 \neq 0$, и положим $(x_1,y_1) = (|x_0|,|y_0|)$ и $(x_2,y_2) = (-|x_0|,|y_0|)$. Очевидно, что эти точки принадлежат U_ε. Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся две различные точки такие, что

$$f(x_1,y_1) = |x_0y_0| > 0, \quad f(x_2,y_2) = -|x_0y_0| < 0.$$

Таким образом, функция $f(x,y) = xy$ в точке $(0,0)$ не имеет локального экстремума.

Последний пример показывает, что равенства нулю частных производных не является достаточным условием локального экстремума, так как в этом примере

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0,$$

а точка (0,0) не является локальным экстремумом.

Пример. Найти точки возможного локального экстремума функции

$$f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 + x.$$

Решение. Найдем частные производные первого порядка и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + 1 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x-y) = 0.$$

Отсюда получаем, что $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ – точка возможного локального экстремума.

Пример. Найти стационарные точки функции

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z + xz.$$

Решение. Найдем частные производные первого порядка функции $f(x,y,x)$ и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + z = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2 + x = 0.$$

Решая полученную систему, находим, что $x = -2$, $y = 0$, $z = 4$. Таким образом, точка $(-2, 0, 4)$ – точка возможного экстремума функции f.

Задачи.

87. Показать, что функция $f(x,y)$ имеет в точке $(0,0)$ локальный экстремум:

а) $f(x,y) = |xy|$;
б) $f(x,y) = |x|^3 + |y|$;
в) $f(x,y) = -|x-y|$;
г) $f(x,y) = x^2 + |xy|$.

88. Показать, что в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)$ не имеет локального экстремума:

а) $f(x,y) = x^2 - y^2$;
б) $f(x,y) = |x| - |y|$;
в) $f(x,y) = \sin x \sin y$;
г) $f(x,y) = x^2 - |y|$.

89. Найти точки возможного экстремума функции $f(x,y)$, если

а) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x + y$;
б) $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 + y^2$;
в) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$;
г) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 + x$;
д) $f(x,y) = x^3 + y^2 + 2y$.

90. Найти точки возможного экстремума функции $f(x,y,z)$, если

а) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$;

б) $f(x,y,z) = xyz(x^2+y^2)$;
в) $f(x,y,z) = e^{xyz}(x^2+y^2+2z)$;
г) $f(x,y.z) = \sin x \sin y \sin z^2$.

3.2 Достаточные условия существования локального экстремума.

Рассмотрим симметричную квадратичную форму

$$\Phi(h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

зависящую от переменных $h_1, \ldots, h_n$.

Определение. Квадратичная форма $\Phi(h)$ называется положительно определенной (отрицательно определенной), если для любых значений $h_1, \ldots, h_n$, не равных нулю одновременно, $\Phi(h) > 0$ ($\Phi(h) < 0$)

Определение. Положительно определенные и отрицательно определенные квадратичные формы называются знакоопределенными квадратичными формами.

Определение. Если квадратичная форма Φ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то ее называют знакопеременной.

Определение. Симметричную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \; a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

называют матрицей квадратичной формы $\Phi(h)$.

Определение. Определители

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} \ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

называют главными минорами матрицы A квадратичной формы.

Теорема. Матрица A квадратичной формы положительно определена тогда и только тогда, когда для главных миноров справедливы неравенства

$$A_1 > 0, \ A_2 > 0, \dots, \ A_n > 0;$$

Матрица A квадратичной формы отрицательно определена тогда и только тогда, когда для главных миноров справедливы неравенства

$$A_1 < 0, \ A_2 > 0, \ A_3 < 0, \dots,$$

то есть знаки главных миноров чередуются, начиная с $A_1 < 0$.

Теорема. Пусть x^0 – стационарная точка функции $f(x)$; пусть в некоторой окрестности точки x^0 функция $f(x)$ дважды дифференцируема и все ее частные производные второго порядка непрерывны в точке x^0. Тогда, если в точке x^0 второй дифференциал $d^2f(x^0)$ представляет собой знакоопределенную квадратичную форму от дифференциалов $dx_1, \dots, dx_n$ независимых переменных, то функция $f(x)$ имеет в точке x^0 локальный экстремум. При этом, если $d^2f(x^0) < 0$, то x^0 – точка локального максимума; если $d^2f(x^0) > 0$, то x^0 – точка локального минимума. Если в точке x^0 дифференциал $d^2f(x^0)$ является знакопеременной формой, то x^0 не является точкой локального экстремума.

Применим последнюю теорему к функции двух переменных $f(x,y)$. Пусть функция $f(x,y)$ дважды дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0) возможного экстремума и все ее частные производные второго порядка непрерывны. Тогда точка (x_0, y_0):
а) является точкой точкой локального минимума, если в этой точке

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0;$$

б) является точкой локального максимума, если в этой точке

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0;$$

в) не является точкой локального экстремума, если в этой точке

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} < 0.$$

Важно отметить, что случай, когда $\Delta_2 = 0$, требует дополнительного исследования.

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26.$$

Решение. Найдем частные производные первого порядка и приравняем их к нулю

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 39 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 36 = 0.$$

Решив данную систему, получим, что точки $(3, 2)$, $(-3, -2)$, $(2, 3)$, $(-2, -3)$ – стационарные. Вычислим теперь частные производные второго порядка функции $f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x.$$

Составим матрицу A квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix},$$

и вычислим ее главные миноры Δ_1 и Δ_2:

$$\Delta_1 = 6x, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36(x^2 - y^2)$$

В точке $(3,2)$ оба минора положительны, следовательно, в этой точке функция имеет локальный минимум. В точке $(-3,-2)$ минор $\Delta_1 < 0$, а $\Delta_2 > 0$, следовательно, в этой точке функция имеет локальный максимум. В точках $(2,3)$ и $(-2,-3)$ минор $\Delta_2 < 0$, следовательно, в этих точках экстремумов нет.

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Решение. Найдем частные производные первого порядка и приравняем их к нулю

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0.$$

Разрешая эту систему уравнений, получим, что $(1,1)$, $(0,0)$ – точки возможного экстремума.

Вычислим теперь частные производные второго порядка функции $f(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

Составим матрицу A квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix},$$

и вычислим ее главные миноры Δ_1 и Δ_2:

$$\Delta_1 = 6x, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9.$$

В точке $(1,1)$ оба минора положительны, следовательно, $(1,1)$ – точка локального минимума. В точке $(0,0)$ второй минор Δ_2 отрицателен. Поэтому $(0,0)$ не является точкой локального экстремума.

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y) = \cos x + \cos y.$$

Решение. Найдем частные производные первого порядка и приравняем их к нулю

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin y = 0.$$

Разрешая эту систему уравнений, получим, что точки вида $(\pi n, \pi k)$, $n, k \in \mathbb{Z}$ являются точками возможного экстремума.

Вычислим теперь частные производные второго порядка функции $f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos y;$$

и составим матрицу A квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\cos y \end{pmatrix},$$

главные миноры которой Δ_1 и Δ_2:

$$\Delta_1 = -\cos x, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\cos y \end{vmatrix} = \cos x \cos y.$$

Видно, что $\Delta_1 > 0$ при $x = (2l-1)\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, и $\Delta_1 < 0$ при $x = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

Если $\Delta_1 > 0$, то $\Delta_2 > 0$ при $y = (2s-1)\pi$, $s \in \mathbb{Z}$; если $\Delta_1 < 0$, то $\Delta_2 > 0$ при $y = 2q\pi$, $q \in \mathbb{Z}$. Кроме того, в остальных точках возможного экстремума функции $f(x, y)$ второй главный минор Δ_2 отрицательный.

Таким образом, заключаем, что точки вида

$$\big((2l-1)\pi, (2s-1)\pi\big), \quad l, s \in \mathbb{Z}$$

– точки локального минимума, а точки вида

$$\big(2m\pi, 2q\pi\big), \quad m, q \in \mathbb{Z}$$

– точки локального максимума. Других локальных экстремумов нет.

Задачи.

91. Найти экстремумы функции $f(x, y)$, если

а) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$;
б) $f(x, y) = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2$;
в) $f(x, y) = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$;
г) $f(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1$;
д) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$;

92. Исследовать функцию $f(x, y)$ на локальный экстремум, если

а) $f(x, y) = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y$;
б) $f(x, y) = 3y^2 y + y^3 - 12x - 15y + 3$;
в) $f(x, y) = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - x - 1$;
г) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$.
д) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;
е) $f(x, y) = x^3 y^2 (6 - x - y)$.

93. Исследовать функцию $f(x, y)$ на экстремум, если

$$\text{а) } f(x, y) = \frac{x + y}{xy} - xy;$$

$$\text{б) } f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y;$$

$$\text{в) } f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{2}{y};$$

$$\text{г) } f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{при} \quad x > 0,\ y > 0.$$

94*. Исследовать функцию $f(x, y)$ на экстремум, если

а) $f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$;
б) $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$;
в) $f(x, y) = x + y + 4 \sin x \sin y$;
г) $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}(2x^2 + y^2)$.

95. Найти все стационарные точки функции

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2$$

и исследовать ее на экстремум.

96. Доказать, что функция

$$f(x,y) = (y^2 - x)(y^2 - 2x)$$

не имеет минимума в точке $(0, 0)$.

3.3 Наибольшие и наименьшие значения функций нескольких переменных.

Для простоты изложения будем рассматривать функции двух переменных. Тем не менее, все легко обобщается на общий случай функций n переменных.

Пусть непрерывная функция $f(x,y)$ двух переменных определена на ограниченном и замкнутом множестве $X \subset \mathbb{R}^2$. Тогда по второй теореме Вейерштрасса существуют точки из X, в которых функция $f(x,y)$ принимает наибольшее и наименьшее значение на множестве X. Если же функция $f(x,y)$ еще и дифференцируема на X, то она достигает своих максимального и минимального значений либо в стационарных точках, либо на границе области X. Здесь важно заметить, что нет надобности вычислять частные производные второго порядка функции $f(x,y)$, а достаточно найти значения функции в точках возможного экстремума и сравнить их между собой, так как точки минимума и максимума функции находятся среди таких точек.

Затем нужно найти точки минимума и максимума функции на границе области ее определения. Как правило, граница ∂X множества X разбивается на ряд участков, каждый из которых имеет вид

$$\partial X = \{(x,y) \mid \alpha \le x \le \beta,\ y = \varphi(x)\}$$

или

$$\partial X = \{(x,y) \mid \mu \le y \le \nu,\ x = \psi(y)\},$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ непрерывны. Поэтому на таком участке границе ∂X функция $f(x,y)$ двух переменных x, y становится непрерывной функцией (так как суперпозиция непрерывных функций есть непрерывная функция)

$$f(x, \varphi(x)) \quad \text{или} \quad f(\psi(y), y)$$

одного переменного x или y, определенного на отрезке $[\alpha, \beta]$ или $[\mu, \nu]$ соответственно. Следовательно, задача о нахождении минимума и максимума функции $f(x, y)$ на границе ∂X сводится к задаче нахождения минимума и максимума функции одной переменной, определенной на отрезке.

В общем случае граница ∂X задается параметрически:

$$\partial X = \{(x, y) \mid x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [\alpha, \beta]\},$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Поэтому задача об отыскании максимума и минимума функции $f(x, y)$ на ∂X сводится к отысканию максимума и минимума функции одной переменной $f(\varphi(t), \psi(t))$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x, y) = x^2 y(2 - x - y)$$

на множестве

$$X = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 6\}.$$

Решение. Найдем точки возможного экстремума функции $f(x, y)$. Для этого вычислим частные производные первого порядка функции $f(x, y)$ приравняем их к нулю. В результате получим систему

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0 \\ 2 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

Разрешая эту систему, получим одну стационарную точку $(1, \frac{1}{2})$, которая принадлежит множеству X; при этом $f(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Граница ∂X множества X состоит из трех частей

$$\partial X_1 = \{(x, y) \mid x = 0,\ 0 \leq y \leq 6\},$$

$$\partial X_2 = \{(x, y) \mid y = 0,\ 0 \leq x \leq 6\},$$

$$\partial X_3 = \{(x, y) \mid y = 6 - x,\ 0 \leq x \leq 6\}.$$

На ∂X_1 $(x = 0)$ и на ∂X_2 $(y = 0)$ функция $f(x, y)$ обращается в нуль. Найдем максимум и минимум на ∂X_3. На этой части границы рассмотрим функцию

$$z(x) = f(x, y)\Big|_{\partial X_3} = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x)$$

при $x \in [0, 6]$.

На концах отрезка $z(0) = z(6) = 0$. Точки возможного экстремума функции одной переменной $z(x)$ находятся из уравнения

$$z'(x) = -48x + 12x^2 = 12x(x - 4) = 0.$$

Откуда получаем две стационарные точки $x = 4$ и $x = 0$, которые принадлежат отрезку $[0, 6]$. В этих точках функция $z(x)$ принимает значения -128 и 0 соответственно, при этом $y = 2$ и $y = 6$ соответственно.

Теперь осталось выбрать минимальное и максимальное значения функции $f(x, y)$ среди всех полученных чисел: $\frac{1}{4}$, 0, -128. Видно, что наибольшее значение $\frac{1}{4}$ функция $f(x, y)$ принимает в точке $(1, \frac{1}{2})$, лежащей внутри множества X, а наименьшее -128 в точке $(4, 2)$, принадлежащей границе ∂X множества X.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

в круге $X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Решение. Функция $f(x, y)$ имеет одну стационарную точку $(0, 0)$, так как

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

в которой принимает значение 0.

Граница ∂X круга X есть окружность $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, параметрическое задание которой

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

На окружности ∂X функция $f(x, y)$ становится функцией $z(t)$ одного переменного t, так как

$$f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t.$$

Ищем стационарные точки функции $z(t)$:

$$z'(t) = -2\sin 2t = 0.$$

Отсюда получаем, что $t = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{R}^n$, – решение данного уравнения. Но отрезку $[0, 2\pi]$ принадлежат 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, в которых функция $z(t)$ принимает значения 1, -1, 1, -1, 1 соответственно.

Таким образом, получаем, что наибольшее значение 1 функция принимает на границе множества X в точках $(1, 0)$, $(-1, 0)$; наименьшее значение -1 функция принимает на границе множества X в точках $(0, 1)$, $(0, -1)$. Во внутренних точках множества X функция не достигает своих максимума и минимума.

Пример. Из всех прямоугольников данного периметра $2p$ найти тот, который имеет наибольшую площадь.

Решение. Пусть x и y – длины сторон прямоугольника. Тогда $P(x, y) = xy$ его площадь. Частные производные первого порядка равны

$$\frac{\partial P}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x,$$

откуда получаем, что $(0, 0)$ – стационарная точка функции $P(x, y)$, в которой она (функция) обращается в нуль. Периметр прямоугольника равен $2p$, поэтому максимум может достигаться на прямой $2x + 2y = 2p$ или, что то же самое, $y = p - x$. На этой прямой функция $P(x, y)$ становится функцией одной переменной $z(x) = P(x, p - x) = x(p - x)$, максимум которой достигается при $x = \frac{p}{2}$ и равен $\frac{p^2}{4}$. При этом $y = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$. Таким образом, из всех прямоугольников заданного периметра $2p$ квадрат со стороной $\frac{p}{2}$ имеет максимальную площадь $\frac{p^2}{4}$.

Задачи.

97. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x, y) = x + y$$

в круге
$$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}.$$

98. Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$$f(x,y) = x^3+y^3-3xy$$
в прямоугольнике
$$\{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2\}.$$

99. Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$$f(x,y) = x^2-2y^2+4xy-6x-1$$
в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=3$.

100. Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$$f(x,y) = x^2-xy+y^2$$
на множестве
$$\{(x,y) \mid |x|+|y| \le 1\}.$$

101. Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$$f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x-y)$$
на множестве
$$\{(x,y) \mid x+y \le 2\pi,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$$

102*. На плоскости $\mathbb{R}^2$ найти наибольшее и наименьшее значение функции
$$f(x,y) = (xy-1)^2+y^2.$$

103*. На плоскости $\mathbb{R}^2$ найти наибольшее и наименьшее значение функции
$$f(x,y) = (2x^2+y^2)e^{1-x^2-y^2}.$$

104. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x,y)$ в области Ω, если

а) $f(x,y) = xy - x^2y - \dfrac{xy^2}{2}, \quad \Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\};$

б) $f(x,y) = x^2+3y^2-x+18y-4, \quad \Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\};$

в) $f(x,y) = x^3 + 3y^2 - 3xy, \quad \Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\};$

г) $f(x,y) = x^6+y^6-3x^2+6xy-3y^2, \quad \Omega = \{(x,y) \mid 0 \le y \le x \le 0\};$

д) $f(x,y) = \dfrac{xy}{2}-\dfrac{x^2y}{6}-\dfrac{xy^2}{8}, \quad \Omega = \{(x,y) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4} \le 1\}.$

105*. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x,y,z)$ в области Ω, если

а) $f(x,y) = xy + yz + zx$, $\Omega = \{(x,y,z) \mid z^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$;

б) $f(x,y) = x + y + z$, $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \le z \le 1\}$;

в) $f(x,y) = xyz$, $\Omega = \{(x,y,z) \mid 1 \le x,y,z \le 2\}$.

106. Из всех треугольников заданного периметра $2p$ найти тот, который имеет максимальную площадь.
Указание. Воспользоваться формулой Герона.

107. Найти прямоугольный параллелепипед данной площади S поверхности, имеющий максимальный объем.

108. Представить положительное число a в виде произведения трех положительных сомножителей так, чтобы

а) их сумма была наименьшей;

б) сумма их кубов наименьшая.

109. Найти наибольший объем, который может иметь прямоугольный параллелепипед, если сумма длин его ребер равна a.

110. Определить наибольшую вместимость цилиндрического ведра, площадь поверхности которого (без крышки) равна S.

111. Найти наименьшую площадь поверхности, которую может иметь прямоугольный параллелепипед с заданным объемом V.

112. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда данного объема V, имеющего наименьшую площадь поверхности.

4. Неявные функции

4.1 Вводные замечания.

В математике и ее приложениях часто приходится сталкиваться с такими задачами, когда некоторая переменная u, являющаяся по смыслу задачи функцией аргументов x_1,...,x_n, задается с помощью функционального уравнения вида

$$F(u, x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Например, функция

$$u = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1],$$

описывающая верхнюю полуокружность окружности единичного радиуса с центром в $(0, 0)$, может быть неявно задана посредством функционального уравнения

$$F(u, x) = u^2 + x^2 - 1 = 0.$$

С другой стороны, задавая функцию u неявным образом, может оказаться так, что u выражается из функционального уравнения неоднозначно, то есть существует не одна функция, удовлетворяющая данному уравнению.

Например, пусть задано функциональное уравнение

$$F(u, x, y) = 1 - x^2 - y^2 - u^2 = 0;$$

тогда этому уравнению удовлетворяют и $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, и $u = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Кроме того, такие вопросы, как непрерывность и дифференцируемость неявно заданной функции тоже являются важными.

В дальнейшем, ради сокращения записи будем рассматривать функциональные уравнения вида

$$F(u, x, y) = 0,$$

где (x, y) принадлежат некоторому множеству $X \subset \mathbb{R}^2$. При этом все результаты легко переносятся на случай.

Пример. Показать, что разрывная в каждой точке функция Дирихле $y = D(x)$, где

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ – рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ – иррационально}, \end{cases}$$

а также непрерывные функции $f(x) = 1$ и $g(x) = 0$ удовлетворяют уравнению

$$y^2 - y = 0.$$

Решение. Пусть x – рациональное число, тогда $y = 1$ и $1^2 - 1 = 0$. Пусть x – иррациональное число, тогда $y = 0$ и $0^2 - 0 = 0$. Очевидно, что функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют уравнению.

Пример. Пусть дано уравнение

$$y^2 = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Сколько функций $y = y(x)$ удовлетворяет этому уравнению? Сколько среди них непрерывных функций?

Решение. Данному уравнению удовлетворяет бесконечное число функций. Для этого рассмотрим бесконечную последовательность функций

$$f_k(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq k, \\ -k, & \text{если } x = k. \end{cases},$$

где $k \in \mathbb{N}$. Проверим, что для любого натурального k функция $f_k(x)$ является решением исходного уравнения. Действительно, если $x = k$, то $f_k(x) = -k$, и $(f_k(x))^2 = (-k)^2 = k^2 = x^2$; если же $x \neq k$, то $f(x) = x$ и $(f(x))^2 \equiv x^2$.

Найдем теперь непрерывные функции, удовлетворяющие уравнению $y^2 = x^2$. Очевидно, что это уравнение эквивалентно следующему

$$|y| = |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Разобьем область значений функции $y = y(x)$ на две части: $y \geq 0$ и $y < 0$. Так как мы ищем непрерывную на $\mathbb{R}$ функцию, то она должна быть непрерывна и на каждой из этих частей. Следовательно, получаем, что $y(x) = |x|$ при $y \geq 0$; и $y(x) = -|x|$, при

$y < 0$. В свою очередь отсюда следует, что при $y \geq 0$ функция $y(x) = x$ при $x \geq 0$ или $y(x) = -x$ при $x < 0$; при $y < 0$ функция $y(x) = -x$ при $x \geq 0$ или $y(x) = x$ при $x < 0$. Возможны четыре комбинации полученных вариантов:

$$y = \begin{cases} -x, \text{ если } x \geq 0 \\ x, \text{ если } x < 0 \end{cases} \equiv -|x|;$$

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases} \equiv |x|;$$

$$y = \begin{cases} -x, \text{ если } x \geq 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases} \equiv -x;$$

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0 \\ x, \text{ если } x < 0 \end{cases} \equiv x,$$

то есть непрерывные функции должны быть среди следующих функций: $y = x$, $y = -x$, $y = |x|$ и $y = -|x|$. Но все эти функции – непрерывны. Таким образом, существует всего четыре непрерывных функции, удовлетворяющих уравнению $y^2 = x^2$.

Задачи.

113. Показать, что разрывная функция $y = \operatorname{sgn} x$, где

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, \text{ если } x < 0, \\ 0, \quad \text{если } x = 0, \\ 1, \quad \text{если } x > 0, \end{cases}$$

удовлетворяет уравнениям

$$y^4 + y^3 - y^2 - y = 0$$

и

$$y^2 - |y| = 0.$$

114. Показать, что функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \max\{-x, x\},$$

удовлетворяет уравнению

$$y - |x| = 0.$$

115*. Пусть дано уравнение

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Сколько функций $y = y(x)$, $x \in [-1, 1]$, удовлетворяет этому уравнению? Сколько среди них непрерывных?

116*. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $a < x < b$; пусть $\varphi(y)$ монотонно возрастает и непрерывна на $c < y < d$. В каком случае уравнение

$$\varphi(y) = f(x)$$

определяет функцию $y = \varphi^{-1}(f(x))$?

Рассмотреть два примера: а) $\sin y + \operatorname{sh} y = x$; б) $e^{-y} = -x^2$.

117. Дано уравнение

$$(y - 1)^2 - x^2 = 0.$$

Сколько однозначных функций $y = y(x)$ являются решениями этого уравнения? Сколько среди них непрерывных?

118. Дано уравнение

$$y^3 + x^2 = 0.$$

Сколько однозначных функций $y = y(x)$ и $x = x(y)$ являются решениями этого уравнения? Сколько среди них непрерывных?

4.2 Существование и дифференцируемость неявно заданной функции.

Теорема. Пусть функция $F(u, x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки (u_0, x_0, y_0) пространства $\mathbb{R}^3$, причем частная производная $\frac{\partial F}{\partial u}$ непрерывна в этой точке. Тогда, если в точке (u_0, x_0, y_0) функция F обращается в нуль, а частная производная $\frac{\partial F}{\partial u}$ не равна нулю, то для любого достаточно малого положительного числа ε найдется такая окрестность точки (x_0, y_0)

пространства $\mathbb{R}^2$, что в пределах этой окрестности существует единственная функция $u = \varphi(x, y)$, которая удовлетворяет условию $|u - u_0| < \varepsilon$ и

$$F(\varphi(x, y), x, y) \equiv 0.$$

Функция $u = \varphi(x, y)$ непрерывна и дифференцируема в указанной окрестности точки (x_0, y_0), и имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}}.$$

Замечание. Аналогичные формулы справедливы и для общего случая

$$F(u, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

когда неявная функция $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ зависит от n переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial u}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пусть дополнительно к условиям теоремы $F(u, x, y)$ дважды дифференцируема в точке (u_0, x_0, y_0), тогда функция $u = \varphi(x, y)$ тоже дважды дифференцируема в точке (x_0, y_0) и, например, смешанная производная неявно заданной функции $u = u(x, y)$ задается формулой

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial u}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u}}{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^3}.$$

Можно вычислить частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Для этого нужно найти соответствующие частные производные от

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}} \quad \text{и} \quad -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}},$$

считая при этом, что функция u зависит от переменных x и y.

Пример. Проверить, что уравнение

$$x^2 + yx + y^2 = 3$$

однозначно определяет функцию $y(x)$ в окрестности точки $(1, 1)$.

Решение. В нашем случае

$$F(x, y) = x^2 + yx + y^2 - 3.$$

Во-первых, заметим, что $F(1, 1) = 0$. Во-вторых, легко проверить, что функция F дифференцируема в точке $(1, 1)$. В-третьих,

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(1,1)} = (x + 2y)\Big|_{(x,y)=(1,1)} = 3 \neq 0,$$

и, кроме того, $F'_y(x, y)$ непрерывна в точке $(1, 1)$. Следовательно, найдется некоторая окрестность точки $x = 1$, в которой существует непрерывная функция $y = y(x)$.

Пример. Функция $y(x)$ задана уравнением

$$1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0.$$

Найти y' и y''.

Решение. В данном случае

$$F(x, y) = 1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}),$$

поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y - \frac{y(e^{xy} - e^{-xy})}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x - \frac{x(e^{xy} - e^{-xy})}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}};$$

откуда получаем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\frac{2ye^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}}{\frac{2xe^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}} = -\frac{y}{x}.$$

По определению второй производной функции $y(x)$ имеем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dx}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(-\frac{y}{x}\Big).$$

Воспользуемся формулой дифференцирования частного двух функций, тогда будем иметь

$$\frac{d}{dx}\Big(-\frac{y}{x}\Big) = -\frac{xy' - y(x)'}{x^2} = -\frac{x\Big(-\frac{y}{x}\Big) - y}{x^2} =$$

$$= -\frac{xy' - y \cdot 1}{x^2} = -\frac{x\Big(-\frac{y}{x}\Big) - y}{x^2} = \frac{2y}{x^2}.$$

При вычислении второй производной мы считали, что y есть функция от x, и использовали полученную формулу для первой производной.

Пример. Найти в точке $(0,1)$ частные производные первого порядка функции, заданной неявно уравнением

$$u^3 + 3xyu + 1 = 0.$$

Решение. В нашем случае

$$F(u,x,y) = u^3 + 2xyu + 1,$$

поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3yu, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3xu, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 3u^2 + 3xy.$$

Найдем значение неявно заданной функции $u = u(x,y)$ в точке $(0,1)$. Для этого подставим $x = 0$, $y = 1$ в $F(u,x,y) = 0$ и выразим u:

$$u^3 + 3 \cdot 0 \cdot 1 \cdot u + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u(0,1) = -1.$$

Теперь мы можем найти значения частных производных функции $F(u,x,y)$ в точке $(-1,0,-1)$:

$$\frac{\partial F(-1,0,1)}{\partial x} = -3, \quad \frac{\partial F(-1,0,1)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F(-1,0,1)}{\partial u} = 3.$$

Видно, что $F'_u(-1,0,1) \neq 0$, следовательно, в в окрестности точки $(0,1)$ существует неявно заданная функция $u = u(x,y)$, которая к тому же является дифференцируемой в этой точке и

$$\frac{\partial u(0,1)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F(-1,0,1)}{\partial x}}{\frac{\partial F(-1,0,1)}{\partial u}} = 1 \quad \frac{\partial u(0,1)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F(-1,0,1)}{\partial y}}{\frac{\partial F(-1,0,1)}{\partial u}} = 0.$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $u(x,y)$, заданной неявно уравнением

$$u^3 - 3xyu - u = 0.$$

Решение. В этом случае

$$F(u,x,y) = u^3 - 3xyu - 1.$$

Решим эту задачу двумя способами.
1-й способ. Найдем частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3yz, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -3xz, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 3u^2 - 3xy - 1;$$

откуда получаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3yu}{3u^2 - 3xy - 1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3xu}{3u^2 - 3xy - 1}.$$

В итоге будем иметь

$$du = \frac{3yu}{3u^2 - 3xy - 1}dx + \frac{3xu}{3u^2 - 3xy - 1}dy.$$

2-й способ. Продифференцируем тождество $F(u(x,y),x,y)$:

$$0 = d(F(u,x,y)) = d(u^3 - 3xyu - u) = 3u^2du - 3d(xyu) - du =$$

$$= (3u^2 - 1)du - 3(xydu + xudy + yudx) =$$

$$= (3u^2 - 3xy - 1)du - 3yudx - 3xudy.$$

Выражая отсюда полный дифференциал du, получаем

$$du = \frac{3yu}{3u^2 - 3xy - 1}dx + \frac{3xu}{3u^2 - 3xy - 1}dy.$$

Задачи.

119. Проверить, что данное уравнение однозначно определяет функцию $y = y(x)$ в окрестности точки (x_0, y_0), если:

а) $xy + \ln(xy) = 1$, $(2, \frac{1}{2})$;

б) $e^{x+y} + y - x = 0$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

120. Проверить, что данное уравнение однозначно определяет функцию $z = z(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), если

а) $x + y + z = \sin(xyz)$, $(0, 0, 0)$;

б) $x^2z^3 + y^3z^2 + z^2x^3 = 8$, $(1, -1, 2)$;

в)*. $x^y + y^z + z^x = 3$, $(1, 1, 1)$.

121. Пусть функция $y(x)$ задана неявно уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a, b =$const. Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dy^2}$.

122. Пусть функция $y(x)$ задана неявно уравнением

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}.$$

Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dy^2}$.

123. Пусть функция $y(x)$ задана неявно уравнением

$$y = 1 + y^x.$$

Найти $\frac{dy}{dx}$.

124. Пусть функция $y(x)$ задана неявно уравнением

$$x^3 + y^3 = 2xy.$$

Найти значение производной $\frac{dy}{dx}$ в точке $x = 1$.

125. Найти частные производные первого порядка функции $u = u(x, y)$, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{u^2}{c^2} = 1,$$

где $a, b, c =$const.

126. Найти частные производные первого порядка функции $u = u(x, y)$, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + u^2 - 2xu = 1.$$

127. Найти частные производные первого порядка функции $u = u(x, y)$, заданной уравнением

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 u = 1.$$

128. Найти дифференциал du функции $u = u(x, y)$, заданной неявно уравнением

$$xyu = x + y + u.$$

129. Найти дифференциал du функции $u = u(x, y)$, заданной неявно уравнением

$$u = ye^{\frac{x}{u}}.$$

130. Найти в указанной точке частные производные функции $u(x, y)$, заданной неявно уравнением

а) $u + \ln(x + y + u) = 0, \quad (1, -1);$

б) $e^u - xyu - 2, \quad (1, 0);$

в) $\dfrac{u}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \operatorname{arctg}\dfrac{u}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1 = 0, \quad (5, 4).$

131. Найти указанные производные функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением $F(u(x, y, z)v(x, y, z), w(x, y, z)) = 0$, где функции u, v и w дифференцируемы, если

а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}, \quad u = xyz, \quad v = x + y, \quad w = 0;$

$$б)\ \frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad u = xy,\quad v = yz,\quad w = zx;$$

$$в)\ \frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad u = x^2 - y^2,\quad v = y^2 - z^2,\quad w = z^2 - x^2;$$

$$г)\ \frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad u = y - zx,\quad v = x - zy,\quad w = z - xy.$$

5. Примеры контрольных работ

5.1 Предел и непрерывность функций нескольких переменных.

1. Дано множество M. Указать его внутренние, изолированные, предельные точки, а также точки прикосновения, если

1.1. а) $M = (0, 1/2) \cup \{10\} \subset \mathbb{R}$, б) $M = (0, 1] \times (1, 10) \subset \mathbb{R}^2$;
1.2. а) $M = [0, 20) \cup (25, 50) \subset \mathbb{R}$, б) $M = (0, 1] \times [1, 1) \subset \mathbb{R}^2$;
1.3. а) $M = [-2, -1] \cup \{100\} \subset \mathbb{R}$, б) $M = (0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$;
1.4. а) $M = (1, 2) \cup (10, 11) \subset \mathbb{R}$, б) $M = (0, 1] \times [1, 2] \subset \mathbb{R}^2$;
1.5. а) $M = [0, 1/2] \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$, б) $M = (0, 1] \times [1, 2) \subset \mathbb{R}^2$;
1.6. а) $M = (-1/2, 1/2) \subset \mathbb{R}$, б) $M = (0, 1] \times \{1\} \subset \mathbb{R}^2$;
1.7. а) $M = \{0\} \subset \mathbb{R}$, б) $M = [0, 1) \times \{1\} \subset \mathbb{R}^2$.

2. Исследовать сходимость последовательности $\{x^m\}$ и найти предел, если он существует

$$2.1.\ а)\ x^m = \Big(\frac{1}{m}, \frac{m-1}{m+100}\Big),\quad б)\ x^m = \Big(m, (1 + \frac{1}{m})^m\Big);$$

$$2.2.\ а)\ x^m = \Big(\frac{1}{m+1}, \frac{m+1}{m+10}\Big),\quad б)\ x^m = \Big(-m, (1 - \frac{1}{m})^m\Big);$$

$$2.3.\ а)\ x^m = \Big((1 + \frac{1}{m})^m, \frac{1}{m}\Big),\quad б)\ x^m = \Big(m, (-1)^m\Big);$$

2.4. а) $x^m = \left(\dfrac{\sin m}{m}, m\right)$, б) $x^m = \left(\dfrac{1}{m-1}, 1+\dfrac{1}{m}\right)$;

2.5. а) $x^m = \left(\dfrac{1}{m-100}, 1\right)$, б) $x^m = \left(m^m, (1-\dfrac{1}{m})^m\right)$;

2.6. а) $x^m = \left(\dfrac{m^2+1}{m^2-1}, \dfrac{m-1}{m}\right)$, б) $x^m = \left(m, (1+\dfrac{1}{m})^m\right)$;

2.7. а) $x^m = \left(\dfrac{m^3}{m^2-1}, \dfrac{m-1}{m-2}\right)$, б) $x^m = \left(\dfrac{1}{m}, \dfrac{m^3}{m^3+1}\right)$.

3. Найти область определения функции $f(x,y)$, если

3.1. $f(x,y) = \arcsin\dfrac{x}{y}$;

3.2. $f(x,y) = \ln\dfrac{x^2-1}{y}$;

3.3. $f(x,y) = \arccos\dfrac{x^2-y}{y^2-x}$;

3.4. $f(x,y) = \arccos\dfrac{x}{y}$;

3.5. $f(x,y) = \mathrm{arctg}\dfrac{x^2}{y^2-1}$;

3.6. $f(x,y) = \arcsin\dfrac{x+y}{y}$;

3.7. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{y^4-x^4}$.

4. Найти предел функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$ или доказать, что он не существует:

$$4.1.\ f(x, y) = \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1};$$

$$4.2.\ f(x, y) = \frac{x^2}{y^2};$$

$$4.3.\ f(x, y) = \frac{y^3}{x^3};$$

$$4.4.\ f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2};$$

$$4.5.\ f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{y^2};$$

$$4.6.\ f(x, y) = x^2 \cos x^2 + y;$$

$$4.7.\ f(x, y) = y\mathrm{tg}\frac{x^2 + 1}{y^2 + 1}.$$

5. Найти все точки разрыва функции $f(x, y)$. Указать точки устранимого разрыва:

$$5.1.\ f(x, y) = \frac{x^2 - 1}{y^2 - 1};$$

$$5.2.\ f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2};$$

$$5.3.\ f(x, y) = x \cos \frac{1}{x + y};$$

$$5.4.\ f(x, y) = y \sin \frac{x}{y};$$

$$5.5.\ f(x, y) = x^2 \sin \frac{1}{y};$$

$$5.6.\ f(x, y) = y^4 \cos \frac{y}{x^2 + 1};$$

$$5.7.\ f(x, y) = \arcsin \frac{x^2}{y}.$$

5.2 Дифференцируемость функций нескольких переменных.

1. Найти все частные производные первого порядка функции $f(x, y, z)$. Вычислить значение в точке $(0, 0, 0)$:

$$1.1.\ f(x,y,z) = xe^y e^{z^2};$$

$$1.2.\ f(x,y,z) = \sin(xyz^2);$$

$$1.3.\ f(x,y,z) = \ln\sin(xyz+1);$$

$$1.4.\ f(x,y,z) = \ln\frac{x+y^2}{z+1};$$

$$1.5.\ f(x,y,z) = \cos x\sin(yz);$$

$$1.6.\ f(x,y,z) = \cos\frac{x+y}{z^2+1};$$

$$1.7.\ f(x,y,z) = \ln(e^{x^2}+1)\sin(yz).$$

2. Найти дифференциал функции $f(x, y)$ в точке $(1, 1)$:

2.1. $f(x, y) = (1 + x)^y$;

2.2. $f(x, y) = y^{x+1}$;

2.3. $f(x, y) = \sin(x^y)$;

2.4. $f(x, y) = \cos y^x$;

2.5. $f(x, y) = \ln(x^y + 1)$;

2.6. $f(x, y) = \ln(2 - y^x)$;

2.7. $f(x, y) = \ln\sin(xy)$.

3. Показать, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет данному уравнению:

$$3.1.\ f(x,y) = \ln(x^2+y^2),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0;$$

$$3.2.\ f(x,y) = e^{-x}(x-y)^2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = f;$$

$$3.3.\ f(x,y) = e^{x+y}(x+y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0;$$

$$3.4.\ f(x,y) = (x+y)\sin(x+y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0;$$

$$3.5.\ f(x,y) = e^{-x}(x-y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = f;$$

$$3.6.\ f(x,y) = \ln \sqrt[3]{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0;$$

$$3.7.\ f(x,y) = (x+y)e^{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

4. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x,y)$ в точке $(0,0)$:

4.1. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ до $o(\rho^4)$;
4.2. $f(x,y) = e^{x+y^2}$ до $o(\rho^4)$;
4.3. $f(x,y) = e^{x^2+y}$ до $o(\rho^4)$;
4.4. $f(x,y) = \ln[(1+x)(1+y)]$ до $o(\rho^2)$;
4.5. $f(x,y) = \ln[(1+x)(1+y)]$ до $o(\rho^4)$;
4.6. $f(x,y) = e^{y^2}\ln(1+x)$ до $o(\rho^4)$;
4.7. $f(x,y) = e^{x}\ln(1+y^2)$ до $o(\rho^4)$.

5.3 Экстремумы функций нескольких переменных. Неявные функции.

1. Показать, что функция $f(x,y)$ в точке $(0,0)$ не имеет локального экстремума:

1.1. $f(x,y) = x^2y^3$;
1.2. $f(x,y) = xy^3$;
1.3. $f(x,y) = x^2y$;
1.4. $f(x,y) = xy^2$;
1.5. $f(x,y) = x^2y^5$;
1.6. $f(x,y) = x^3y^3$;
1.7. $f(x,y) = x^3y$.

2. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y)$:

$$2.1.\ f(x,y) = -x^2 - xy - y^2 + x + y;$$

$$2.2.\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy;$$

$$2.3.\ f(x,y) = x^4 + y^4 - 36xy;$$

$$2.4.\ f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y;$$

$$2.5.\ f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y};$$

$$2.6.\ f(x,y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y);$$

$$2.7.\ f(x,y) = e^{x}(y^2 + 2y).$$

3. Найти наибольшее значение функции $f(x,y)$ в квадрате $[0,1] \times [0,1]$:

3.1. $f(x,y) = x^2 + 3y + y^2$;
3.2. $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y$;
3.3. $f(x,y) = x^2 - y^2 - x + y + 1$;
3.4. $f(x,y) = x^2 - 2y - x + 1$;
3.5. $f(x,y) = y^2 - 2x - y - 10$;
3.6. $f(x,y) = x^2 + y^2 + x - y$;
3.7. $f(x,y) = x^2 - y^2 + x + 3y + 1$.

4. Найти в указанной точке (x_0, y_0) дифференциал функции $u = u(x,y)$, заданной неявно

$$4.1.\ u^3 - xu + y = 0, \quad (3,-2);$$

$$4.2.\ x + yu = e^{u-x-y}, \quad (1,0);$$

$$4.3.\ x - u = u\ln(uy + 1), \quad (1,0);$$

$$4.4.\ xyu = x + y + u, \quad (1,2);$$

$$4.5.\ xu = \ln\frac{u}{y} + 1, \quad (0,1);$$

$$4.6.\ xy + u = e^{xyu}, \quad (0,1);$$

$$4.7.\ \ln(x + u) = e^{yu}, \quad (0,0).$$

Литература

1. Ильин, В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. М.: Наука, 1971. Ч. 1. 600 с.

2. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. Гармонический анализ: Учебник. / Л.Д. Кудрявцев. М.: Физматлит, 2002. Т. 2. 400 с.

3. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович. М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2005. 558 с.

4. Кудрявцев, Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: Учеб. пособие для вузов / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. М.: Наука. Физматлит, 1995. 496 с.

5. Виноградова, И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Учеб. пособие для университетов, пед. вузов. / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. М.: Высшая школа, 2002.Кн. 1. 725 с.

6. Дюбюк, П.Е. Сборник задач по курсу высшей математики для втузов / П.Е. Дюбюк, Г.И. Кручкович, Н.Н. Глаголева, Н.И. Гутарина, И.А. Панфилова, Б.С. Римский-Корсаков, Р.С. Сенкевич-Бурштейн, Х.Р. Сулейманова, И.А. Чегис. М.: Высшая школа, 1963. 663 с.

7. Ярахмедов, Г.Я. Математический анализ. Многомерный математический анализ / Г.Я. Ярахмедов. Новосибирск, 2001.

Приложение.

Таблица производных элементарных функций

$$(\mathrm{const})' = 0, \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \ \ \forall a > 0, \quad (e^x)' = e^x,$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a|x|)' = \frac{1}{x\ln a},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$(\mathrm{sh} x)' = (\mathrm{ch} x), \quad (\mathrm{ch} x)' = (\mathrm{sh} x),$$

$$(\mathrm{th} x)' = \frac{1}{(\mathrm{ch}^2 x)}, \quad (\mathrm{cth} x)' = -\frac{1}{(\mathrm{sh}^2 x)}.$$

Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\mathrm{ch}\, x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\mathrm{sh}\, x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k, \quad x \in (-1, 1],$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!} x^k, \quad x \in [-1, 1].$$

Формулы из тригонометрии

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}, \quad \mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\beta \pm \mathrm{ctg}\alpha},$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}, \quad \mathrm{ctg}2\alpha = \frac{1}{2}(\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha),$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2},$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta),$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta),$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta),$$

ОГЛАВЛЕНИЕ