КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ СМЕСЕЙ ЖИДКОСТЕЙ

ЧАСТЬ I

Учебное пособие

Кемерово 2010

Предисловие

Реальные среды в природных процессах и различных областях человеческой деятельности – смеси двух или более компонентов. Гомогенная (иногда многокомпонентная) смесь состоит из компонентов, одинаковых по своему фазовому составу. Если же в смеси имеются компоненты, различающиеся друг от друга по фазе, то среда называется гетерогенной (или многофазной). К последним можно отнести, например, жидкости с твердыми или газовыми включениями. Сейчас трудно указать область техники, не использующую неоднородные среды (смеси). Это, прежде всего, – ракетная техника со сложными по физическому и химическому составу потоками в соплах ракетных двигателей. Это – современные химические технологии, использующие в промышленном производстве многокомпонентные и многофазные потоки сложных смесей реагирующих между собой веществ. Это – энергетика, применяющая потоки разнообразных парожидкостных смесей для снятия тепла с поверхностей нагрева парогенераторов и реакторов. Это – гидротехника, занимающаяся заиленными или несущими шугу речными потоками, санитарная техника, борющаяся с запылением атмосферы и водных бассейнов, и многие другие области техники.

Теоретическое описание неоднородных потоков, независимо от того, будет ли поток гомогенным или гетерогенным, требует принятия основного допущения о сплошности всех совместно движущихся совокупностей частиц, как отдельных составляющих, так и смеси их в целом. Подобно тому, как это принимается в механике однородной среды, предполагается, что в элементарном объеме смеси, так же как и в элементарных объемах составляющих, несмотря на малость этих объемов, содержится достаточно большое число частиц, для того чтобы можно было в допустимом приближении применять статистическое осреднение физических параметров этих частиц по их множеству.

В этой части пособия основным объектом изучения является математическая модель двухкомпонентной смеси вязких сжимаемых жидкостей (газов), представляющая собой некоторое обобщение классической модели Навье-Стокса. Вопросы о математической корректности краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, возникающих при моделировании сплошных сред, вызывает неизменный интерес математиков, поскольку их решение встречает существенные трудности в математическом плане, стимулируя тем самым дальнейшее развитие математических методов. В частности, вопросы динамики вязкой жидкости очень трудны с математической точки зрения и не случайно задача о глобальной разрешимости многомерной системы Навье-Стокса включена в список так называемых "проблем тысячелетия". В последние два десятилетия теория глобальной разрешимости многомерных уравнений динамики вязкой сжимаемой жидкости переживает свое бурное развитие, обусловленное возникновением нескольких новых направлений. Одно из этих направлений, связанное с применением метода компенсированной компактности, представлено в данном учебном пособии применительно к модели динамики смесей вязких сжимаемых жидкостей.

Материал первой части главы носит вспомогательный характер: содержит краткое описание математических моделей смесей сплошных сред, обзор необходимых понятий и результатов из функционального анализа и теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Вторая глава посвящается исследованию глобальной корректности краевой задачи об установившемся пространственном движении двухкомпонентных смесей вязких сжимаемых жидкостей и основным ее результатом является глобальная теорема существования слабых обобщенных решений этой задачи. Решение упомянутой задачи строится как предел однопараметрического семейства сильных обобщенных решений регуляризованной краевой задачи. Построение сильных обобщенных решений регуляризованной задачи демонстрирует применение метода априорных оценок и теоремы о неподвижной точке нелинейного оператора. Предельный переход осуществляется с использованием результатов теории компенсированной компактности и метода монотонности.

Глава 1. Модели динамики смесей вязких сжимаемых жидкостей и математический аппарат

В данной главе даются наиболее употребительные формулы векторного и тензорного анализа, излагается краткий вывод систем уравнений, моделирующих движения смесей вязких сжимаемых жидкостей и приводятся необходимые вспомогательные сведения из функционального анализа и теории дифференциальных уравнений.

1.1. Наиболее употребительные формулы векторного и тензорного анализа

Методы векторного и тензорного исчислений играют важную роль в механике сплошной среды и некоторых других разделов теоретической и математической физики, непосредственно связанных с теорией поля. Объясняется это тем, что используемая в этих методах математическая символика полностью отражает и обобщает действительные связи между физическими величинами. В настоящем разделе приведем наиболее употребительные формулы векторного и тензорного исчислений в прямоугольных декартовых координатах. Пользование в дальнейшем ссылками на эти формулы (без их вывода) значительно облегчает изложение математической стороны курса и позволяет более выпукло показать физическую сущность его содержания.

Учебная литература по векторному и тензорному исчислениям обширна, укажем лишь некоторые источники: [3], [11], [18], [36].

1.1.1. Векторная алгебра и векторный анализ

1. Векторная алгебра. В учебном пособии введены следующие общепринятые обозначения.

Скаляры даны латинскими или греческими буквами, строчными, иногда заглавными, например, a, b, U, V, α, β.

Векторы даны теми же буквами, что и скаляры, но со стрелкой сверху, например, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. Модуль (величина) вектора обозначается $| \vec{a} |$. Единичный вектор (орт) $\vec{u}$, направленный вдоль $\vec{a}$, записывается как $\vec{a} =| \vec{a} | \vec{u}$.

Оси прямоугольной декартовой системы координат: Ox, Oy, Oz или Ox_1, Ox_2, Ox_3. Проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат обозначаются a_x, a_y, a_z или a_1, a_2, a_3.

Знаки математических операций сложения и вычитания обычные. Знак скалярного произведения векторов – точка между сомножителями, например, $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Знак векторного произведения – наклонный крест, например, $\vec{a} \times \vec{b}$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр обладают следующими свойствами:

$$\begin{gathered} \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \\ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}, \\ \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$ имеет свойства:

$$\begin{gathered} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, \\ \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}), \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ при } | \vec{a} | \neq 0,\ | \vec{b} | \neq 0, \text{ только если } \vec{a} \perp \vec{b}, \\ \vec{a} \cdot \vec{a} =| \vec{a} |^2, \\ (\vec{a} \pm \vec{b})^2 =| \vec{a} |^2 \pm 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + | \vec{b} |^2 . \end{gathered} \tag{1.2}$$

Векторное произведение двух векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ равно по величине площади параллелограмма

$$| \vec{a} \times \vec{b} | = | \vec{a} | \cdot | \vec{b} | \cdot \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right), \tag{1.3}$$

построенного на векторах-сомножителях, и обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered} \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \\ \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}), \\ \vec{a} \times \vec{b} = 0 \text{ при } | \vec{a} | \neq | \vec{b} | \neq 0. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Смешанное скалярно-векторное произведение трех векторов равно $\pm$ объему параллелепипеда

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}), \tag{1.5}$$

построенного на векторах-сомножителях, и обладает свойством

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0 \text{ при } \mid\vec{a}\mid\neq\mid\vec{b}\mid\neq\mid\vec{c}\mid\neq 0. \tag{1.6}$$

Двойное векторное произведение трех векторов

$$\begin{aligned}\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})&=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c},\\ (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}&=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}.\end{aligned} \tag{1.7}$$

В системе координат (x,y,z) или (x_1,x_2,x_3) скалярное или векторное поля физических величин задаются функциями

$$\begin{gathered}\lambda=\lambda(x,y,z)=\lambda(x_1,x_2,x_3),\\ a_x=a_x(x,y,z), a_y=a_y(x,y,z), a_z=a_z(x,y,z)\\ \text{или } a_p=a_p(x_1,x_2,x_3),\ \text{где } p=1,\ 2,\ 3.\end{gathered} \tag{1.8}$$

В дальнейшем, если индекс в одночленном выражении повторяется два раза, то подразумевается суммирование по этому индексу от 1 до 3, а знак суммы опускается, исключения оговариваются. Формулы перехода от одной системы координат $(x_p\,;\ p=1,2,3)$ к другой $(x'_q\,;\ q=1,2,3)$ имеют вид

$$\begin{gathered}x_p=\sum_{q=1}^{3}\alpha_{pq}x'_q=\alpha_{pq}x'_q,\ x'_q=\sum_{p=1}^{3}\alpha_{qp}x_p=\alpha_{qp}x_p,\\ \alpha_{pq}=\cos\left(\widehat{x_p,x'_q}\right),\ \sum_{s=1}^{3}\alpha_{ps}\alpha_{qs}=\alpha_{ps}\alpha_{qs}=\begin{cases}0 & \text{при } q\neq p,\\ 1 & \text{при } q=p,\end{cases}\\ \begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{vmatrix}=det(\alpha_{pq})=\pm 1.\end{gathered} \tag{1.9}$$

Верхний знак в величине определителя $det(\alpha_{pq})$ соответствует сонаправленным системам координат, нижний – противоположному случаю.

Если при переходе от одной системы координат к любой другой (безразлично, сонаправленной или нет) функция λ сохраняет свое значение, т. е.

$$\lambda(x,y,z)=\lambda(x',y',z'), \tag{1.10}$$

то она определяет физический, или истинный, скаляр.

Проекции физического (истинного) вектора при переходе от одной системы координат к другой изменяются по тем же формулам (1.9), что и сами координаты.

$$a_p = \alpha_{pq} a'_q,\ a'_q = \alpha_{qp} a_p. \tag{1.11}$$

Единичные векторы, орты осей координат обозначаются следующим образом: ось $Ox,\ Ox_1$ - орт $\vec{i},\ \vec{e}_1$, ось $Oy,\ Ox_2$ - орт $\vec{j},\ \vec{e}_2$, ось $Oz,\ Ox_3$ - орт $\vec{k},\ \vec{e}_3$. Основные соотношения между ортами осей координат:

$$\begin{gathered}\vec{e}_p \cdot \vec{e}_q = \cos\left(\widehat{x_p, x_q}\right) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad q \neq p, \\ 1 & \text{при} \quad q = p, \end{cases} \\ \vec{e}_p \times \vec{e}_q = \vec{e}_r. \end{gathered} \tag{1.12}$$

(порядок расположения индексов p, q, r соответствует круговой перестановке $1 \to 2 \to 3 \to 1 \to ...$). Разложение вектора по ортам осей координат:

$$\begin{gathered}\vec{a} = a_p \vec{e}_p,\ \mid \vec{a} \mid^2 = a_p a_p = \sum_{p=1}^{3} a_p^2, \\ a_p = \vec{a} \cdot \vec{e}_p = \mid \vec{a} \mid \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{e}_p}\right). \end{gathered} \tag{1.13}$$

Аналитическая форма некоторых простейших операций над векторами:

$$\begin{gathered}(\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c} \pm ...)_p = a_p \pm b_p \pm c_p \pm ...\ (p = 1,\ 2,\ 3), \\ (\lambda \vec{a})_p = \lambda a_p,\ \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \\ (\vec{a} \times \vec{b})_x = a_y b_z - a_z b_y,\ (\vec{a} \times \vec{b})_y = a_z b_x - a_x b_z,\ (\vec{a} \times \vec{b})_z = a_x b_y - a_y b_x, \\ \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},\ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{gathered} \tag{1.14}$$

2. Векторный анализ. Производная вектор-функции $\vec{a}(s)$ по скалярному аргументу s обозначается $\dfrac{d\vec{a}}{ds}$, производные от скалярной φ и векторной функции $\vec{a}$ по направлению l - $\dfrac{d\varphi}{dl}$, $\dfrac{d\vec{a}}{dl}$. Для пространственных производных используются общепринятые обозначения: градиент скалярного поля функции φ - $\nabla\varphi$, дивергенция (расходимость) векторного поля $\vec{a}$ - $\operatorname{div}\vec{a}$, вихрь (ротор) - $\operatorname{rot}\vec{a}$. Элемент дуги кривой обозначен dl, поверхности - $d\sigma$, объема - dx. Символы интегрирования по кривой $C - \int\limits_C (...)dl$, по поверхности $\partial\Omega$ - $\int\limits_{\partial\Omega} (...)d\sigma$, по объему Ω - $\int\limits_{\Omega} (...)dx$.

Производная вектор-функции $\vec{a}$ по скалярному аргументу s, при условии существования указанного ниже предела, равна

$$\frac{d\vec{a}}{ds} = \lim_{\triangle s \longrightarrow 0} \frac{\vec{a}(s + \triangle s) - \vec{a}(s)}{\triangle s} = \lim_{\triangle s \longrightarrow 0} \frac{\triangle \vec{a}}{\triangle s}. \tag{1.15}$$

Правила дифференцирования:

$$\begin{gathered}
\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{a}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{a}}{ds}f'(t), \;\; s = f(t), \\
\frac{d}{ds}(\vec{a} \pm \vec{b} \pm ...) = \frac{d\vec{a}}{ds} \pm \frac{d\vec{b}}{ds} \pm ..., \\
\frac{d}{ds}(\varphi\vec{a}) = \frac{d\varphi}{ds}\vec{a} + \varphi\frac{d\vec{a}}{ds}, \\
\frac{d}{ds}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{ds} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{ds}, \;\; \frac{d}{ds}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{ds} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{ds}.
\end{gathered} \tag{1.16}$$

Производные по заданному направлению l с ортом $\vec{l}$ выражаются следующим образом:

$$\frac{d}{dl} = \vec{l} \cdot \nabla, \;\; \frac{d\varphi}{dl} = \vec{l} \cdot \nabla\varphi, \;\; \frac{d\vec{a}}{dl} = (\vec{l} \cdot \nabla)\vec{a}. \tag{1.17}$$

Некоторые часто встречающиеся интегральные соотношения:

$$\begin{gathered}
\int\limits_{\partial\Omega} \vec{n}\varphi \, d\sigma = \int\limits_{\Omega} \nabla\varphi \;\, dx, \;\; \int\limits_{\partial\Omega} \vec{a_n} \;\, d\sigma = \int\limits_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \vec{a} \, d\sigma = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} \, dx, \\
\int\limits_{\partial\Omega} \vec{n} \times \vec{a} \;\, d\sigma = \int\limits_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{a} \;\, dx.
\end{gathered} \tag{1.18}$$

Наиболее употребительные дифференциальные формулы векторного анализа:

$$
\begin{gathered}
\operatorname{div}(\varphi\vec{a}) = \varphi\ \operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\nabla\varphi,\\
\operatorname{rot}(\varphi\vec{a}) = \varphi\ \operatorname{rot}\vec{a} + \nabla\varphi\times\vec{a},\\
\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b},\\
\operatorname{rot}(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\nabla)\,\vec{a} - (\vec{a}\cdot\nabla)\,\vec{b} + \vec{a}\ \operatorname{div}\vec{b} - \vec{b}\operatorname{div}\vec{a},\\
\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\nabla)\,\vec{b} + (\vec{b}\cdot\nabla)\,\vec{a} + \vec{a}\times\operatorname{rot}\vec{b} + \vec{b}\times\operatorname{rot}\vec{a},\\
(\vec{a}\cdot\nabla)\,\vec{a} = \nabla\left(\frac{|\ \vec{a}\ |^2}{2}\right) + \operatorname{rot}\vec{a}\times\vec{a},\\
\operatorname{div}\nabla\varphi = \triangle\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},\ \operatorname{rot}\nabla\varphi\equiv 0,\ \operatorname{div}\ \operatorname{rot}\vec{a}\equiv 0,\\
\nabla\ \operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{rot}\ \operatorname{rot}\vec{a} + \triangle\vec{a},\ \triangle\vec{a} = \frac{\partial^2\vec{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial\vec{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{a}}{\partial z^2},\\
(\triangle\vec{a})_x = \triangle a_x,\ (\triangle\vec{a})_y = \triangle a_y,\ (\triangle\vec{a})_z = \triangle a_z.
\end{gathered}
\tag{1.19}
$$

Пространственные производные от скалярных и векторных функций выражаются равенствами

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\varphi}{\partial x} = (\nabla\varphi)_x,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = (\nabla\varphi)_y,\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = (\nabla\varphi)_z,\\
\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},\\
(\operatorname{rot}\vec{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z},\ (\operatorname{rot}\vec{a})_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x},\ (\operatorname{rot}\vec{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.
\end{gathered}
\tag{1.20}
$$

Интегральные формулы векторного анализа в прямоугольных декартовых координатах имеют вид

$$
\int\limits_{\partial\Omega} n_x\varphi\ d\sigma = \int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\ d\sigma,\ \int\limits_{\partial\Omega} n_y\varphi\ d\sigma = \int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\ d\sigma,\ \int\limits_{\partial\Omega} n_z\varphi\ d\sigma = \int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\ d\sigma,
$$

$$
\int\limits_{\partial\Omega} n_x\vec{a}\ d\sigma = \int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial\vec{a}}{\partial x}\ d\sigma,\ \int\limits_{\partial\Omega} n_y\vec{a}\ d\sigma = \int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial\vec{a}}{\partial y}\ d\sigma,\ \int\limits_{\partial\Omega} n_z\vec{a}\ d\sigma = \int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial\vec{a}}{\partial z}\ d\sigma,
$$

$$
\int\limits_{\partial\Omega}(n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z)\ d\sigma = \int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dx, \tag{1.21}
$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} (n_x a_y - n_y a_x)\ d\sigma = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)\ dx,$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} (n_y a_z - n_z a_y)\ d\sigma = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right)\ dx,$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} (n_z a_x - n_x a_z)\ d\sigma = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right)\ dx.$$

1.1.2. Тензорная алгебра и некоторые формулы тензорного анализа

1. Тензорная алгебра. Тензоры обозначаются заглавными латинскими или греческими буквами, иногда строчными, например, P, Q, S, T, σ. Компоненты тензоров – теми же буквами с индексами. Число индексов при компоненте определяет ранг тензора. Вектор по числу индексов можно рассматривать как тензор первого ранга, скаляр – как тензор нулевого ранга. В дальнейшем будут применяться тензоры второго ранга (диады), у компонент которых два индекса – P_{pq}, Q_{rs} и т. д.

Тензор второго ранга Т задается совокупностью девяти величин (компонент), располагаемых в матрице (первый индекс - номер строки, второй - столбца):

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = (T_{pq}),\ \ p, q = 1, 2, 3. \tag{1.22}$$

Тензор T^* называется сопряженным с T , если $T^*_{pq} = T_{qp}$. Тензор S, обладающий свойством $S = S^*$, $S_{pq} = S^*_{pq}$, называется самосопряженным, или симметричным. Значения компонент такого тензора не зависят от порядка расположения индексов, т. е. $S_{pq} = S_{qp}$. Тензор A антисимметричен, если $A^* = -A$ или $A^*_{pq} = -A_{pq}$ и, следовательно, $A_{pp} = 0$, $p = 1, 2, 3$ (суммирование по p здесь не предполагается).

Часто употребляется так называемая тензорная единица I – симметричный сферический тензор с компонентами, не зависящими от выбора осей координат:

$$I_{pq} = \begin{cases} 0 & \text{при} \ \ q \neq p, \\ 1 & \text{при} \ \ q = p, \end{cases} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

Знаки операций сложения и вычитания тензоров, умножения тензора на скаляр – обычные. Различные виды произведений двух тензоров обозначаются следующим образом: скалярное - двумя точками между сомножителями, векторное – наклонным крестом, тензорное произведение двух векторов – смежным расположением сомножителей, без знака между ними.

При переходе от одной системы координат x_1, x_2, x_3 к другой x_1', x_2', x_3' компоненты тензора преобразуются подобно произведениям компонент (проекций) двух векторов:

$$T_{pq} = \alpha_{pr}\alpha_{qs}T'_{rs},\ T'_{pq} = \alpha_{rp}\alpha_{sq}T_{rs}.$$

Сложение, вычитание тензоров, умножение тензора на скаляр производится по формулам

$$(P \pm Q \pm ...)_{pq} = P_{pq} \pm Q_{pq} \pm ...,$$
$$(\lambda P)_{pq} = (P\lambda)_{pq} = \lambda P_{pq}. \tag{1.24}$$

Разложение тензора на симметричную и антисимметричную части:

$$T \equiv \frac{1}{2}(T + T^*) + \frac{1}{2}(T - T^*) = S + A,\ S = \frac{1}{2}(T + T^*),$$
$$A = \frac{1}{2}(T - T^*),\ S_{pq} = S_{qp} = \frac{1}{2}(T_{pq} + T_{qp}), \tag{1.25}$$
$$A_{pq} = -A_{qp} = \frac{1}{2}(T_{pq} + T_{qp}).$$

Умножение вектора на тензор или тензора на вектор образует соответственно векторы $\vec{a}T$ и $T\vec{a}$ с проекциями (компонентами)

$$(\vec{a}T)_p = a_q T_{qp},\ (T\vec{a})_p = T_{pq}a_q,\ p = 1, 2, 3. \tag{1.26}$$

(при сохранения порядка расположения сомножителей в левой в правой частях индексы суммирования q расположены по соседству). Из определения операций (1.26) вытекают следующие свойства:

$$\vec{a}I = I\vec{a} = \vec{a} - \text{ "единичное" свойство},$$
$$S\vec{a} = \vec{a}S,\ (\text{S - симметричный тензор}), \tag{1.27}$$
$$T\vec{a} = \vec{a}T^*,\ \vec{a}T = T^*\vec{a},\ A\vec{a} = \vec{c} \times \vec{a},\ \vec{a}A = \vec{a} \times \vec{c},$$

где вектор $\vec{c}$, эквивалентный антисимметричному тензору A, имеет компоненты

$$c_1 = A_{32} = A^*_{23},\ c_2 = A_{13} = A^*_{31},\ c_3 = A_{21} = A^*_{12}. \tag{1.28}$$

Скалярное произведение двух тензоров $P : Q$ дает скаляр

$$
\begin{gathered}
P : Q = P_{pq} Q_{pq}, \\
P : I = I : P = P_{pp} = P_{11} + P_{22} + P_{33}, \\
P : P = P_{pq} P_{pq} = P^2 = \mid P \mid^2 \ - \text{квадрат модуля тензора P.}
\end{gathered}
\tag{1.29}
$$

Векторное произведение двух тензоров $P \times Q$ определяет вектор с проекциями

$$
(P \times Q)_p = P_{qs} Q_{sr} - P_{rs} Q_{sq} \tag{1.30}
$$

(круговая перестановка индексов $p \to q \to r \to p \to ...$, суммирование по s).

Условие симметрии тензора P:

$$
P \times I = 0. \tag{1.31}
$$

Мультипликативный тензор, диада $\vec{a} \otimes \vec{b}$ получается в результате диадного умножения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$
\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}, \ (\vec{a} \otimes \vec{b})^* = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 \end{pmatrix}. \tag{1.32}
$$

Тензорное произведение двух тензоров PQ определяет тензор

$$
\begin{gathered}
(PQ)_{pq} = P_{pr} Q_{rq}, \ p, q = 1, 2, 3 \ (\text{суммирование по } r), \\
(PI)_{pq} = P_{pr} I_{rq} = P_{pq}, \ PI = IP = P.
\end{gathered}
\tag{1.33}
$$

Инварианты тензора 2-го ранга:

$$
\begin{gathered}
I_1 = T_{pp} = T_{11} + T_{22} + T_{33} \ - \text{первый, линейный, инвариант,} \\
I_2 = T_{pq} T_{pq} = \mid T \mid^2 \ - \text{второй, квадратичный, инвариант,} \\
I_3 = det\,(T_{pq}) \ - \ \text{третий, кубичный, инвариант.}
\end{gathered}
\tag{1.34}
$$

Разложение тензора T на сферическую $T^{(s)}$ и девиаторную $T^{(d)}$ части:

$$
\begin{gathered}
T \equiv \frac{1}{3} I_1 I + \left(T - \frac{1}{3} I_1 I \right) = T^{(s)} + T^{(d)}, \\
\frac{1}{3} I_1 I = T^{(s)}, \ T - \frac{1}{3} I_1 I = T^{(d)}.
\end{gathered}
\tag{1.35}
$$

2. Некоторые формулы тензорного анализа. Дифференциальная диада, или дифференциальный тензор обозначается $\nabla\vec{a}$ (условно – градиент вектора), сопряженная с нею диада – $(\nabla\vec{a})^*$, дивергенция поля тензора T – $\operatorname{div} T$.

Дифференциальная диада $\nabla\vec{a}$ и сопряженная с ней диада $(\nabla\vec{a})^*$ определены следующим образом:

$$\nabla\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad (\nabla\vec{a})^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \tag{1.36}$$

Тензоры $\nabla\vec{a}$ и $(\nabla\vec{a})^*$ можно разложить на симметричную и антисимметричную части:

$$\begin{aligned} \nabla\vec{a} &\equiv \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{a} + (\nabla\vec{a})^*\right) + \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{a} - (\nabla\vec{a})^*\right) = S + A, \\ (\nabla\vec{a})^* &\equiv \frac{1}{2}\left((\nabla\vec{a})^* + \nabla\vec{a}\right) + \frac{1}{2}\left((\nabla\vec{a})^* - \nabla\vec{a}\right) = S + A^*. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Симметричная часть S называется тензором скоростей деформаций $D(\vec{a})$ поля вектора $\vec{a}$ и выражается равенством

$$S = D(\vec{a}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{a} + (\nabla\vec{a})^*\right), \;\; S_{pq} = (D(\vec{a}))_{pq} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_q}{\partial x_p} + \frac{\partial a_p}{\partial x_q}\right). \tag{1.38}$$

Дивергенция тензора $\operatorname{div} T$ определена равенствами

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} T)_x &= \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z}, \\ (\operatorname{div} T)_y &= \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z}, \\ (\operatorname{div} T)_z &= \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}, \\ \operatorname{div}\left(\vec{a}\otimes\vec{b}\right) &= (\vec{a}\cdot\nabla)\,\vec{b} + \vec{b}\operatorname{div}\vec{a}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Тензорные аналоги интегральных формул раздела 1.1.1.2 имеют вид

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{\partial\Omega} \vec{n}\, T\, d\sigma = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} T\, dx, \\
\int\limits_{\partial\Omega} \left(n_x T_{xx} + n_y T_{yx} + n_z T_{zx}\right)\, d\sigma = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z}\right) dx, \\
\int\limits_{\partial\Omega} \left(n_x T_{xy} + n_y T_{yy} + n_z T_{zy}\right)\, d\sigma = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z}\right)\, dx, \\
\int\limits_{\partial\Omega} \left(n_x T_{xz} + n_y T_{yz} + n_z T_{zz}\right)\, d\sigma = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}\right)\, dx.
\end{gathered}
\tag{1.40}
$$

1.2. Математические модели динамики смесей вязких сжимаемых жидкостей

Система динамических уравнений, описывающих движение многокомпонентных смесей жидкостей, состоит из следующих законов сохранения для каждой компоненты смеси [21], [62]:

1) уравнения сохранения массы (уравнения неразрывности),

2) закона сохранения импульса,

3) закона сохранения энергии.

Эта совокупность уравнений, как правило, оказывается незамкнутой, и для того чтобы на ее основе изучать различные задачи о движении смесей жидкостей, необходимо ее дополнять соотношениями, характеризующими определенные свойства данной среды.

Рассмотрим указанные выше законы сохранения в интегральной и дифференциальной формах.

1.2.1. Уравнения сохранения для составляющих смеси

Многокомпонентную среду образуют N сред (компонентов), перемешанных так, что в каждом элементарном объеме присутствуют частицы, принадлежащие всем компонентам (составляющим). Для каждой из этих компонент в каждой точке объема можно ввести в рассмотрение приведенную плотность ρ_i (масса i-ой компоненты в единице объема среды), скорость $\vec{u}^{(i)}$ $(i = 1, ..., N)$ и другие кинематические и динамические параметры, относящиеся к своей составляющей смеси. Таким образом, в каждой точке объема, занятого смесью, будут определены N плотностей ρ_i, N скоростей $\vec{u}^{(i)}$ и т. д.

1. Уравнения неразрывности. Феноменологический подход к описанию многокомпонентных смесей связан с представлением средних величин (ρ_i, $\vec{u}^{(i)}$ и др.) как непрерывно распределенных в занимаемом объеме Ω (ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^3$), ограниченном поверхностью $\partial\Omega$ с единичной внешней нормалью $\vec{n}$.

Тогда уравнения сохранения массы для i-ой составляющей смеси можно записать следующим образом:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial \rho_i}{\partial t}\, dx = -\int\limits_{\partial\Omega} \rho_i(\vec{u}^{(i)} \cdot \vec{n})\, d\sigma + \int\limits_{\Omega} h_i\, dx, \quad i = 1, ..., N, \tag{1.41}$$

где t – время, h_i характеризует интенсивность перехода массы из одной компоненты смеси в другую в единицу объема и в единицу времени в результате процессов смешения, ионизации, химических реакций и т. п., причем из закона сохранения массы при различных физико-химических превращениях следует, что

$$\sum_{i=1}^{N} h_i = 0. \tag{1.42}$$

Применяя к первому интегралу в правой части (1.41) формулу Гаусса-Остроградского (см. формулу (1.18)):

$$\int\limits_{\partial\Omega} \rho_i(\vec{u}^{(i)} \cdot \vec{n})\, d\sigma = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)})\, dx, \tag{1.43}$$

ввиду произвольности объема Ω, получаем дифференциальные уравнения сохранения массы для каждой составляющей смеси:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = h_i, \quad i = 1, ..., N. \tag{1.44}$$

В частном случае $h_i = 0$, $i = 1, ..., N$ уравнения (1.44) известны в механике как уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = 0, \quad i = 1, ..., N. \tag{1.45}$$

2. Уравнения сохранения импульсов. Уравнения баланса импульсов каждой составляющей смеси можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_i \vec{u}^{(i)})\, dx = -\int\limits_{\partial\Omega} \rho_i \vec{u}^{(i)}(\vec{u}^{(i)} \cdot \vec{n})\, d\sigma + \int\limits_{\partial\Omega} (P^{(i)} \cdot \vec{n})\, d\sigma + \\ + \int\limits_{\Omega} \rho_i \vec{f}^{(i)}\, dx + \int\limits_{\Omega} \vec{J}^{(i)}\, dx, \quad i = 1, ..., N,\end{gathered} \tag{1.46}$$

где первое слагаемое в правой части (1.46) соответствует притоку импульса i-ой составляющей через поверхность $\partial\Omega$; второе и третье слагаемые – воздействию внешних поверхностных и массовых сил, приходящихся на i-ую компоненту и характеризуемых тензором $P^{(i)}$ и вектором $\vec{f}^{(i)}$; наконец, $\vec{J}^{(i)}$ представляет интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси, причем из закона сохранения импульса при различных взаимодействиях, аналогично (1.42), имеет место

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{J}^{(i)} = 0. \tag{1.47}$$

Интегральным соотношениям (1.46), после применения формулы Гаусса-Остроградского, соответствуют дифференциальные уравнения сохранения импульсов каждой составляющей:

$$\frac{\partial(\rho_i \vec{u}^{(i)})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}) = \operatorname{div} P^{(i)} + \rho_i \vec{f}^{(i)} + \vec{J}^{(i)},\ i = 1, ..., N. \tag{1.48}$$

С учетом уравнений неразрывности (1.45), уравнения (1.48) можно переписать в следующем виде:

$$\rho_i \frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{\partial t} + \rho_i (\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla) \vec{u}^{(i)} = \operatorname{div} P^{(i)} + \rho_i \vec{f}^{(i)} + \vec{J}^{(i)},\ i = 1, ..., N. \tag{1.49}$$

3. Уравнения сохранения энергий. Рассмотрим теперь уравнения баланса энергий каждой компоненты смеси. Обозначим через U_i удельную (отнесенную к единице массы) внутреннюю энергию i-ой составляющей смеси, $i = 1, ..., N$. Сумма внутренней энергии и кинетической

$$E_i = \frac{1}{2} |\vec{u}^{(i)}|^2 + U_i \tag{1.50}$$

называется полной энергией i-ой компоненты смеси, $i = 1, ..., N$. Тогда, уравнения сохранения энергии i-ой компоненты смеси могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_i E_i)\, dx = -\int\limits_{\partial\Omega} \rho_i E_i (\vec{u}^{(i)} \cdot \vec{n})\, d\sigma + \int\limits_{\partial\Omega} \vec{c}^{(i)} \cdot \vec{n}\, d\sigma + \\ + \int\limits_{\Omega} \rho_i \vec{f}^{(i)} \cdot \vec{u}^{(i)}\, dx + \int\limits_{\Omega} \vec{J}^{(i)} \cdot \vec{u}^{(i)}\, dx + \int\limits_{\Omega} \Gamma_i\, dx - \\ - \int\limits_{\partial\Omega} \vec{q}^{(i)} \cdot \vec{n}\, d\sigma,\ \ i = 1, ..., N,\end{gathered} \tag{1.51}$$

где первое слагаемое в правой части (1.51) соответствует притоку энергии i-ой составляющей через поверхность $\partial\Omega$; второе и третье слагаемые – работе внешних поверхностных (характеризуемой вектором $\vec{c}^{(i)}$(в частном случае $\vec{c}^{(i)} \cdot \vec{n}$=$(P^{(i)} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u}^{(i)}$, $i = 1, ..., N$)) и массовых сил, приходящихся на i-ую составляющую смеси; далее, Γ_i представляет интенсивность обмена энергией между компонентами; пятое слагаемое представляет приток тепла через поверхность $\partial\Omega$, характеризуемый вектором $\vec{q}^{(i)}$. Аналогично (1.42) и (1.47), из закона сохранения энергии при различных взаимодействиях имеет место формула

$$\sum_{i=1}^{N}(\Gamma_i + \vec{J}^{(i)} \cdot \vec{u}^{(i)}) = 0. \tag{1.52}$$

Интегральным соотношениям (1.51), после применения формулы Гаусса-Остроградского, соответствуют дифференциальные уравнения сохранения полных энергий каждой оставляющей смеси:

$$\begin{gathered}\frac{\partial(\rho_i E_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i E_i \vec{u}^{(i)}) = \operatorname{div}(P^{(i)} \cdot \vec{u}^{(i)}) + \rho_i \vec{f}^{(i)} \cdot \vec{u}^{(i)} + \\ + \vec{J}^{(i)} \cdot \vec{u}^{(i)} + \Gamma_i - \operatorname{div}\vec{q}^{(i)},\ i = 1, ..., N.\end{gathered} \tag{1.53}$$

С учетом обозначений (1.50) и уравнений (1.45) и (1.49), получаем из (1.53) дифференциальные уравнения сохранения внутренних энергий каждой компоненты смеси:

$$\frac{\partial(\rho_i U_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i U_i \vec{u}^{(i)}) = P^{(i)} : \nabla\vec{u}^{(i)} + \Gamma_i - \operatorname{div}\vec{q}^{(i)},\ i = 1, ..., N. \tag{1.54}$$

Тем самым, получены уравнения (1.45), (1.48) и (1.54), которые математически описывают перечисленные в начале раздела законы сохранения. При изучении движения определенной сплошной среды уравнения (1.44), (1.48) и (1.54) конкретизируются заданием вектора массовых сил $\vec{f}^{(i)}$ для i-ой компоненты смеси и определяющих термодинамических и реологических соотношений, замыкающих систему уравнений (1.44), (1.48) и (1.54).

Следует отметить, что единого подхода в конкретизации термодинамических и реологических соотношений при моделировании движения смесей жидкостей на сегодняшний день нет. Поэтому, выделим два основных – это так называемые "многоскоростной" и "односкоростной" подходы [1].

В учебном пособии рассматриваются модели движения двухкомпонентных (бинарных) смесей. Обобщение результатов для случая смесей из трех и более компонент принципиальных трудностей не вызывает.

1.2.2. Многоскоростная модель движения смесей вязких сжимаемых жидкостей

Одним из вариантов реологических соотношений в многоскоростной модели смеси являются равенства [62]

$$
\begin{gathered}
P^{(i)} = -p_i I + \sigma^{(i)},\ i = 1, 2, \\
\sigma^{(i)} = \sum_{j=1}^{2} \left(2\mu_{ij} D(\vec{u}^{(j)}) + \lambda_{ij} \mathrm{div}\, \vec{u}^{(j)} I \right),\ i = 1, 2,
\end{gathered}
\tag{1.55}
$$

где p_i – давление i-ой составляющей смеси, $\sigma^{(i)}$ – вязкая часть тензора напряжений i-ой компоненты смеси, D – тензор скоростей деформаций $\left(D(\vec{w}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial x} \right)^* \right) \right)$, I – единичный тензор, коэффициенты вязкости λ_{ij} и μ_{ij} в общем случае могут зависеть от термодинамических переменных.

Принимая гипотезу локального равновесия каждой составляющей смеси [21], мы можем ввести в рассмотрение температуру θ_i i-ой компоненты смеси и, наряду с внутренней энергией U_i, использовать и другие термодинамические функции для каждой компоненты: энтропию s_i, энтальпию i_i и т. д. Составляющие компоненты смеси представляют собой двухпараметрические среды [31] (термодинамические функции компоненты зависят только от двух термодинамических параметров состояния), т. е.

$$
U_i = U_i(\rho_i, \theta_i),\ p_i = p_i(\rho_i, \theta_i),\ s_i = s_i(\rho_i, \theta_i),\ i = 1, 2,
\tag{1.56}
$$

причем справедливы соотношения Гиббса [21]

$$
\theta_i d\, s_i = d\, U_i + p_i d \left(\frac{1}{\rho_i} \right),\ i = 1, 2.
\tag{1.57}
$$

Из равенств (1.57), с учетом предположений (1.56), следуют соотношения

$$
p_i = \theta_i \frac{\partial p_i}{\partial \theta_i} + \rho_i^2 \frac{\partial U_i}{\partial \rho_i},\ i = 1, 2.
\tag{1.58}
$$

Далее, в соответствии с обобщенным законом Фурье [21], зададим вектор теплового потока $\vec{q}^{(i)}$ i-ой составляющей смеси

$$
\vec{q}^{(i)} = -k_i \nabla \theta_i,\ i = 1, 2,
\tag{1.59}
$$

где $k_i = k_i(\rho_i, \theta_i)$ – теплопроводность i-ой компоненты смеси.

Что касается выражений, определяющих интенсивность обмена импульсом $\vec{J}^{(i)}$ и энергией Γ_i между составляющими смеси, то их обычно считают пропорциональными разности скоростей и температур [1], [21]:

$$
\vec{J}^{(i)} = (-1)^{i+1} a(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}),\ a = const > 0,\ i = 1, 2,
\tag{1.60}
$$

$$\Gamma_i = (-1)^{i+1} b(\theta_2 - \theta_1) + \frac{a}{2}|\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)}|^2, \ i = 1, 2, \ b = const > 0. \qquad (1.61)$$

Таким образом, замкнутая модель для описания движения двухкомпонентных смесей жидкостей может быть образована из уравнений (1.45), (1.48), (1.53), (1.55)-(1.56), (1.58)-(1.61), к которым нужно добавить выражения для k_i, λ_{ij} и $\mu_{i,j}$, $i, j = 1, 2$.

1.2.3. Односкоростная модель движения смесей вязких сжимаемых жидкостей

Так называемый "односкоростной" подход обычно используется при описании так называемых гомогенных смесей, состоящих из хорошо перемешанных компонент в жидкой или газообразной фазе, а также растворов.

Параметры, характеризующие смесь в целом, принято определять следующим образом:

плотность смеси: $\rho = \sum\limits_{i=1}^{N} \rho_i$,

скорость (барицентрическая) центра масс смеси: $\rho\vec{u} = \sum\limits_{i=1}^{N} \rho_i \vec{u}^{(i)}$.

Тогда концентрация i-ой составляющей смеси определяется формулой: $c_i = \dfrac{\rho_i}{\rho}$, $i = 1, ..., N$.

В случае бинарной ($N = 2$) смеси положим $c_1 = c$. С учетом равенств $c_1 + c_2 = 1$ получим, что $c_2 = 1 - c$.

Иногда удобно пользоваться так называемыми диффузионными скоростями

$$\vec{v}^{(i)} = \vec{u}^{(i)} - \vec{u}, \ \ i = 1, ..., N,$$

представляющими собой скорости движения составляющих относительно центра масс или среды в целом.

Суммируя уравнения сохранения массы для компонент (1.44), с учетом соотношения (1.42) получим закон сохранения массы для смеси в целом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{u}) = 0. \qquad (1.62)$$

Таким образом, уравнение неразрывности для смеси в целом имеет обычный вид, то есть оно "не чувствует" относительного движения составляющих.

Распределение концентрации (для простоты рассматривается бинарная смесь), характеризующей состав смеси, с течением времени изменяется.

Изменение концентрации происходит двумя путями. Во-первых, при микроскопическом движении жидкости каждый данный ее участок передвигается как целое с неизменным составом. Этим путем осуществляется чисто механическое перемешивание жидкости; хотя состав каждого передвигающегося участка жидкости не меняется, но в каждой данной неподвижной точке пространства концентрация находящейся в этом месте жидкости будет со временем меняться. Такое изменение концентрации является термодинамически обратимым процессом и не ведет к диссипации энергии. Во-вторых, изменение состава может происходить путем молекулярного переноса веществ смеси из одного участка жидкости в другой. Выравнивание концентрации путем такого непосредственного изменения состава каждого из участков жидкости называется диффузией. Диффузия является процессом необратимым и представляет собой наряду с теплопроводностью и вязкостью один из источников диссипации энергии в жидкой смеси.

При отсутствии диффузии состав каждого данного элемента жидкости оставался бы неизменным при его передвижении. Это означает, что полная производная $\dfrac{dc}{dt}$ была бы равна нулю, т. е. имело бы место уравнение

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla c = 0,$$

где $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$ – барицентрическая субстанциональная производная. Это уравнение можно записать, используя (1.62) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c) + \operatorname{div}(\rho c \vec{u}) = 0,$$

т. е. в виде уравнения неразрывности для одного из веществ смеси (ρc есть масса одного из веществ смеси в единице объема). Интегрируя это уравнение по произвольному объему Ω, получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\Omega} \rho c \, dx = -\int\limits_{\partial\Omega} \rho c \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\sigma,$$

которое означает, что изменение количества данного вещества в объеме Ω равно количеству этого вещества, переносимому движущейся жидкостью через границу объема.

При наличии диффузии, наряду с потоком $\rho c \vec{u}$ данного вещества вместе со всей жидкостью имеется еще и другой поток, который приводит к переносу веществ в смеси даже при отсутствии движения жидкости в целом.

Обозначим через $\vec{J}$ плотность этого диффузионного потока, т. е. количество рассматриваемого вещества, переносимого путем диффузии в единицу времени через единицу поверхности (сумма плотностей потоков обоих веществ должна быть равна $\rho\vec{u}$, поэтому, если плотность потока одного из них есть $\rho c\vec{u} + \vec{J}$, то другого – $\rho(1-c)\vec{u} - \vec{J}$).

Тогда закон изменения количества этого вещества в произвольном объеме Ω имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} \rho c\, dx = -\int\limits_{\partial\Omega} \rho c\vec{u}\cdot\vec{n}\, d\sigma - \int\limits_{\partial\Omega} \vec{J}\cdot\vec{n}\, d\sigma$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c) + \mathrm{div}(\rho c\vec{u}) = -\mathrm{div}\vec{J}. \tag{1.63}$$

Обращаясь к уравнению неразрывности (1.45) для данной компоненты смеси, видим, что

$$\vec{J} = \rho c(\vec{u}^{(1)} - \vec{u}).$$

Если скорость $\vec{u}^{(1)}$ данной компоненты определить через среднюю скорость $\vec{u}$ с помощью закона Фика [18]:

$$\vec{u}^{(i)} = \vec{u} - \frac{D}{c}\nabla c, \tag{1.64}$$

то

$$\vec{J} = -\rho D\nabla c, \tag{1.65}$$

где $D > 0$ называют коэффициентом диффузии; он определяет диффузионный поток при наличии одного только градиента концентрации компоненты c.

Таким образом, вместо системы (1.44) (или (1.45)), описывающей закон сохранения массы для каждой из компонент смеси, в случае бинарной смеси используется эквивалентная ей система, состоящая из уравнения неразрывности для смеси в целом (1.62) и уравнения для концентрации (1.63).

Закон сохранения импульса смеси в целом рассматривается в виде [17]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) + \mathrm{div}(\rho\vec{u}\otimes\vec{u}) = \mathrm{div}P' + \rho\vec{F}, \tag{1.66}$$

$$P' = -pI + 2\mu D(\vec{u}) + \lambda\,\mathrm{div}\,\vec{u}\, I, \tag{1.67}$$

где p – давление, I – единичный тензор, $D(\vec{u})$ – тензор скоростей деформаций, определяемый вектором барицентрической скорости $\vec{u}$.

Закон сохранения энергии пишется в виде [17]

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E\vec{u}) = \operatorname{div}(\vec{u}P^{'}) - \operatorname{div}\vec{q}, \tag{1.68}$$

где $E = \rho\left(U + \frac{1}{2}|\vec{u}|^2\right)$ – полная энергия смеси, U – удельная внутренняя энергия, $\vec{q}$ – вектор теплового потока, возникающий (как и диффузионный поток $\vec{J}$) в результате наличия в жидкости градиентов концентрации и температуры.

Один из вариантов задания вектора $\vec{q}$:

$$\vec{q} = -k\nabla\theta,$$

где $\theta > 0$ – температура смеси, $k > 0$ – коэффициент теплопроводности смеси.

Уравнение энергии (1.68) может быть преобразовано, если воспользоваться термодинамическим соотношением для смеси двух веществ:

$$dU = \theta ds + \frac{p}{\rho^2}d\rho + mdc. \tag{1.69}$$

Здесь m – соответствующим образом определенный химический потенциал смеси, s – энтропия.

В силу уравнений неразрывности (1.62) и импульса (1.66) из уравнения (1.68) следует уравнение для внутренней энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \operatorname{div}(\rho U\vec{u}) = P^{'} : \nabla\vec{u} - \operatorname{div}\vec{q} - \rho\vec{u}\cdot\vec{F}. \tag{1.70}$$

Из (1.69) и (1.70) получаем уравнение, определяющее изменение энтропии

$$\rho\theta\frac{\partial s}{\partial t} + \theta(\rho\vec{u}\cdot\nabla)s = p\operatorname{div}\vec{u} + P^{'} : \nabla\vec{u} - \operatorname{div}\vec{q} + m\operatorname{div}\vec{J} - \rho\vec{u}\cdot\vec{F}. \tag{1.71}$$

Мы получили, таким образом, полную систему гидродинамических уравнений для жидких смесей. Этими уравнениями являются: уравнение неразрывности (закон сохранения массы) (1.62), уравнения движения (закон сохранения импульса) (1.66), (1.67), уравнение неразрывности для одной из компонент смеси (1.63), уравнение, описывающее изменение энтропии (1.71). Отметим, что уравнения (1.63) и (1.71) становятся определенными при подстановке $\vec{J}$ и $\vec{q}$, выраженных через градиенты температуры и концентрации.

1.3. Вспомогательные сведения из анализа и теории дифференциальных уравнений

1.3.1. Некоторые вопросы функционального анализа

В этом разделе приведем основные фундаментальные понятия и результаты функционального анализа [10], [19], [30], [35], которые будем использовать в дальнейшем.

1. Линейные нормированные пространства. Гильбертовы пространства

Определение линейного пространства. Понятие линейного пространства является одним из важнейших понятий современной математики. Множество всех векторов плоскости или трехмерного пространства и, что особенно важно, различные множества функций (функциональные пространства) можно охарактеризовать одними и теми же общими свойствами линейности. Следуя принятому в математике аксиоматическому подходу, выделяют основные из этих свойств в систему аксиом, определяющих общее понятие линейного пространства.

Определение 1.1. *Линейным пространством называется множество L, для элементов которого определены операции сложения и умножения на вещественные (комплексные) числа, не выводящие из L и обладающие свойствами:*

a) $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$,

b) $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$,

c) в L существует элемент o такой, что для любого $x \in L$ $\quad 0 \cdot x = o$,

d) $(c_1 + c_2)x = c_1x + c_2x$,

e) $c(x_1 + x_2) = cx_1 + cx_2$,

f) $(c_1c_2)x = c_1(c_2x)$,

g) $1 \cdot x = x$

для любых $x, x_1, \ldots \in L$ и любых вещественных (комплексных) чисел $c, c_1, \ldots$

В зависимости от того, на какие числа, вещественные или комплексные, допускается умножение элементов из L, пространство L называется вещественным или комплексным линейным пространством. Для определенности мы будем рассматривать лишь случай комплексных линейных пространств. На случай вещественных линейных пространств соответствующие определения и результаты переносятся без затруднений.

Определение 1.2. *Подмножество линейного пространства L, само являющееся линейным пространством, называется линейным многообразием в пространстве L.*

Линейная зависимость и линейная независимость элементов. Пусть x_m, $m = 1, 2, ...,$ — счетная (или конечная) система элементов линейного пространства L.

Определение 1.3. *Множество элементов вида $c_1x_1 + ... + c_kx_k$ при всевозможных k и произвольных комплексных $c_1, ..., c_k$ является линейным многообразием в пространстве L и называется линейным многообразием, натянутым на элементы x_k, $k = 1, 2, ...$ Элементы $x_1, ..., x_m$ из L называются линейно независимыми, если равенство $c_1x_1 + ... + c_mx_m = o$ возможно лишь при $c_1 = ... = c_m = 0$; в противном случае $x_1, ..., x_m$ — линейно зависимы. Бесконечное множество элементов из L называется линейно независимым, если любое его конечное подмножество линейно независимо.*

Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства

Определение 1.4. *Линейное многообразие конечномерно (n-мерно), если в нем существует n линейно независимых элементов, а совокупность любых его $n + 1$ элементов линейно зависима. Линейное многообразие, натянутое на линейно независимые элементы x_k, $k = 1, ..., n$, из L, n-мерно. Линейное многообразие называется бесконечномерным, если в нем можно найти линейно независимое подмножество, состоящее из бесконечного числа элементов.*

Выпуклые множества и выпуклые функционалы в линейных пространствах. Пусть L — линейное пространство. Отрезком, соединяющим точки $x_1, x_2 \in L$, называется совокупность всех точек x вида $x = (1 - t)x_1 + tx_2$, $t \in [0, 1]$.

Определение 1.5. *Множество M в линейном пространстве L называется выпуклым, если всякий раз из того, что $x_1, x_2 \in M$, следует, что M принадлежит отрезок, соединяющий x_1 и x_2.*

Введем теперь понятие выпуклого функционала. Пусть на линейном пространстве L задана функция, ставящая каждому $x \in L$ в соответствие число $p(x)$. В этом случае говорят, что на L задан функционал $p(x)$. Если все значения $p(x)$ вещественны, то функционал $p(x)$ называется вещественным функционалом.

Определение 1.6. *Вещественный функционал $p(x)$ называется выпуклым, если для любых $x_1, x_2 \in L$ и любых $t \in [0, 1]$*

$$p((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)p(x_1) + tp(x_2). \tag{1.72}$$

Если это неравенство является строгим, то функционал $p(x)$ называется строго выпуклым. Если выполняется обратное неравенство, функционал называется вогнутым или выпуклым вверх.

Нормированные пространства. Следующим нашим шагом будет введение нормированных пространств. Понятие модуля вещественного числа, комплексного числа или вектора позволяет ввести расстояние, или, как принято говорить, метрику, на числовой оси, в комплексной плоскости или в пространстве векторов соответственно. Наличие метрики, в свою очередь, позволяет рассматривать важнейшие вопросы о сходимости последовательностей и рядов, о предельном переходе, о непрерывности и дифференцируемости функций и т. п.

Определение 1.7. *Линейное пространство L называется нормированным, если каждому его элементу x можно поставить в соответствие вещественное число $\|x\| = \|x\|_L$ (норма x), и это соответствие обладает следующими свойствами:*

a) $\|cx\| = |c| \cdot \|x\|$ при произвольном комплексном c и $x \in L$,

b) $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ для любых $x_i \in L$, $i = 1, 2$ (неравенство треугольника),

c) $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ только для $x = o$.

Предел последовательности. В линейном нормированном пространстве можно определить понятие расстояния $\|x_1 - x_2\|$ между двумя элементами x_1 и x_1, а вместе с ним и понятие сходимости.

Определение 1.8. *Последовательность x_m, $m = 1, 2, \ldots$, элементов из L называется фундаментальной, если $\|x_k - x_m\| \to 0$ при $k, m \to \infty$.*

Определение 1.9. *Последовательность x_m, $m = 1, 2, \ldots$, элементов из L называется сходящейся к $x \in L$ ($x_m \to x$ при $m \to \infty$ или $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x$), если $\|x_m - x\| \to 0$ при $m \to \infty$.*

Последовательность не может сходиться к двум различным элементам, так как если $\|x_m - x\| \to 0$ и $\|x_m - g\| \to 0$ при $m \to \infty$, то

$\|x-g\| \le \|x_m - x\| + \|x_m - g\| \to 0$ при $m \to \infty$, т.е. $\|x-g\| = 0$, откуда $x = g$.

Если $x_m \to x$, то $\|x_m\| \to \|x\|$ (непрерывность нормы). Действительно, в силу неравенства треугольника $\|x_m\| \le \|x_m - x\| + \|x\|$ и $\|x\| \le \|x_m - x\| + \|x_m\|$. Поэтому $\Big|\|x_m\| - \|x\|\Big| \le \|x_m - x\| \to 0$ при $m \to \infty$.

Если последовательность сходящаяся ($x_m \to x$), то она фундаментальна, так как

$$\|x_k - x_m\| \le \|x_k - x\| + \|x_m - x\| \to 0 \text{ при } k, m \to \infty.$$

Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места.

Определение 1.10. *Множество M линейного нормированного пространства называется ограниченным, если существует такая постоянная $C > 0$, что $\|x\| \le C$ для всех $x \in M$.*

Теорема 1.11. *Всякая сходящаяся последовательность ограничена.*

Определение 1.12. *Линейное нормированное пространство называется полным, если для любой фундаментальной последовательности его элементов найдется элемент этого пространства, к которому она сходится. Полное линейное нормированное пространство B называется Банаховым пространством (B-пространством).*

Эквивалентность норм в конечномерных пространствах
Пусть в линейном пространстве L двумя способами введены нормы: $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$.

Определение 1.13. *Нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ называются эквивалентными ($\|x\|_1 \sim \|x\|_2$), если существуют числа $\alpha > 0, \beta > 0$ такие, что для любых $x \in L$*

$$\alpha\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta\|x\|_1. \tag{1.73}$$

Теорема 1.14. *Пусть в линейном пространстве L заданы две эквивалентные нормы, и пусть L_1 и L_2 — соответствующие нормированные пространства. Всякая последовательность, сходящаяся в одном из этих пространств, сходится также и в другом, причем, к тому же пределу.*

Теорема 1.15. *Во всяком конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.*

Подпространства нормированного пространства

Определение 1.16. *Линейное многообразие в Банаховом пространстве B, полное в норме B (и, тем самым, само являющееся Банаховым пространством с той же нормой), называется подпространством пространства B.*

Теорема 1.17. *Линейное многообразие, натянутое на конечное число элементов из B, является подпространством пространства B.*

Определение 1.18. *Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое линейное многообразие в B. Множество $\overline{\mathcal{M}}$, полученное в результате присоединения к $\mathcal{M}$ предельных элементов всех фундаментальных последовательностей элементов из $\mathcal{M}$ (в пространстве B любая фундаментальная последовательность имеет предельный элемент), называется замыканием (в B) многообразия $\mathcal{M}$.*

Теорема 1.19. *Замыкание линейного многообразия в B является подпространством.*

Определение 1.20. *Замыкание линейного многообразия, натянутого на элементы $x_k, k = 1, 2, \ldots$, называется подпространством, натянутым на эти элементы.*

Сепарабельные Банаховы пространства

Определение 1.21. *Множество $\mathcal{M}' \subset B$ называется всюду плотным в B, если для любого элемента $x \in B$ существует последовательность $x_k^{'}, k = 1, 2, \ldots$, элементов из $\mathcal{M}'$, сходящаяся к x.*

Определение 1.22. *Банахово пространство B называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество.*

Гильбертовы пространства. Введем сначала понятие скалярного произведения.

Определение 1.23. *Будем говорить, что в линейном пространстве H введено скалярное произведение, если любой паре элементов $x_1, x_2 \in H$ поставлено в соответствие комплексное число (x_1, x_2) (скалярное произведение этих элементов), и это соответствие обладает следующими свойствами:*

a) $(x_1, x_2) = \overline{(x_2, x_1)}$ *(в частности, (x, x) — вещественное число),*

b) $(x_1 + x_2, x) = (x_1, x) + (x_2, x)$,

c) для любого комплексного c $(cx_1, x_2) = c(x_1, x_2)$, *d)* $(x,x) \geq 0$, *причем* $(x,x) = 0$ *только для* $x = o$.

Справедливо следующее важное неравенство Буняковского:

$$|(x_1, x_2)|^2 \leq (x_1, x_1) \cdot (x_2, x_2), \tag{1.74}$$

имеющее место для любых x_1 и x_2 из H.

Скалярное произведение порождает в пространстве H норму

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

Определение 1.24. *Скалярные произведения* $(\ ,\ )_1$ *и* $(\ ,\ )_2$ *называются эквивалентными, если эквивалентны порождаемые ими нормы.*

Определение 1.25. *Линейное пространство со скалярным произведением, полное в норме, порождаемой этим скалярным произведением (т. е. являющееся Банаховым в этой норме), называется Гильбертовым пространством.*

2. Линейные операторы. Вполне непрерывные операторы

Линейные операторы и функционалы. Непрерывность и ограниченность

Определение 1.26. *Пусть* X *и* Y *— Банаховы пространства, а* D *— некоторое множество, лежащее в* X. *Будем говорить, что на* D *задан оператор* A *(оператор* A *из* X *в* Y*), если любому элементу* $x \in D$ *поставлен в соответствие некоторый элемент* $y \in Y : y = Ax$. *Множество* D *называется областью определения* $D(A)$, $D(A) = D$ *оператора* A, *а множество элементов вида* Ax *при* $x \in D(A)$ *— областью его значений* $R(A) \subset Y$.

Определение 1.27. *Оператор* A *называется функционалом, если пространство* Y *есть множество комплексных чисел (за норму на этом множестве принимается модуль комплексного числа). Функционалы обычно будут обозначаться буквой* p.

Простейшими операторами являются операторы O — нулевой и (при $X = Y$) I — единичный, определяемые следующим образом: $Ox = o$ для всех $x \in D(O)$, $Ix = x$ для всех $x \in D(I)$.

Определение 1.28. *Оператор* A *называется непрерывным на элементе* $x \in D(A)$, *если он любую сходящуюся к* x *в норме* X *последовательность* x_k, $k = l, 2, ...$, *элементов из* $D(A)$ *переводит в сходящуюся к элементу* Ax *в норме* Y *последовательность* Ax_k, $k = 1, 2, ...$ *Оператор* A *называется непрерывным на множестве* $M \subset D(A)$ *(в частности, на*

$D(A)$), если он непрерывен на любом элементе $x \in M$. Оператор A, непрерывный на $D(A)$, будем называть непрерывным.

Определение 1.29. *Оператор A называется линейным, если $D(A)$ — линейное многообразие и $A(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1Ax_1 + c_2Ax_2$ для любых элементов $x_i \in D(A)$ и чисел c_i, $i = 1, 2$.*

Теорема 1.30. *Линейный оператор A нулевому элементу пространства X ставит в соответствие нулевой элемент пространства Y.*

Теорема 1.31. *Для непрерывности линейного оператора A необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен на нулевом элементе (или вообще, на каком-либо элементе из $D(A)$).*

Пусть A_i, $i = 1, 2$ — линейные операторы из X в Y, $D(A_1) = D(A_2) = D(A)$, а c_i, $i = 1, 2$ — некоторые числа. Определим оператор $A = c_1A_1 + c_2A_2$ следующим образом: для любого $x \in D(A)$, $Ax = c_1A_1x + c_1A_2x$. Оператор A также является линейным. Таким образом, на множестве линейных операторов с общей областью определения введены операции сложения и умножения на комплексные числа. Нетрудно убедиться, что это множество образует линейное пространство.

Определение 1.32. *Линейный оператор A называется ограниченным, если существует такая постоянная $C > 0$, что $\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$ для всех $x \in D(A)$, или, что то же самое, $\|Ax\|_Y \leq C$ для тех $x \in D(A)$, для которых $\|x\|_X = 1$.*

Следующее утверждение устанавливает связь между понятиями непрерывности и ограниченности для линейных операторов.

Теорема 1.33. *Для того чтобы линейный оператор A был непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен.*

Норма линейного оператора. Точная нижняя грань значений постоянной C в определении 1.32 называется нормой оператора A и обозначается через $\|A\|$. Ясно, что

$$\|A\| = \sup_{x \in D(A)} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \in D(A),\, \|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y. \tag{1.75}$$

В частности, если оператор A является линейным ограниченным функционалом ($A = p$), то его норма

$$\|p\| = \sup_{x \in D(p)} \frac{|p(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{x \in D(p),\, \|x\|_X = 1} |p(x)|. \tag{1.76}$$

Отметим, что множество линейных ограниченных операторов с общей областью определения есть линейное многообразие в пространстве всех линейных операторов с этой областью определения. Введенная норма линейного ограниченного оператора удовлетворяет всем аксиомам нормы. Легко показать, что это нормированное пространство является полным (т. е. Банаховым).

Равномерная сходимость последовательности линейных операторов

Определение 1.34. *Пусть дана последовательность линейных ограниченных операторов $A_n : X \to Y$. Будем говорить, что $A_n \to A$ ($A : X \to Y$ - линейный ограниченный оператор), $n \to \infty$ равномерно, если $\|A_n - A\| \to 0$, $n \to \infty$.*

Наряду с равномерной сходимостью в пространстве линейных ограниченных операторов, можно ввести еще один вид сходимости.

Определение 1.35. *$A_n \to A$, $n \to \infty$ сильно, если для любого $x \in X$ $\|A_n x - Ax\| \to 0$, $n \to \infty$.*

Заметим, что если $A_n \to A$, $n \to \infty$ равномерно, то $A_n \to A$, $n \to \infty$ сильно. Обратное, вообще говоря, не верно.

Теорема 1.36 (Банах-Штейнгауз). *Для того, чтобы $A_n \to A$, $n \to \infty$, сильно необходимо и достаточно, чтобы*

(i) $\{\|A_n\|\}$ была ограничена;

(ii) $A_n \to A$, $n \to \infty$ сильно на некотором линейном многообразии X', плотном в X.

Обратные операторы. Пусть для любого $y \in R(A)$ уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение $x \in D(A)$. Это означает, что на $R(A)$ задан оператор, будем обозначать его через A^{-1}, ставящий в соответствие элементу $y \in R(A)$ тот единственный элемент $x \in D(A)$, для которого $Ax = y$. Оператор A^{-1} называется обратным к оператору A. Ясно, что $D(A^{-1}) = R(A)$, $R(A^{-1}) = D(A)$, $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. Если оператор A линейный, то обратный оператор A^{-1} тоже линейный.

Теорема 1.37 (Банах). *Если A — ограниченный линейный оператор, отображающий взаимно однозначно Банахово пространство X на Банахово пространство Y, то обратный оператор A^{-1} ограничен.*

Сопряженные пространства и операторы

Определение 1.38. *Пусть X - Банахово пространство. Совокупность всех линейных непрерывных функционалов на X называется сопряженным пространством и обозначается символом X^*.*

В X^*, как и в любом пространстве линейных ограниченных операторов, можно ввести два вида сходимости последовательностей. Это, прежде всего, сходимость по норме X^*.

Определение 1.39. *$p_n \to p$, $n \to \infty$ $(p_n, p \in X^*)$ сильно, если $\|p_n - p\| \to 0$, $n \to \infty$.*

Также в X^* можно ввести следующий вид сходимости.

Определение 1.40. *$p_n \to p$, $n \to \infty$ $*$-слабо, если для всех $x \in X$ $p_n(x) \to p(x)$, $n \to \infty$.*

Теорема 1.41. *Если $p_n \to p$, $n \to \infty$ сильно, то $p_n \to p$, $n \to \infty$ $*$-слабо.*

Теорема 1.42. *Для того чтобы $p_n \to p$, $n \to \infty$ $*$-слабо необходимо и достаточно, чтобы 1) $\{\|p_n\|\}$ была ограничена; 2) $p_n(x) \to p(x)$ на плотном в X линейном многообразии.*

Теорема Рисса об общем виде линейных функционалов в Гильбертовом пространстве. Примером линейного ограниченного функционала, заданного на Гильбертовом пространстве H, является скалярное произведение: фиксируем произвольно элемент $h \in H$, тогда (x, h) является (по x) линейным ограниченным функционалом (ограниченность его следует из неравенства Буняковского). Весьма замечательно, что в виде скалярного произведения при надлежащем выборе $h \in H$ может быть представлен любой линейный ограниченный функционал, заданный на всюду плотном в H множестве. А именно, справедливо следующее важное утверждение.

Теорема 1.43 (Рисс). *Для любого линейного ограниченного функционала p, заданного на гильбертовом пространстве H, существует единственный элемент $h \in H$ такой, что для всех $x \in H$*

$$p(x) = (x, h), \tag{1.77}$$

причем $\|p\| = \|h\|$.

Рефлексивные пространства

Определение 1.44. *Множество X^{**} линейных непрерывных функционалов на X^* называется вторым сопряженным к X пространством. Если $X^{**} = X$, то Банахово пространство X называется рефлексивным.*

Отметим следующие важные утверждения.

Теорема 1.45. *Всякое подпространство рефлексивного Банахова пространства само рефлексивно.*

Теорема 1.46. *Банахово пространство рефлексивно тогда и только тогда, когда рефлексивно сопряженное к нему пространство.*

Теорема 1.47. *Для того чтобы Банахово пространство X было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы всякая ограниченная (по норме) последовательность его элементов содержала подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой точке пространства X.*

Определение 1.48. *Банахово пространство X называется равномерно выпуклым, если для любых $\{x_n\} \subset X$, $\{y_n\} \subset X$ таких, что $\|x_n\| = 1$, $\|y_n\| = 1$, $\|x_n + y_n\| \to 2$, $n \to \infty$, имеем $\|x_n - y_n\| \to 0$, $n \to \infty$.*

Теорема 1.49. *Всякое равномерно выпуклое Банахово пространство рефлексивно.*

Слабая сходимость в нормированных пространствах. С помощью сопряженного пространства X^* определяется понятие слабой сходимости.

Определение 1.50. *Последовательность x_n из X слабо сходится к $x \in X$, если для любого $p \in X^*$ $p(x_n) \to p(x)$, $n \to \infty$.*

Перечислим основные свойства слабо сходящихся последовательностей.

Теорема 1.51. *Если последовательность $x_n \to x$, $n \to \infty$ сильно, то $x_n \to x$, $n \to \infty$ слабо.*

Теорема 1.52. *Если x_n слабо сходится, то она ограничена.*

Теорема 1.53. *Если X конечномерно и $x_n \to x$, $n \to \infty$ слабо, то $x_n \to x$, $n \to \infty$ сильно.*

Теорема 1.54. *Для того чтобы $x_n \to x$, $n \to \infty$ сильно необходимо и достаточно, чтобы 1) $\{\|x_n\|\}$ была ограничена; 2) $p(x_n) \to p(x)$, $n \to \infty$ для любого p из плотного в X^* множества.*

Теорема 1.55. *Пусть X — равномерно выпуклое Банахово пространство и $\{x_n\} \subset X$. Если при $n \to \infty$ $x_n \to x$ слабо и $\|x_n\| \to \|x\|$, то $x_n \to x$ при $n \to \infty$ сильно.*

Сопряженные и самосопряженные операторы. Пусть H — Гильбертово пространство, а A — линейный оператор из H в H, заданный на всюду плотном в H множестве $D(A)$ (оператор A, вообще говоря, не предполагается ограниченным). Пусть $D(A^*)$ — множество всех элементов из H, обладающих следующим свойством: для любого $y \in D(A^*)$ существует такой элемент $h \in H$, что при всех $x \in D(A)$ имеет место равенство

$$(Ax, y) = (x, h). \tag{1.78}$$

Множество $D(A^*)$ — непустое, поскольку нулевой элемент про- пространства h ему принадлежит: при $y = o$ элемент $h = o$. Любому элементу $y \in D(A^*)$ соответствует лишь один элемент $h \in H$.

Таким образом, на $D(A^*)$ задан оператор, будем обозначать его через A^*: каждому элементу $y \in D(A^*)$ ставится в соответствие единственный элемент $h = A^*y \in H$ такой, что

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \tag{1.79}$$

для любого $x \in D(A)$. Оператор A^* называется сопряженным к оператору A. Множество $D(A^*)$ всех элементов из H, для которых выполнено равенство (1.79) при всех $x \in D(A)$, является его областью определения.

Оператор A^*, сопряженный к линейному ограниченному оператору A, определен на всем пространстве, линеен, ограничен и его норма равна норме оператора A.

Легко проверить, что $(A^*)^* = A$, $(cA)^* = \bar{c}A^*$ (c - комплексное число), $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$.

Заданный на Гильбертовом пространстве H линейный ограниченный оператор A из H в H называется самосопряженным, если $A = A^*$.

Самосопряженному оператору A можно поставить в соответствие вещественнозначную квадратичную форму (Ax, x). Если $(Ax, x) \geq 0$ для всех x из H, то самосопряженный оператор A называется неотрицательным. Неотрицательный оператор A называется положительным, если $(Ax, x) = 0$ только при $x = o$.

Бикомпактные множества. Напомним сначала, что подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$ называется ее подмножество $\{x_{n_k}\}$, если $n_{k+1} > n_k$, $k = 1, 2, ...$, т.е. если в $\{x_{n_k}\}$ сохраняется порядок следования элементов $\{x_n\}$.

Определение 1.56. *Множество M Банахова пространства X называется бикомпактным, если из каждой последовательности $\{x_n\} \subset M$*

можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит M.

Из этого определения вытекает ряд следствий.

Теорема 1.57. *Всякое бикомпактное множество ограничено.*

Теорема 1.58. *Всякое бикомпактное множество замкнуто.*

Теорема 1.59. *Во всяком конечномерном Банаховом пространстве всякое ограниченное замкнутое бесконечное множество бикомпактно.*

Компактные множества в нормированных пространствах

Определение 1.60. *Множество M нормированного пространства X называется компактным, если из каждой последовательности $\{x_n\} \subset M$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность.*

Заметим, что если X - Банахово пространство, то указанная фундаментальная последовательность, вследствие полноты X, сходится к некоторому элементу $x_0 \in X$, однако не обязательно $x_0 \in M$. Таким образом, понятие компактного множества слабее понятия бикомпактного множества. Имеет место следующий факт.

Теорема 1.61. *Компактное множество в нормированном пространстве бикомпактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.*

Приведем теперь критерий компактности Хаусдорфа. Он основывается на следующем важном определении.

Определение 1.62. *Пусть X — нормированное пространство и множество $M \subset X$. Возьмем $\varepsilon >$. Множество M_ε называется ε-сетью множества M, если для любой точки $x \in M$ найдется точка $\widehat{x} \in M_\varepsilon$ такая, что $\|x - \widehat{x}\| < \varepsilon$.*

Будем говорить, что ε-сеть конечна, если M_ε – конечное множество (т. е. M_ε состоит из конечного числа элементов).

Теорема 1.63 (Хаусдорф). *Множество M в нормированном пространстве X компактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть.*

Следствием этой теоремы является тот факт, что всякое компактное множество ограничено и сепарабельно.

Слабая компактность

Определение 1.64. *Множество M Банахова пространства X называется слабо компактным, если из любой (бесконечной) последовательности его элементов можно выбрать слабо фундаментальную подпоследовательность (фундаментальную в смысле слабой сходимости).*

Приведем ряд полезных утверждений.

Теорема 1.65. *Всякое слабо компактное множество ограничено.*

Теорема 1.66. *Всякое ограниченное множество рефлексивного Банахова пространства слабо компактно.*

Вместо употребленного нами термина "бикомпактность" часто применяется термин "компактность а вместо термина "компактность" — термин "компактность в себе "относительная компактность".

Линейные вполне непрерывные операторы

Определение 1.67. *Линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$ называется вполне непрерывным (или компактным), если замкнутый единичный шар пространства X он переводит в компактное множество пространства Y.*

Рассмотрим некоторые свойства вполне непрерывных операторов.

Теорема 1.68. *Если оператор вполне непрерывен, то любое ограниченное в X множество он переводит во множество, компактное в Y.*

Теорема 1.69. *Если X или Y конечномерно, то любой вполне непрерывный оператор $A : X \to Y$ будет линейным и ограниченным оператором и наоборот.*

Теорема 1.70. *Пусть A – вполне непрерывный оператор. Если $x_n \to x$, $n \to \infty$, слабо, то $Ax_n \to Ax$, $n \to \infty$.*

Теорема 1.71. *Пусть $A : X \to Y$ - линейный ограниченный оператор, где Y — полное. Оператор A вполне непрерывен тогда и только тогда, когда A^* вполне непрерывен.*

Вложения. Пусть $X \subset Y$ – нормированные линейные пространства с нормами $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$, соответственно. Пусть определен тождественный оператор I из X в Y с областью определения X, действующий по формуле

$$Iu = u \text{ для } u \in X. \tag{1.80}$$

Тождественный оператор I является линейным оператором.

Если I непрерывен, то будем говорить, что вложение X в Y непрерывно. Непрерывность вложения I эквивалентно существованию постоянной $C > 0$ такой, что
$$\|u\|_Y \le C\|u\|_X \;\; \forall\, u \in X. \tag{1.81}$$
Факт непрерывности вложения X в Y будем записывать в следующей форме: $X \hookrightarrow Y$.

В случае, когда оператор вложения I вполне непрерывен, мы будем говорить о компактном вложении X в Y и писать $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$.

Если $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$, то из любой ограниченной последовательности $u_n \in X$ возможно извлечь подпоследовательность, сильно сходящуюся в Y.

Если X – рефлексивное банахово пространство, то $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ тогда и только тогда, когда из того, что $u_n \to u$ слабо в X следует $u_n \to u$ сильно в Y.

Пусть X и Y – нормированные линейные пространства. Тогда

(i) $X \hookrightarrow Y \Rightarrow Y^* \hookrightarrow X^*$,

(ii) $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y \Rightarrow Y^* \hookrightarrow\hookrightarrow X^*$.

3. Нелинейные операторы и уравнения в Банаховых пространствах

Теоремы о неподвижных точках нелинейных операторов. При доказательстве теорем существования часто рассматриваются операторные уравнения вида $x = \Psi x$, где оператор Ψ определен на Банаховом пространстве B и действует в B. Решение этого уравнения называется неподвижной точкой оператора Ψ. Приведем некоторые теоремы, гарантирующие существование неподвижных точек.

Теорема 1.72 (Банах). *Если оператор Ψ отображает замкнутое множество M Банахова пространства B в себя, $\Psi : M \to M$, и является сжимающим, т. е.*
$$\|\Psi x_1 - \Psi x_2\| \le \alpha \|x_1 - x_1\|, \; 0 < \alpha < 1, \; \forall\, x_1, x_2 \in B, \tag{1.82}$$
то на M существует единственная неподвижная точка $x = \Psi x$.

Теорема 1.73 (Шаудер). *Если Ψ – вполне непрерывный оператор и отображает ограниченное замкнутое выпуклое множество M в себя, то существует по крайней мере одна неподвижная точка $x \in M$.*

Теорема 1.74 (Тихонов-Шаудер). *Если M – компактное выпуклое замкнутое множество Банахова пространства B и оператор Ψ отобра-*

жает M в себя непрерывно в норме B, то на M имеется неподвижная точка.

Теорема 1.75 (Лере-Шаудер). *Пусть Ψ – компактное отображение Банахова пространства B в себя. Пусть существует постоянная C такая, что для всех $x \in B$ и $t \in [0;1]$, удовлетворяющих уравнению $x = t\Psi x$, справедливо неравенство $\|x\|_B < C$. Тогда, отображение Ψ имеет неподвижную точку.*

Монотонные операторы. Пусть X – вещественное сепарабельное нормированное пространство, X^* – пространство, сопряженное к X, $A : X \to X^*$ – вообще говоря нелинейный оператор с $D(A) = X$ и $R(A) \subset X^*$.

Определение 1.76. *Оператор A называется монотонным, если для любых $x, y \in X$ выполняется неравенство $\langle x - y, Ax - Ay\rangle \geq 0$. Если при $x \neq y$ имеет место строгое неравенство, то оператор A называется строго монотонным. Если же существует непрерывная и неотрицательная при $t \geq 0$ функция $c(t)$ такая, что $c(0) = 0$, $c(t) > 0$ при $t > 0$, $c(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ и такая, что справедливо неравенство*

$$\langle x - y, Ax - Ay\rangle \geq c(\|x - y\|) \cdot \|y - x\|,$$

то оператор A называется сильно монотонным.

Определение 1.77. *Оператор A называется коэрцитивным, если существует функция $\gamma(t)$, заданная при $t \geq 0$ и стремящаяся к $+\infty$ при $t \to +\infty$ такая, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство*

$$\langle x, Ax\rangle \geq \gamma(\|x\|) \cdot \|x\|.$$

Определение 1.78. *Оператор A называется деминепрерывным в точке $x_0 \in X$, если из $x_n \to x_0$ по норме X следует, что $Ax_n \to Ax$ при $n \to \infty$ слабо, т. е.*

$$\langle x, Ax_n\rangle \to \langle x, Ax_0\rangle \text{ при } n \to \infty$$

для любого $x \in X$.

Теорема 1.79. *Пусть оператор A отображает вещественное сепарабельное Банахово пространство X в пространство X^* и является сильно* *монотонным и деминепрерывным. Тогда уравнение $A(x) = y$ имеет единственное решение $\widehat{x}$ для любого $y \in X^*$.*

Полунепрерывные снизу (сверху) функционалы

Определение 1.80. *Вещественный функционал $p(x)$ называется полунепрерывным снизу (соотв. сверху), если из того, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$ ($x_n, x \in L$, $n \in \mathbb{N}$) следует, что $p(x) \leq \varliminf p(x_n)$ (соотв. $p(x) \geq \varlimsup p(x_n)$).*

Определение 1.81. *Вещественный функционал $p(x)$ называется слабо полунепрерывным снизу (соотв. сверху), если из того, что $x_n \to x$ слабо при $n \to \infty$ ($x_n, x \in L$, $n \in \mathbb{N}$) следует, что $p(x) \leq \varliminf p(x_n)$ (соотв. $p(x) \geq \varlimsup p(x_n)$).*

Теорема 1.82. *Слабо полунепрерывный снизу функционал, заданный в рефлексивном Банаховом пространстве X, ограничен снизу и достигает наименьшего значения на каждом ограниченном слабо замкнутом (ограниченном замкнутом выпуклом) множестве $M \subset X$.*

4. Некоторые простейшие неравенства. Мы будем часто использовать несколько хорошо известных алгебраических и функциональных неравенств. Из алгебраических неравенств нам потребуются следующие:

1) неравенство Коши:

$$|a_{ij}\xi_i\eta_j| \leq \sqrt{a_{ij}\xi_i\xi_j}\sqrt{a_{ij}\eta_i\eta_j}, \tag{1.83}$$

справедливое для любой неотрицательной квадратичной формы $a_{ij}\eta_i\eta_j$ с $a_{ij} = a_{ji}$ и любых чисел $\xi_1, ..., \xi_n$ и $\eta_1, ..., \eta_n$;

2) неравенство Коши с ε:

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2 \tag{1.84}$$

справедливое при любом $\varepsilon > 0$ для произвольных a и b;

3) более общее, чем (1.84), неравенство Юнга:

$$ab \leq \frac{1}{p}(\varepsilon_1 a)^p + \frac{1}{p'}\left(\frac{b}{\varepsilon_1}\right)^{p'}, \ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{1.85}$$

справедливое при любом $\varepsilon_1 > 0$ и $p > 1$. Запишем его в более удобной форме:

$$ab \leq \varepsilon a^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-\alpha)b^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{1.86}$$

где ε – произвольное положительное число, а $\alpha \in (0, 1)$.

Из функциональных неравенств, помимо неравенств

$$\|u(x)+v(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\|,$$

$$|(u(x),v(x))| \leq \|u(x)\| \cdot \|v(x)\|,$$

первое из которых справедливо для норм любого Банахова пространства, а второе – для скалярного произведения и норм любого Гильбертова пространства, будут использованы следующие:

4) неравенство Гельдера:

$$\left|\int\limits_\Omega u(x)v(x)\,dx\right| \leq \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_\Omega |v(x)|^{q'}\,dx\right)^{\frac{1}{q'}},\ \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1,\ (1.87)$$

и более общее:

$$\left|\int\limits_\Omega \prod_{i=1}^{s} u_i(x)\,dx\right| \leq \prod_{i=1}^{s}\left(\int\limits_\Omega |u_i(x)|^{\lambda_i}\,dx\right)^{\frac{1}{\lambda_i}},\ \sum_{i=1}^{s}\frac{1}{\lambda_i}=1; \qquad (1.88)$$

5) неравенство Коши:

$$\left|\int\limits_\Omega \sum_i u_i v_i\,dx\right| \leq \left(\int\limits_\Omega \sum_i u_i^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_\Omega \sum_i v_i^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (1.89)$$

справедливые при произвольных измеримых функциях $u(x)$, $v(x)$, $u_i(x)$, $v_i(x)$, заданных в Ω и имеющих конечные нормы, стоящие в правой части.

1.3.2. Функциональные пространства

Приведем ряд функциональных пространств, которые используются в дальнейшем.

1. Пространства непрерывных функций. Пространства Гельдера

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.83. *Пусть $f(x)$ – вещественная или комплекснозначная функция, заданная на некотором открытом множестве Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ точек $x=(x_1,...,x_n)$. Носителем $supp(f)$ функции $f(x)$ называется наименьшее замкнутое множество (топологического пространства Ω), содержащее множество $\{x\in\Omega:\ f(x)\neq 0\}$. Иными словами, носитель $f(x)$ – это наименьшее замкнутое множество пространства Ω, вне которого функция $f(x)$ тождественно равна нулю.*

Пространство $C^k(\Omega)$

Определение 1.84. *Обозначим через* $C^k(\Omega)$ *(*$0 \le k \le \infty$ *– целые числа) совокупность всех (вещественных или комплексных) функций, определенных на множестве* Ω*, которые имеют в* Ω *непрерывные частные производные до порядка* k *включительно (бесконечно дифференцируемых, если* $k = \infty$*). Символом* $C_0^k(\Omega)$ *обозначим подмножество функций из* $C^k(\Omega)$*, носителем которых являются компактными подмножествами* Ω *(их принято называть функциями с компактными носителями).*

Классический пример функции из множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ представляет собой функция $f(x)$, определяемая формулой (так называемая "шапочка")

$$f(x) = \begin{cases} exp(|x|^2 - 1)^{-1}, & \text{если } |x| = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2} < 1, \\ 0, & \text{если } |x| \ge 1. \end{cases}$$

Пространство $C^k(\overline{\Omega})$**.** Обозначим через $\partial\Omega$ и $\overline{\Omega}$ – границу и замыкание множества Ω соответственно. Тогда множество $C^k(\overline{\Omega})$ состоит из функций $f(x) \in C^k(\Omega)$, все частные производные которых до порядка k включительно непрерывны в $\overline{\Omega}$.

Вектор $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ с неотрицательными целочисленными компонентами α_i назовем мультииндексом размерности n, а число $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ – длиной мультииндекса. Если $x = (x_1, ..., x_n)$, то условимся обозначать:

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}.$$

Через D_i, $D_i^{\alpha_i}$ обозначим операции дифференцирования:

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i},\ D_i^{\alpha_i} f = \frac{\partial^{\alpha_i} f}{\partial x_i^{\alpha_i}}.$$

Тогда частную производную вида $\dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$ можно представить в компонентной форме

$$D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n} f.$$

Множества $C^k(\Omega)$ и $C^k(\overline{\Omega})$ являются линейными пространствами относительно операций

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Пусть Ω – открытое ограниченное множество в R^n (тем самым Ω – компакт). Тогда на множестве $C^k(\overline{\Omega})$ можно ввести норму по формуле

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \|f\|_{C^k} = \sum_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha f(x)|, \tag{1.90}$$

в результате чего $C^k(\overline{\Omega})$ становится полным нормированным пространством (B-пространством). Сходимость $\|f_k - f\|_{C^k} \to 0$ в этом пространстве означает равномерную сходимость в $\overline{\Omega}$ последовательностей $\{D^\alpha f_k(x)\}$, $|\alpha| \le k$ к $\{D^\alpha f(x)\}$. Пространства $C^k(\overline{\Omega})$ сепарабельные (многочлены с рациональными коэффициентами образуют счетное всюду плотное множество в нем) и нерефлексивные B-пространства.

Пространство $C^{k,\mu}(\overline{\Omega})$

Определение 1.85. *Говорят, что функция $f(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\mu \in (0,1]$, если существует постоянная L такая, что*

$$|f(x) - f(y)| \le L|x-y|^\mu, \;\; x, y \in \Omega \tag{1.91}$$

(функцию f называют также непрерывной по Гельдеру). При $\mu = 1$ неравенство (1.91) называется условием Липшица (f называется в этом случае непрерывной по Липшицу).

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - открытое ограниченное множество. Через $C^{k,\mu}(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$, $\mu \in (0,1]$ обозначим линейное пространство функций определенных на $\overline{\Omega}$ и обладающих всеми частными производными до порядка k включительно, непрерывными в $\overline{\Omega}$ по Гельдеру с показателем μ. Функция

$$f \to \|f\|_{C^{k,\mu}(\overline{\Omega})}, \;\; k = 0, 1, ..., \;\; \mu \in (0,1],$$

$$\|f\|_{C^{k,\mu}(\overline{\Omega})} = \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{x,y\in\Omega,\, x\ne y} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\mu}. \tag{1.92}$$

является нормой в линейном пространстве $C^{k,\mu}(\overline{\Omega})$. Полученное нормированное пространство называется пространством Гельдера. Пространства Гельдера $C^{k,\mu}(\overline{\Omega})$ полные (B-пространства), не сепарабельные и не рефлексивные.

2. Пространства Лебега. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое по Лебегу множество. Через $|\Omega| = meas\,\Omega$ мы обозначаем меру Лебега этого множества.

Всякие две измеримые функции, заданные почти всюду в Ω назовем эквивалентными, если их значения почти всюду совпадают. В этой ситуации мы пишем $f_1 = f_2$ п.в. в Ω или $f_1(x) = f_2(x)$ для почти всех $x \in \Omega$. Для $p \in [1, \infty)$ обозначим через $L^p(\Omega)$ совокупность всех вещественных (или комплексных) измеримых функций $u(x)$, заданных п.в. на Ω, таких, что $|u(x)|^p$ интегрируемы (по Лебегу) по Ω. Множество $L^p(\Omega)$ с операциями

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x),\ (\alpha u)(x) = \alpha \cdot u(x)$$

является линейным пространством. Норму в пространстве $L^p(\Omega)$ мы определим соотношением

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{0,p} = \left(\int\limits_{\Omega} |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.93}$$

Предельное соотношение $u_n \to u$ в $L^p(\Omega)$ при $n \to \infty$ (или $s - \lim\limits_{n \to \infty} u_n = u$ в $L^p(\Omega)$) иногда называют сходимостью в среднем порядка p последовательности функций $u_n(x)$ к функции $u(x)$. Пространство $L^p(\Omega)$ является B-пространством.

Определение 1.86. *Определенная на множестве Ω измеримая функция $u(x)$ называется существенно ограниченной, если существует такая постоянная α, что для почти всех $x \in \Omega$ $|u(x)| \le \alpha$. Нижняя грань всех таких чисел α называется существенно верхней гранью для $|u(x)|$ и обозначается символом*

$$vrai\, max_{x \in \Omega} |u(x)| \text{ или } ess\, sup_{x \in \Omega} |u(x)|. \tag{1.94}$$

Пространство $L^\infty(\Omega)$ – это множество всех измеримых существенно ограниченных функций, заданных п.в. в Ω. Введение операций

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x),\ (\alpha u)(x) = \alpha \cdot u(x)$$

и нормы

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|u\|_{0,\infty} = ess\, sup_{x \in \Omega} |u(x)| \tag{1.95}$$

превращает это множество в нормированное линейное пространство, если условиться считать всякие две функции из $L^\infty(\Omega)$, значения которых совпадают почти всюду в Ω, эквивалентными.

Свойства пространств L^p. Сформулируем некоторые свойства пространств Лебега $L^p(\Omega)$:

(i) Пусть полная мера $|\Omega|$ множества Ω конечна. Тогда для всякой функции $u(x) \in L^\infty(\Omega)$ имеем

$$\lim_{p\to\infty} \|u\|_{0,p} = \lim_{p\to\infty} \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = ess\, sup_{x\in\Omega} |u(x)|. \tag{1.96}$$

(ii) Если $1 \le p < \infty$, то $L^p(\Omega)$ – сепарабельное Банахово пространство и множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в нем. Банахово пространство $L^\infty(\Omega)$ не является сепарабельным.

(iii) Если $1 \le p < \infty$, то для каждого (линейного непрерывного функционала) $f \in (L^p(\Omega))^*$ (= двойственное к $L^p(\Omega)$ пространство) существует единственный элемент $u_f \in L^{p'}(\Omega)$ такой, что

$$\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega u_f(x) \cdot \varphi(x) \, dx, \;\; \varphi \in L^p(\Omega) \tag{1.97}$$

и

$$\|f\|_{(L^p(\Omega))^*} = \|u_f\|_{L^{p'}(\Omega)}. \tag{1.98}$$

Здесь $\langle f, \varphi \rangle = f(\varphi)$ – значения функционала f в точке φ; p' – число, союзное с p: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Для $p = p' = 2$ этот результат составляет содержание теоремы Рисса. Таким образом соотношение $f \leftrightarrow u_f$ устанавливает изометрический изоморфизм между Банаховыми пространствами $(L^p(\Omega))^*$ и $L^{p'}(\Omega)$ (обозначая этот факт как $(L^p(\Omega))^* \equiv L^{p'}(\Omega)$), которые мы условимся отождествлять.

(iv) Мы имеем

$$(L^1(\Omega))^* \equiv L^\infty(\Omega)$$

и

$$L^1(\Omega) \subset (L^\infty(\Omega))^*.$$

(v) Если $1 < p < \infty$, то $L^p(\Omega)$ - равномерно выпуклое ($\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, \delta > 0$ такое, что $\frac{1}{2}\|u+v\|_{L^p} \le 1 - \delta$ для всех $u, v \in L^p(\Omega)$ таких, что $\|u\|_{L^p} \le 1$, $\|v\|_{L^p} \le 1$, $\|u - v\|_{L^p} > \varepsilon$) Банахово пространство. Пространства $L^p(\Omega)$ с $p = 1$ и $p = \infty$ не являются ни равномерно выпуклыми, ни рефлексивными.

(vi) Пусть $1 \le p \le \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ и $g \in L^{p'}(\Omega)$. Тогда имеет место неравенство Гельдера

$$\left| \int\limits_\Omega f \cdot g \, dx \right| \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}. \tag{1.99}$$

(vii) Пространство $L^2(\Omega)$ является Гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f,g)_{L^2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} f \cdot g \, dx.$$

(viii) Пусть $1 \le p < \infty$ и $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_{\Omega} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx = 0$$

для любого ограниченного измеримого множества Ω из $\mathbb{R}^n$.

Сходимость в пространстве L^p

Теорема 1.87. Пусть $1 \le p \le \infty$. Пусть $f_k \to f$ сильно в $L^p(\Omega)$. Тогда существует подпоследовательность (снова обозначенная как f_k) такая, что $f_k(x) \to f(x)$ для почти всех $x \in \Omega$.

Теорема 1.88 (Фату). Если последовательность $f_k(x)$, $k = 1, 2, ...$, интегрируемых почти всюду (п.в.) неотрицательных функций сходится п.в. к функции $f(x)$ и $\int\limits_{\Omega} f_k \, dx \le A$, $k = 1, 2, ...$, то $f(x)$ интегрируема и $\int\limits_{\Omega} f \, dx \le A$.

Теорема 1.89 (Леви). Монотонная п.в. последовательность $f_k(x)$, $k = 1, 2, ...$, интегрируемых в Ω функций с ограниченной последовательностью интегралов п.в. в Ω сходится к некоторой интегрируемой функции $f(x)$ и при этом

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_k \, dx = \int\limits_{\Omega} f \, dx.$$

Теорема 1.90 (Лебега о предельном переходе под знаком интеграла). Если последовательность измеримых функций $f_k(x)$, $k = 1, 2, ...$, сходится п.в. в Ω к некоторой функции $f(x)$ и $f_k(x) \le g(x)$ п.в., $k = 1, 2, ...$, где $g(x)$ интегрируема, то $f(x)$ тоже интегрируема и

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_k \, dx = \int\limits_{\Omega} f \, dx.$$

Теорема 1.91 (Витали). Пусть на измеримом множестве Ω задана последовательность суммируемых функций $f_1(x), f_2(x), ...$, сходящаяся п.в. к функции $f(x)$. Если функции последовательности $\{f_k(x)\}$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, т. е.

(i) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\int\limits_E |f_k|\,dx < \varepsilon,\ k = 1, 2, ...,\ E \subset \Omega,\ |E| < \delta,$$

(ii) для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E_\varepsilon \subset \Omega$ конечной меры такое, что

$$\int\limits_{\Omega\setminus E_\varepsilon} |f_k|\,dx < \varepsilon,\ k = 1, 2, ...,$$

то $f(x)$ суммируема и

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_\Omega f_k\,dx = \int\limits_\Omega f\,dx.$$

Некоторые результаты для монотонных и выпуклых операторов. Рассмотрим некоторые результаты, касающиеся выпуклого анализа и теории полунепрерывных снизу (сверху) функционалов, которые используются в дальнейшем.

Теорема 1.92. *Пусть $1 \le p < \infty$ и Ω – область в $\mathbb{R}^n$.*

(i) Предположим, что $F : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ – выпуклый полунепрерывный снизу функционал в $L^p(\Omega)$. Тогда функционал F слабо полунепрерывен снизу. В частности,

$$F(u) \le \liminf_{n\to\infty} F(u_n),\ \textit{если}\ u_n \to u\ \textit{слабо в}\ L^p(\Omega). \tag{1.100}$$

(ii) Предположим, что $F : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ вогнутый полунепрерывный сверху функционал в $L^p(\Omega)$. Тогда F слабо полунепрерывен сверху. В частности,

$$F(u) \ge \limsup_{n\to\infty} F(u_n),\ \textit{если}\ u_n \to u\ \textit{слабо в}\ L^p(\Omega). \tag{1.101}$$

Следствия:

(i) Пусть Ω *– область в* $\mathbb{R}^n$ *и* $1 \leq p < \infty$*. Пусть* $F(u) = \int\limits_K |u|^p\,dx$, $u \in L^p(K)$*, где* K *измеримое подмножество* Ω*. Тогда*

$$\int\limits_K |u|^p\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_K |u_n|^p\,dx, \text{ если } u_n \to u \text{ слабо в } L^p(\Omega). \tag{1.102}$$

(ii) Пусть Ω *– ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$*,* I *– интервал в* $\mathbb{R}$ *и* $1 \leq p < \infty$*. Пусть* $f : I \to \mathbb{R}$ *– выпуклая полунепрерывная снизу (соответственно вогнутая полунепрерывная сверху) функция на* I *такая, что*

$$|f(t)| \leq C_1 + C_2 t^p, \ t \in I \text{ с некторыми } C_1, C_2 > 0. \tag{1.103}$$

Положим

$$F_\pm : L^p(\Omega) = \begin{cases} \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \end{cases}, \ F_\pm(u) = \begin{cases} \int\limits_\Omega f(u), \text{ если } |\{u \not\subseteq I\}| = 0 \\ \pm\infty, \text{ иначе} \end{cases}. \tag{1.104}$$

Тогда F_+ *и* F_- *выпуклый слабо полунепрерывный снизу и вогнутый слабо полунепрерывный сверху функционалы соответственно.*

(iii) Пусть Ω *– область в* $\mathbb{R}^n$*,* I *– интервал в* $\mathbb{R}$ *и* $f : I \to \mathbb{R}$ *– выпуклая полунепрерывная снизу (соответственно вогнутая полунепрерывная сверху) функция на* I*. Пусть* $1 \leq p < \infty$*. Предположим, что* u_n *– последовательность неотрицательных функций из* $L^p(\Omega)$ *со значениями в* I *такая, что*

$$u_n \to u \text{ слабо в } L^p(\Omega) \text{ и } f(u_n) \to \overline{f(u)} \text{ слабо в } L^1(\Omega).$$

Тогда

$$f(u) \leq \overline{f(u)} \ (\text{соответственно } f(u) \geq \overline{f(u)}) \text{ п.в. в } \Omega. \tag{1.105}$$

Теорема 1.93. *Пусть* Ω *– ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$*,* I *– интервал в* $\mathbb{R}$*,* $1 < p < \infty$ *и* $f : I \to \mathbb{R}$ *– строго выпуклая функция. Пусть,* u_n *–*

последовательность функций из $L^p(\Omega)$ *со значениями в* I. *Если* $u_n \to u$ *слабо в* $L^p(\Omega)$ *и* $f(u_n) \to f(u)$ *слабо в* $L^1(\Omega)$, *то*

$$u_n \to u \text{ сильно в } L^1(\Omega). \tag{1.106}$$

Теперь рассмотрим некоторые свойства монотонных операторов.

Теорема 1.94. *Пусть* Ω *– область в* $\mathbb{R}^n$, I *– интервал в* $\mathbb{R}$ *и пусть* $P : I \to \mathbb{R}$ *– неубывающая функция (определенная на* I*). Пусть* u_n *– последовательность функций из* $L^1(\Omega)$ *со значениями в* I *такая, что*

$$\begin{gathered}
u_n \to u \text{ слабо в } L^1(\Omega),\\
P(u_n) \to \overline{P(u)} \text{ слабо в } L^1(\Omega),\\
P(u_n)u \to \overline{P(u)}u \text{ слабо в } L^1(\Omega),\\
P(u_n)u_n \to \overline{P(u)u} \text{ слабо в } L^1(\Omega),\\
P(u)(u_n - u) \to 0 \text{ слабо в } L^1(\Omega).
\end{gathered} \tag{1.107}$$

Тогда

$$\overline{P(u)u} \geq \overline{P(u)}u \text{ п.в. в } \Omega. \tag{1.108}$$

Теорема 1.95. *Пусть* Ω, P *и* u_n *удовлетворяют условиям теоремы 1.93. Кроме того предположим, что функция* P *непрерывна и*

$$\begin{gathered}
P(u+\eta) \in L^1(\Omega),\ P(u+\eta)u \in L^1(\Omega),\ \eta \in D(\Omega),\\
P(u+\eta)u_n \to P(u+\eta)u \text{ слабо в } L^1(\Omega),\\
\overline{P(u)u} = \overline{P(u)}u \text{ п.в. в } \Omega.
\end{gathered} \tag{1.109}$$

Тогда

$$\overline{P(u)} = P(u) \text{ п.в. в } \Omega. \tag{1.110}$$

3. Распределения и пространства Соболева

Распределения. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$. В линейном пространстве $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω определим понятие сходимости. Если v_n, $n = 1, 2, ...$ и v - функции из $C_0^\infty(\Omega)$, то запись $v_n \to v$ при $n \to \infty$ означает, что существует компактное множество $K \subset \Omega$ такое, что

(i) $supp\, v_n \subset K \ \forall\ n = 1, 2, ...$,

(ii) $D^\alpha v_n \to D^\alpha v$ равномерно на K при $n \to \infty$ для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Пространство $C_0^\infty(\Omega)$ с введенной в нем таким образом сходимостью принято обозначать через $D(\Omega)$ и называть пространством основных функций.

Пусть f – линейный непрерывный функционал на $D(\Omega)$, т. е. правило, ставящее в соответствие каждому $v \in D(\Omega)$ единственное число (вещественное или комплексное) $\langle f, v\rangle$ так, что это соответствие линейно:

$$\langle f, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2\rangle = \alpha_1\langle f, v_1\rangle + \alpha_2\langle f, v_2\rangle \tag{1.111}$$

и

$$\langle f, v_n\rangle \to \langle f, v\rangle, \text{ если } v, v_n \in D(\Omega) \text{ и } v_n \to v \text{ в } D(\Omega). \tag{1.112}$$

Такой функционал называется распределением (или обобщенной функцией) на Ω, и множество таких распределений есть линейное пространство, обозначаемое через $D'(\Omega)$. На $D'(\Omega)$ можно определить сходимость:

$$f_n \to f \text{ в } D'(\Omega) \text{ тогда и только тогда, когда } \langle f_n, v\rangle \to \langle f, v\rangle\ \forall\ v \in D(\Omega).$$

Всякая локально интегрируемая на Ω функция $f(x)$ порождает распределение $\widetilde{f} \in D'(\Omega)$, определенное равенством

$$\langle \widetilde{f}, v\rangle = \int\limits_\Omega f(x)\cdot v(x)\, dx, \tag{1.113}$$

которое линейно и непрерывно на $D(\Omega)$. Отметим, что если $f_1 = f_2$ п.в. в Ω, то соответствующие распределения $\widetilde{f_1}$ и $\widetilde{f_2}$ совпадают. Отсюда видно, что распределения являются обобщениями локально интегрируемых функций, но когда функция $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ рассматривается как распределение, то она отождествляется со всеми функциями, получаемыми изменением значений $f(x)$ на множествах меры нуль. Фактически распределение связывается не с функцией, а с классом эквивалентности, образованным равными п.в. функциями. Распределения, действующие по формуле (1.113) называются регулярными распределениями (или регулярными обобщенными функциями). Условимся регулярное распределение обозначать той же буквой, что и порождающую ее локально интегрируемую функцию. Следовательно, мы пишем

$$\langle f, v\rangle = \int\limits_\Omega f\cdot v\, dx,\ \ v \in D(\Omega). \tag{1.114}$$

С другой стороны, справедливо следующее утверждение, позволяющее, вместе с предыдущим заключением, утверждать, что с точностью до изоморфизма множество $L^1_{loc}(\Omega)$ есть линейное подпространство распределений $D'(\Omega)$:

Лемма 1.96. *Пусть* $f_1, f_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$ *и* $\langle f_1, v\rangle = \langle f_2, v\rangle$ *для всех* $v \in D(\Omega)$. *Тогда* $f_1 = f_2$ *п.в. в* Ω.

Примером нерегулярной обобщенной функции (нерегулярного распределения) является δ-функция Дирака (распределение Дирака):

$$a \in \Omega \;-\; \text{точка},\; \delta(a) : D(\Omega) \to \mathbb{R},$$

$$\langle \delta(a), v\rangle = v(a),\; v \in D(\Omega).$$

Если f – непрерывно дифференцируемая функция, то интегрируя по частям (пробные функции равны нулю в окрестности $\partial\Omega$ - границы Ω), имеем

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, v \right\rangle = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} v\, dx = -\int\limits_{\Omega} f \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \left\langle f, -\frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Эта формула является основой определения производных распределения. Если $f \in D'(\Omega)$, то определим $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in D'(\Omega)$ равенством

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, v \right\rangle = \left\langle f, -\frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle \;\forall\; v \in D(\Omega).$$

Следовательно, любое распределение f имеет производную любого порядка $D^\alpha f \in D'(\Omega)$, которая определяется равенством

$$\langle D^\alpha f, v\rangle = \langle f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha v\rangle,\; v \in D(\Omega). \tag{1.115}$$

В частности, распределение, порождаемое функцией $f(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$, имеет производные любого порядка, которые являются распределениями, но вообще говоря, не порождаются локально интегрируемыми функциями. Из определения следует, что дифференцирование есть непрерывная операция в $D'(\Omega)$, т.е.

$$f_n \to f \text{ в } D'(\Omega) \;\Rightarrow\; D^\alpha(f_n) \to D^\alpha(f) \text{ в } D'(\Omega)$$

для любого мультииндекса α.

Умножение распределений. Если $f \in D'(\Omega)$ и $a \in C^\infty(\overline{\Omega})$, то мы определим произведение $a \cdot f \in D'(\Omega)$, действующее по формуле

$$\langle af, v\rangle = \langle f, av\rangle,\; v \in D(\Omega). \tag{1.116}$$

Свертка. Пусть $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Если интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot g(x-y)\,dy$ существует для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ и определяет локально интегрируемую функцию в $\mathbb{R}^n$, то он называется сверткой функций f и g и обозначается символом $f * g$, так что

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot g(x-y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) \cdot f(x-y)\,dy = (g * f)(x). \quad (1.117)$$

Отметим два случая, когда свертка $f * g$ заведомо существует:

(i) пусть $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $supp\, f \subset A$, $supp\, g \subset B$, причем множества A и B таковы, что для любого $R > 0$ множество

$$T_R = \{(x, y) : \ x \in A, \ y \in B, \ |x + y| \leq R\}$$

ограниченно в $\mathbb{R}^{2n}$ (см. рис. 1). Тогда $f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. В частности, если f и g финитны, то T_R ограничено;

(ii) пусть $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Тогда $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, где $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ и при этом

$$\|f * g\|_{0,r} \leq \|f\|_{0,p} \cdot \|g\|_{0,q}. \quad (1.118)$$

Свертка $f*g$ определяет регулярное распределение из $D'(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int (f * g)(x) \varphi(x)\,dx = \int \varphi(x) \int f(y) \cdot g(x-y)\,dy\,dx =$$

$$= \int f(y) \int g(x-y) \cdot \varphi(x)\,dx\,dy = \int f(y) \int g(\xi) \cdot \varphi(y + \xi)\,d\xi\,dy,$$

т.е.

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int \int f(x) \cdot g(y) \cdot \varphi(x+y)\, dx\, dy, \ \varphi \in D(\mathbb{R}^n). \tag{1.119}$$

Будем говорить, что последовательность функций $\eta_k \in D(\mathbb{R}^n)$, $k = 1, 2, ...$, сходится к 1 в $\mathbb{R}^n$, если:

(i) для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдется такой номер $N = N(K)$, что $\eta_k(x) = 1$, $x \in K$, $k \geq N$;

(ii) функции $\{\eta_k\}$ равномерно ограничены вместе со всеми производными

$$|D^\alpha \eta_k(x)| \leq C_\alpha, \ x \in \mathbb{R}^n, \ k = 1, 2, ...$$

Отметим, что такие последовательности всегда существуют, например:

$$\eta_k(x) = \eta\left(\frac{x}{k}\right), \text{ где } \eta \in D(\mathbb{R}^n), \ \eta(x) = 1 \text{ при } |x| < 1.$$

Равенство (1.119) равносильно следующему:

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \lim \int \int f(x) g(y) \eta_k(x, y) \varphi(x+y)\, dx\, dy, \tag{1.120}$$

где $\{\eta_k\}$ – любая последовательность функций из $D(\mathbb{R}^{2n})$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$.

Равенства (1.119) и (1.120) и принимаются за основу определения свертки двух обобщенных функций.

Предварительно дадим определение прямого произведения распределений. Пусть $f(x)$ и $g(y)$ – локально суммируемые функции в открытых множествах $\Omega_1 \in \mathbb{R}^n$ и $\Omega_2 \in \mathbb{R}^m$ соответственно. Функция $f(x) \cdot g(y)$ также будет локально суммируемой в $\mathbb{R}^{n+m}$. Она определяет (регулярное) распределение $f(x) \cdot g(y) = g(y) \cdot f(x)$ из $D'(\Omega_1 \times \Omega_2)$, действующее на основные функции $\varphi(x, y)$ из $D(\Omega_1 \times \Omega_2)$ по формулам

$$\langle f(x) g(y), \varphi \rangle = \int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x) g(y) \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{\Omega_1} f(x) \int\limits_{\Omega_2} g(y) \varphi(x, y)\, dy\, dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} g(y) f(x) \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{\Omega_2} g(y) \int\limits_{\Omega_1} f(x) \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \langle f(x) g(y), \varphi \rangle &= \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle, \\ \langle g(y) f(x), \varphi \rangle &= \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle. \end{aligned} \tag{1.121}$$

Эти равенства выражают теорему Фубини о совпадении повторных интегралов с кратным.

Равенства (1.121) принимаются за исходные для определения прямого произведения $f(x) \times g(y)$ и $g(y) \times f(x)$ распределений $f \in D'(\Omega_1)$ и $g \in D'(\Omega_2)$:

$$\begin{aligned} &\langle f(x) \times g(y), \varphi \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle, \ \varphi \in D(\Omega_1 \times \Omega_2), \\ &\langle g(y) \times f(x), \varphi \rangle = \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle, \ \varphi \in D(\Omega_1 \times \Omega_2). \end{aligned} \tag{1.122}$$

Определение 1.97. *Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$ таковы, что для любой последовательности $\{\eta_k\}$ функций из $D(\mathbb{R}^{2n})$, сходящейся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$, существует предел числовой последовательности*

$$\lim_{k\to\infty} \langle f(x) \times g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x, y) \rangle = \langle f(x) \times g(y), \varphi(x, y) \rangle$$

и этот предел не зависит от последовательности $\{\eta_k\}$. Сверткой $f * g$ называется функционал

$$\begin{aligned} &\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(x) \times g(y), \varphi(x + y) \rangle = \\ &= \lim_{k\to\infty} \langle f(x) \times g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y) \rangle, \ \varphi \in D(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{1.123}$$

Заметим, что поскольку $\varphi(x+y)$ не принадлежит $D(\mathbb{R}^{2n})$ (она не финитна в $\mathbb{R}^{2n}$), правая часть (1.123) существует не для любых распределений f и g и, таким образом, свертка существует не всегда.

Если $f \in D'(\mathbb{R}^n)$, а $g \in D(\mathbb{R}^n)$, то свертка $f*g$ существует и определяется формулой

$$\langle f * g, v \rangle = \left\langle f, \int_{\mathbb{R}^n} g(y)v(\cdot + y)\, dy \right\rangle = \langle f, \widetilde{g} * v \rangle, \ \widetilde{g}(x) = g(-x), \ v \in D(\mathbb{R}^n). \tag{1.124}$$

Отметим некоторые свойства свертки:

(i) *Коммутативность свертки.* Если свертка $f * g$ существует, то существует и свертка $g * f$ и они равны:

$$f * g = g * f. \tag{1.125}$$

(ii) *Свертка с δ-функцией.* Свертка любого распределения $f \in D'$ с δ-функцией существует и равна f:

$$f * \delta = \delta * f = f. \tag{1.126}$$

(iii) *Дифференцирование свертки.* Если свертка $f * g$ существует, то существует свертка $D^\alpha f * g$ и $f * D^\alpha g$, причем

$$D^\alpha f * g = D^\alpha (f * g) = f * D^\alpha g. \tag{1.127}$$

(iv) Операция $f \to f * g$ линейна на множестве тех распределений, для которых свертка с g существует.

Регуляризация распределений. Пусть

$$\begin{gathered} \omega_0 \in D(\mathbb{R}^n),\ \omega_0(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_0 \, dx = 1,\ supp\, \omega_0 \subset B_1(0), \end{gathered} \tag{1.128}$$

например,

$$\omega_0(x) = \begin{cases} \Big[\int\limits_{B_1(0)} exp \, \frac{1}{|x|^2 - 1} \, dx \Big]^{-1} exp \frac{1}{|x|^2-1}, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| \geq 1. \end{cases} \tag{1.129}$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим

$$\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \omega_0 \Big(\frac{x}{\varepsilon} \Big), \text{ тогда } \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon \, dx = 1. \tag{1.130}$$

Для любого распределения (обобщенной функции) $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим свертку

$$S_\varepsilon(f) = f * \omega_\varepsilon = f_\varepsilon, \tag{1.131}$$

$$f_\varepsilon(x) = \langle f(y), \omega_\varepsilon(x - y) \rangle. \tag{1.132}$$

Функция $f_\varepsilon(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ называется регуляризацией f, а оператор S_ε - регуляризующим оператором.

Лемма 1.98. *Мы имеем*

$$S_\varepsilon(f) = f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \langle S_\varepsilon(f), v \rangle = \langle f, \widetilde{S}_\varepsilon(v) \rangle, \tag{1.133}$$

где $\widetilde{S}_\varepsilon(f) = \widetilde{\omega}_\varepsilon * f$, $\widetilde{\omega}_\varepsilon(x) = \omega_\varepsilon(-x)$ *(сравни с формулой (1.124)). Кроме того,*

(i) Если $f \in D'(\mathbb{R}^n)$, *то*

$$S_\varepsilon(f) = f_\varepsilon \to f,\ \varepsilon \to +0 \text{ в } D'(\mathbb{R}^n). \tag{1.134}$$

Итак, всякая обобщенная функция $D'(\mathbb{R}^n)$ есть слабый предел своих регуляризаций.

(ii) Если $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, то $S_\varepsilon(f) \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ и

$$S_\varepsilon(f) \to f \text{ сильно в } L^p_{loc}(\mathbb{R}^n). \tag{1.135}$$

(iii) Если $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, то $S_\varepsilon(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\|S_\varepsilon(f)\|_{0,p} \le \|f\|_{0,p}$ (также для $p = \infty$) и

$$S_\varepsilon(f) \to f \text{ сильно в } L^p(\mathbb{R}^n). \tag{1.136}$$

(iv) Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$ и $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $supp\, f \subset \Omega$. Тогда

$$\begin{gathered} S_\varepsilon(f) \in D(\Omega),\ 0 < \varepsilon < dist(supp\, f, \Omega) \text{ и} \\ S_\varepsilon(f) \to f \text{ в } L^p(\Omega)\ \forall\ f \in L^p(\Omega),\ (1 \le p < \infty). \end{gathered} \tag{1.137}$$

Кроме того, если $f \in C_0(\Omega)$, то

$$S_\varepsilon(f) \to f \text{ в } C^0(\overline{\Omega}) = C(\overline{\Omega}). \tag{1.138}$$

Пространства Соболева. Пусть $k \ge 0$, $1 \le p \le \infty$. Пространство Соболева $W^{k,p}(\Omega)$ есть пространство всех распределений, которые (вместе со всеми обобщенными производными порядка $\le k$) порождаются функциями, принадлежащими пространству $L^p(\Omega)$

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u :\ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ для всех мультииндексов } |\alpha| \le k\}. \tag{1.139}$$

Норма в $W^{k,p}(\Omega)$ определяется формулами

$$\begin{gathered} \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \|u\|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} = \\ = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \text{ если } 1 \le p < \infty \text{ и} \\ \|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{k,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} = \\ = \max_{|\alpha|\le k}\{ess\, sup_{x\in\Omega}|D^\alpha u(x)|\} \text{ для} p = \infty. \end{gathered} \tag{1.140}$$

Для краткости записи условимся (когда это не может вызвать недоразумений) писать

$$\| \cdot \|_{k,p,\Omega} = \| \cdot \|_{k,p}.$$

Очевидно, что

$$L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega) \supset W^{1,p}(\Omega) \supset W^{2,p}(\Omega) \supset \ldots \qquad (1.141)$$

Далее, определим пространство $W_0^{k,p}(\Omega)$ как замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W^{k,p}(\Omega)$. При $p = 2$ $W^{k,p}(\Omega)$ есть гильбертово пространство, обозначаемое как $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$, $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$ и $\| \cdot \|_{k,\Omega} = \| \cdot \|_{k,2,\Omega}$.

Можно определить пространства $W^{k,p}(\Omega)$ также для любых вещественных (не обязательно целых) k (см. об этом далее). В частном случае $\Omega = \mathbb{R}^n$, $p = 2$ пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ легко определить с помощью преобразования Фурье. В этом случае H^s есть пространство функций $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, таких что их преобразования Фурье $\widehat{f}$ удовлетворяют условию

$$(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

причем норма f в гильбертовом пространстве H^s равна

$$\|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

При целых s это определение совпадает с предыдущим в силу хорошо известного факта: преобразование Фурье есть изометрический изоморфизм в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Основные свойства пространств Соболева

(i) Для всех $1 \le p \le \infty$ $W^{k,p}(\Omega)$ – Банахово пространство. Пространство $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ является Гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u, v)_{k,\Omega} = \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha| \le k} D^\alpha u \cdot D^\alpha v \, dx, \;\; u, v \in H^k(\Omega). \qquad (1.142)$$

(ii) Для $1 \le p < \infty$ пространство $W^{k,p}(\Omega)$ сепарабельное.

(iii) Для $1 \le p < \infty$ пространство $W^{k,p}(\Omega)$ рефлексивно.

(iv) Пусть $1 \le p < \infty$. Тогда множество $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $W^{k,p}(\Omega)$.

(v) Пространства $W^{k,1}(\Omega)$ и $W^{k,\infty}(\Omega)$ не рефлексивны, а пространство $W^{k,\infty}(\Omega)$ также и не сепарабельное.

(vi) Так как $W_0^{k,p}(\Omega)$ – замкнутое подпространство пространства $W^{k,p}(\Omega)$, то утверждения (i)-(iv) остаются в силе, если в них заменить $W^{k,p}(\Omega)$ и $C^\infty(\overline{\Omega})$ на $W_0^{k,p}(\Omega)$ и $C_0^\infty(\Omega)$ соответственно.

(vii) `Характеристика` $W^{1,\infty}(\Omega)$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое ограниченное множество с границей $\partial\Omega$ класса $C^{0,1}$. Тогда функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ непрерывна по Липшицу, если и только если $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

(viii) `Формула Лагранжа`. Ясно, что если $w_n \to w$ в $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (соответственно $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$), $1 \le p \le \infty$, то $w_n(\cdot + a) \to w(\cdot + a)$ в $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (соответственно $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$). Этот результат вместе с формулой Лагранжа для гладких функций дает следующую формулу

$$w(x + \varepsilon z) - w(x) = \int_0^1 \nabla w(x + t\varepsilon z)\varepsilon z\, dt, \tag{1.143}$$

для почти всех $x, z \in \mathbb{R}^n$, $w \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$.

Усреднения и пространства Соболева. Будем говорить, что $f \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $f \in W^{k,p}(\Omega')$ для любой ограниченной подобласти Ω', $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Пусть $f_\varepsilon = S_\varepsilon(f)$ – регуляризация функции $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, определенная по формуле (1.131), т. е.

$$f_\varepsilon(x) = S_\varepsilon(f) = \int_\Omega f(y) \cdot \omega_\varepsilon(x - y)\, dy.$$

Тогда справедливо следующее утверждение:

$$f \in W^{k,p}_{loc}(\Omega) \Rightarrow S_\varepsilon(f) \to f \text{ в } W^{k,p}_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ при } \varepsilon \to +0. \tag{1.144}$$

Сопряженные (двойственные) пространства к пространствам Соболева. Если $1 \le p < \infty$, то через $W^{-k,p'}(\Omega)$ обозначим пространство, сопряженное к $W^{k,p}_0(\Omega)$. Соответствующая двойственная норма обозначается через $\|\cdot\|_{-k,p'}$. Имеют место следующие важные теоремы.

Теорема 1.99. *Пусть* $1 < p' < \infty$ *и* $f \in W^{-k,p'}(\Omega)$. *Тогда существует единственный элемент* $u_f \in W^{k,p'}_0(\Omega)$ *такой, что*

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \le k} D^\alpha u_f \cdot D^\alpha v\, dx,\ v \in W^{k,p}_0(\Omega),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{1.145}$$

Кроме того, существует постоянная $C(n, k, p, \Omega) > 0$ *такая, что*

$$C\|u_f\|_{k,p'} \le \|f\|_{-k,p'} \le \|u_f\|_{k,p'}. \tag{1.146}$$

Теорема 1.100. *Пусть* $1 < p' < \infty$ *и* $f \in W^{-k,p'}(\Omega)$. *Тогда существует семейство функций* $\{f_\alpha\}_{|\alpha|\le k}$, $f_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$ *таких, что*

$$f = \sum_{|\alpha|\le k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha \text{ в } D'(\Omega). \tag{1.147}$$

Кроме того,

$$\|f\|_{-k,p'} \le \inf \sum_{|\alpha|\le k} \|f_\alpha\|_{0,p'}, \tag{1.148}$$

где нижняя грань берется по всем семействам $\{f_\alpha\}_{|\alpha|\le k}$ *для которых выполнено равенство (1.147).*

Из теоремы 1.100 следует, что $D(\Omega)$ плотно в пространстве $W^{-k,p'}(\Omega)$, $1 < p' < \infty$.

Производные почти всюду и производные распределений. Предположим, что $f \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$. Тогда частная производная $\partial_i f$ существует почти всюду в Ω и равна почти всюду соответствующей производной распределения.

Положительные (отрицательные) части функций. Положим

$$\rho^+ = \begin{cases} \rho & \text{п.в. в } \{\rho > 0\} \\ 0 & \text{п.в. в } \{\rho \le 0\} \end{cases}, \quad \rho^- = \begin{cases} -\rho & \text{п.в. в } \{\rho < 0\} \\ 0 & \text{п.в. в } \{\rho \ge 0\} \end{cases}.$$

Тогда, очевидно, $\rho = \rho^+ - \rho^-$ п.в., а также $\rho^+ = \frac{1}{2}(|\rho| + \rho)$, $\rho^- = \frac{1}{2}(|\rho| - \rho)$. ρ^+ (ρ^-) называется положительной (отрицательной) частью функции ρ.

Напомним два хорошо известных свойства пространств $W^{1,p}$, $1 < p < \infty$:

(i) Если $\rho \in W^{1,p}(\Omega)$, то $\rho^\pm \in W^{1,p}(\Omega)$. При этом

$$\partial_j\rho^+ = \begin{cases} \partial_j\rho & \text{п.в. в } \{\rho > 0\} \\ 0 & \text{п.в. в } \{\rho \le 0\} \end{cases}, \quad \partial_j\rho^- = \begin{cases} -\partial_j\rho & \text{п.в. в } \{\rho < 0\} \\ 0 & \text{п.в. в } \{\rho \ge 0\} \end{cases}.$$

(ii) Если $F \in C^1(\mathbb{R})$, производная F' - ограничена и $\rho \in W^{1,p}(\Omega)$, то $F(\rho) \in W^{1,p}(\Omega)$ и

$$\partial_j F(\rho) = F'(\rho)\partial_j\rho.$$

Следы и теоремы вложения. След – это обобщение понятия сужения непрерывной функции на подмногообразие ее области определения (например, на $\partial\Omega$ – границу Ω). Однако это более глубокое и тонкое понятие.

Рассмотрим, например, $H^1(\Omega)$, где Ω – область с гладкой границей. По определению элемент $u \in H^1(\Omega)$ – это распределение, порождаемое некоторой функцией; если функцию $u(x)$ изменить на множестве меры нуль, например, на $\partial\Omega$, то соответствующее распределение $u \in H^1$ не изменяется. Поэтому рассматривать сужение функции $u(x)$ на $\partial\Omega$ не имеет смысла. Однако пространство $C^\infty(\overline{\Omega})$ бесконечно дифференцируемых на $\overline{\Omega}$ функций плотно в $H^1(\Omega)$. Рассмотрим элемент $u \in H^1$ как предел (в норме H^1) гладких функций u_n. Для таких функций сужение $u_n|_{\partial\Omega}$ имеет обычный смысл. Если можно доказать, что эти функции сходятся к (единственной) предельной функции в подходящей топологии, то будем говорить, что этот предел есть след функции u на $\partial\Omega$, и обозначать его через $u|_{\partial\Omega}$. Справедлива следующая теорема о следах.

Теорема 1.101. *Пусть $1 \le p < \infty$ и Ω – Липшицева область.*

(i) Тогда существует единственное линейное непрерывное отображение $\gamma_0^\Omega : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ такое, что

$$\gamma_0^\Omega(u) = u|_{\partial\Omega} \text{ для всех } u \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{1.149}$$

(ii) Если $1 < p < \infty$, то справедлива формула Грина

$$\int\limits_\Omega (u\partial_i v + v\partial_i u)\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} \gamma_0^\Omega(u)\cdot\gamma_0^\Omega(v) n_i\,ds,\ u \in W^{1,p}(\Omega),\ v \in W^{1,p'}(\Omega). \tag{1.150}$$

Функцию $\gamma_0^\Omega(u) \in L^p(\partial\Omega)$ называют следом функции $u \in W^{1,p}(\Omega)$ на границе $\partial\Omega$. Для простоты обозначение $u|_{\partial\Omega} = \gamma_0^\Omega(u)$ используется не только для функций $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, но и для $u \in W^{1,p}(\Omega)$. В дальнейшем иногда пишем γ_0 вместо γ_0^Ω.

Непрерывность отображения γ_0 эквивалентна существованию постоянной $C > 0$ такой, что

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{L^p(\partial\Omega)} = \|\gamma_0(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C\|u\|_{1,p,\Omega},\ u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{1.151}$$

Лемма 1.102 (неравенство Фридрихса). *Пусть $1 \le p < \infty$ и Ω – ограниченная Липшицева область. Пусть множество $\Gamma \subset \partial\Omega$ измеримо относительно меры $\widetilde{\mu} = meas_{n-1}$ размерности $(n-1)$, определенной на $\partial\Omega$ и пусть $meas_{n-1}(\Gamma) > 0$. Тогда существует постоянная $C(p, n, \Omega, \Gamma)$ такая, что*

$$\|u\|_{1,p,\Omega} \le C\|\nabla u\|_{0,p,\Omega} \text{ для всех } u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ с } \gamma_0(u) = 0\ \widetilde{\mu} - \text{п.в. на } \Gamma. \tag{1.152}$$

Лемма 1.103 (неравенство Пуанкаре). *Пусть* $1 \le p < \infty$ *и* Ω *– ограниченная Липшицева область. Тогда существует постоянная* $C(p,n,\Omega) > 0$ *такая, что*

$$\int\limits_{\Omega} |u|^p \, dx \le C \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx + \Big| \int\limits_{\Omega} u \, dx \Big|^p \right), \; u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{1.153}$$

Теорема 1.104.

(i) Пусть $k \ge 0$ *и* $1 \le p \le \infty$ *и* Ω *– ограниченная Липшицева область. Тогда*

$$\begin{gathered} W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \; \text{где } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}, \; \text{если } k < \frac{n}{p}, \\ W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \; \text{для всех } q \in [1,\infty), \; \text{если } k = \frac{n}{p}, \\ W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,k-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega}), \; \text{если } \frac{n}{p} < k < \frac{n}{p} + 1, \\ W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \; \text{для всех } \alpha \in (0,1), \; \text{если } k = \frac{n}{p} + 1, \\ W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1}(\overline{\Omega}), \; \text{если } k > \frac{n}{p} + 1. \end{gathered} \tag{1.154}$$

(ii) Пусть $k > 0$, $1 \le p \le \infty$. *Тогда*

$$\begin{gathered} W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \; \text{для всех } q \in [1,p^*) \; \text{с } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}, \; \text{если } k < \frac{n}{p}, \\ W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \; \text{для всех } q \in [1,\infty), \; \text{если } k = \frac{n}{p}, \\ W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega}), \; \text{если } k > \frac{n}{p}. \end{gathered} \tag{1.155}$$

Напомним, что символы $\hookrightarrow$ и $\hookrightarrow\hookrightarrow$ обозначают соответственно непрерывность и компактность вложения соответствующих пространств.

Соотношения (1.154) называются теоремами вложения С. Л. Соболева и (1.155) – теоремами о компактности вложений Кондрашова. Компактность вложения $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$ известна как теорема Реллиха.

Отметим следующие свойства пространств $W_0^{1,p}$.

Лемма 1.105. *Пусть $1 \le p < \infty$. Тогда*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ v \in W^{1,p}(\Omega) : \ \gamma_0(v) = 0 \right\}.$$

Лемма 1.106. *Пусть $1 \le p < \infty$ и Ω – ограниченная Липшицева область. Тогда функция*

$$x \to \frac{f(x)}{dist(x, \partial\Omega)}, \ f \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1.156}$$

принадлежит пространству $L^p(\Omega)$ и существует постоянная $C(p, n, \Omega)$ такая, что

$$\left\| \frac{f(\cdot)}{dist(\cdot, \partial\Omega)} \right\|_{0,p} \le C\|f\|_{1,p}. \tag{1.157}$$

Пространства функций Соболева-Слободецкого с дробными производными. Выше был описан подход к определению пространств Соболева $H^s(\mathbb{R}^n) = W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ с вещественными (дробными в том числе) показателями s, основанный на преобразовании Фурье. Здесь мы дадим определение пространств $W^{s,p}(\Omega)$ для вещественных $s \ge 0$, произвольных $p \in [1, \infty)$ и областей Ω произвольной геометрии.

Пусть $k \ge 0$ – целое число, $\varepsilon \in (0, 1)$. Через $W^{k+\varepsilon,p}(\Omega)$ обозначим пространство всех функций $u \in W^{k,p}(\Omega)$ таких, что

$$I_{\alpha,\varepsilon,p,\Omega}(u) = \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\varepsilon}} \, dx \, dy < \infty \text{ для } |\alpha| = k. \tag{1.158}$$

Пространство $W^{k+\varepsilon,p}(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{k+\varepsilon,p,\Omega} = \left(\|u\|_{k,p,\Omega}^p + \sum_{|\alpha|=k} I_{\alpha,\varepsilon,p,\Omega}(u) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.159}$$

является Банаховым.

Пространства Соболева были определены для областей Ω, граница $\partial\Omega$ которых непрерывна по Липшицу. Пусть теперь $\partial\Omega$ характеризуется своими локальными координатами такими, что $x_1' = a_r(x')$, $x' \in M_r$, $a_r \in C^{k-1,1}(M_r)$, $r = 1, .., R$. Мы говорим, что функция $u : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ есть элемент пространства $W^{k+\varepsilon,p}(\partial\Omega)$ с $\varepsilon \in [0, 1)$ и $p \ge 1$, если функция $(x^r \to u(a_r(x^r), x^r))$ принадлежит пространству $W^{k+\varepsilon,p}(M_r)$ для всех

$r = 1, ..., R$. Пространства следов всех функций $u \in W^{1,p}(\Omega)$ можно отождествить с пространством $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$. Более точно, справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.107. *Пусть $1 < p < \infty$ и Ω – ограниченная Липшицева область. Тогда оператор γ_0, определенный в теореме 1.101, является непрерывным оператором из $W^{1,p}(\Omega)$ в $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$.*

Лемма 1.108. *При условиях леммы 1.107 существует линейный непрерывный оператор*

$$L : W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$$

такой, что

$$\gamma_0(Lu) = u \ \ \widetilde{\mu} - \text{п.в. на } \partial\Omega, \ u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega).$$

Интерполяция пространств Лебега и Соболева. Для пространств Соболева-Слободецкого и, в частности, для пространств Соболева справедлив следующий результат.

Теорема 1.109. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - область и $0 \le s_j < \infty$, $1 \le p_j < \infty$, $j = 0, 1$, $0 \le \theta \le 1$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что*

$$\|f\|_{s,p} \le C\|f\|_{s_0,p_0}^{1-\theta}\|f\|_{s_1,p_1}^{\theta}, \ f \in W^{s_0,p_0}(\Omega) \cap W^{s_1,p_1}(\Omega). \tag{1.160}$$

В предельном случае пространств Лебега справедлив следующий результат.

Теорема 1.110. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - измеримое множество, $1 \le p \le r \le q < \infty$, $0 \le \theta \le 1$ и $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{p}$. Тогда*

$$\|f\|_{0,r} \le \|f\|_{0,q}^{1-\theta} \cdot \|f\|_{0,p}^{\theta}, \ f \in L^q(\Omega) \cap L^p(\Omega). \tag{1.161}$$

Оператор продолжения для пространств Соболева

Теорема 1.111. *Пусть $1 \le p < \infty$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - ограниченная область класса $C^{k-1,k}$ $(k \in \mathbb{N})$. Тогда существует линейный непрерывный оператор E из $W^{k,p}(\Omega)$ в $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ такой, что*

$$[E(u)]|_{\Omega} = u, \ u \in W^{k,p}(\Omega).$$

Более того, $E(u)$ имеет компактный носитель в $\mathbb{R}^n$.

4. Функции со значениями в Банаховых пространствах. При исследовании нестационарных задач мы будем работать с функциями, зависящими от времени и принимающими значения в Банаховом пространстве. Если $u(x,t)$ – функция, зависящая от пространственной переменной x и времени t, то положим

$$u(t) = \ll x \to u(x,t) \gg$$

и будем рассматривать u как функцию аргумента t со значениями в пространстве функций от x.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и пусть X – Банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Функцией, определенной на промежутке $[a,b]$ со значениями в пространстве X, назовем отображение $u : [a,b] \to X$.

Мы скажем, что функция $u : [a,b] \to X$ непрерывна в точке $t_0 \in [a,b]$, если

$$\lim_{t \to t_0} \|u(t) - u(t_0)\| = 0. \tag{1.162}$$

Через $C([a,b],X)$ обозначим пространство непрерывных на промежутке $[a,b]$ функций со значениями в X. Пространство $C([a,b],X)$, снабженное нормой

$$\|u\|_{C([a,b],X)} = \max_{t \in [a,b]} \|u(t)\|, \tag{1.163}$$

является Банаховым пространством.

Интеграл Бохнера. Примеры пространств функций со значениями в Банаховых пространствах. Интеграл Бохнера от функции $u : (a,b) \to X$ можно вводить по разному. Изучаемый здесь подход принадлежит Данфорду и состоит из двух шагов.

Определение 1.112. *Счетно-значная функция $u(t)$, определенная на (a,b) со значениями в X, называется интегрируемой в смысле Бохнера тогда и только тогда, когда функция $\|u(t)\|$ интегрируема в смысле Лебега. При этом, если $u(t)$ на множествах $s_j \subset (a,b)$ меры $\mu(s_j)$ принимает значения u_j, то по определению,*

$$(B)\int\limits_a^b u(t)\,dt = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \mu(s_j). \tag{1.164}$$

Такой ряд сходится, так как

$$\int_a^b \|u(t)\|\,dt = \sum_{j=1}^{\infty} \|u_j\|\mu(s_j).$$

Следовательно, для счетно-значных функций

$$\left\|(B)\int_a^b u(t)\,dt\right\| \le \int_a^b \|u(t)\|\,dt.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.113. *Функция $u(t)$, заданная на (a,b), со значениями в X интегрируема в смысле Бохнера тогда и только тогда, когда существует подпоследовательность счетно-значных функций $u_n(t)$, сходящаяся почти равномерно к $u(t)$ и такая, что*

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_a^b \|u_m(t) - u_n(t)\|\,dt = 0. \tag{1.165}$$

При этом, по определению

$$(B)\int_a^b u(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} (B)\int_a^b u_n(t)\,dt. \tag{1.166}$$

В дальнейшем мы опускаем значок (B), поскольку смысл интеграла ясен из контекста.

Отображение $f : (a,b) \to X$ называется простой функцией, если существуют измеримые множества $B_j \subset [a,b]$ и элементы $c_j \in X$, $j = 1,...,n$ такие, что $B_i \cap B_j = \varnothing$ для $i \neq j$, $[a,b] = \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j$ и

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} \chi_{B_j}(t) \cdot c_j,\ t \in (a,b). \tag{1.167}$$

Функция $f : (a,b) \to X$ называется сильно измеримой, если существует подпоследовательность $\{f_n\}$ простых функций такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\| = 0 \text{ для п.в. } t \in (a,b). \tag{1.168}$$

Лемма 1.114. *Пусть $f : (a,b) \to X$ - сильно измерима. Тогда функция $t \to \|f(t)\|$ измерима.*

Определение 1.115. *Мы скажем, что функция $f : (a,b) \to X$ интегрируема по Бохнеру, если существует подпоследовательность $\{f_n\}$ простых функций, сильно сходящаяся к f п.в. в (a,b) так, что при этом*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|f_n(t) - f(t)\|\, dt = 0. \tag{1.169}$$

Для любого измеримого множества $B \subset (a,b)$ интеграл Бохнера функции $f(t)$ по множеству B определяется как

$$\int_B f(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \chi_B(t) f_n(t)\, dt, \tag{1.170}$$

где $\chi_B(t)$ – характеристическая функция множества B.

Теорема 1.116 (Бохнер). *Для того, чтобы сильно измеримая функция $f : (a,b) \to X$ была интегрируема по Бохнеру, необходимо и достаточно, чтобы норма $\|f(t)\|$ была суммируема по Лебегу.*

Пусть X^* обозначает двойственное пространство к X и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает соотношение двойственности между X^* и X. Тем самым посредством $\langle \eta, f \rangle$ мы обозначаем значение функционала $\eta \in X^*$ в точке $f \in X$.

Класс функций $f(t)$, заданных на (a,b), со значениями в X, интегрируемых на (a,b) в смысле Бохнера мы обозначим символом $B((a,b);X)$.

Лемма 1.117. *Если $f_1(t) \in B((a,b);X)$ и $f_2(t) \in B((a,b);X)$, а α_1, α_2 - постоянные, то $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \in B((a,b);X)$ и*

$$\int_a^b [\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)]\, dt = \alpha_1 \int_a^b f_1(t)\, dt + \alpha_2 \int_a^b f_2(t)\, dt. \tag{1.171}$$

Лемма 1.118. *Если $f(t) \in B((a,b);X)$, то*

$$\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\| \le \int_a^b \|f(t)\|\, dt. \tag{1.172}$$

Лемма 1.119. *Если* $(a,b)=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} s_j$, $s_i\bigcap s_j=\varnothing$, $i\neq j$, *то*

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt=\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{s_j} f(t)\,dt. \tag{1.173}$$

Другими словами, интеграл Бохнера есть вполне аддитивная функция множеств. Из последних двух лемм следует, что эта функция множеств также абсолютно непрерывна.

Лемма 1.120. *Какова бы ни была функция* $f(t)\in B((a,b);S)$, *для всякого* $\varepsilon>0$ *найдется такое* $\delta=\delta(\varepsilon,f)>0$, *что для любых непересекающихся множеств* $s_i\subset(a,b)$, *удовлетворяющих условию* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(s_i)<\delta$, *выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\int\limits_{s_i} f(t)\,dt\right\|<\varepsilon. \tag{1.174}$$

Чрезвычайно важно для приложений, что для интеграла Бохнера справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.121. *Пусть ограниченный линейный оператор* T *определен на* B*-пространстве* X *и действует в* B*-пространство* Y. *Если функция* $f(t)\in B((a,b);X)$, *то функция* $Tf(t)\in B((a,b);Y)$ *и*

$$\int\limits_a^b Tf(t)\,dt=T\left(\int\limits_a^b f(t)\,dt\right). \tag{1.175}$$

В частности, если $\eta\in X^*$, *то* $\langle\eta,f(t)\rangle$ *интегрируема и*

$$\int\limits_a^b \langle\eta,f(t)\rangle\,dt=\left\langle\eta,\int\limits_a^b f(t)\,dt\right\rangle. \tag{1.176}$$

Лемма 1.122. *Если* $f_n(t)\in B((a,b);X)$, $n=1,2,\ldots$ *и*

$$\lim_{m,n\to\infty}\int\limits_a^b\|f_m(t)-f_n(t)\|\,dt=0, \tag{1.177}$$

то существует такая функция $f(t) \in B((a,b);X)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \|f(t) - f_n(t)\|\, dt = 0. \tag{1.178}$$

Если последнее неравенство выполняется и для $g(t)$, то $f(t) = g(t)$ почти всюду.

Отсюда вытекает, что множество $B((a,b);X)$ становится B-пространством, если для его элемента $f(\cdot)$ определить норму следующим образом:

$$\|f\| = \int\limits_a^b \|f(t)\|_X\, dt = \|f\|_{B((a,b);X)}. \tag{1.179}$$

Это Банахово пространство принято обозначать символом $L^1((a,b);X)$ ($\equiv B((a,b);X)$). Помимо этого пространства следует упомянуть о пространствах $L^p((a,b);X)$, $1 \le p \le \infty$. Функция $f : (a,b) \to X$ принадлежит классу $L^p((a,b);X)$, если она сильно измерима на (a,b) и $\int\limits_a^b \|f(t)\|^p < \infty$. Аналогично $f(t) \in L^\infty((a,b);X)$, если $t \to \|f(t)\|$ - существенно ограничена на (a,b) (т. е. $\|f(t)\|$ ограниченна на $(a,b) - s_0$, где $\mu(s_0) = 0$). Классы $L^p((a,b);X)$ и $L^\infty((a,b);X)$ становятся B-пространствами, если определить в них нормы по формулам

$$\|f\|_{L^p((a,b);X)} := \left[\int\limits_a^b \|f(t)\|_X^p\, dt\right]^{\frac{1}{p}},\ 1 \le p < \infty \tag{1.180}$$

и

$$\|f\|_{L^\infty((a,b);X)} := esssup_{t\in(a,b)}\|f(t)\|_X = \inf_{\mu(N)=0}\ \sup_{t\in(a,b)\setminus N} \|f(t)\|_X. \tag{1.181}$$

Если пространство X рефлексивно, то рефлексивно также и $L^p((a,b);X)$ для $p \in (1,\infty)$. Пусть $1 \le p < +\infty$. Тогда пространство, двойственное к $L^p((a,b);X)$, изометрически изоморфно пространству $L^q((a,b);X^*)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и X^* - двойственное к X (для $p = 1$, $q = \infty$). Двойственность между $L^q((a,b);X)$ и $L^p((a,b);X)$ задается формулой

$$\langle f, v\rangle = \int\limits_a^b \langle f(t), v(t)\rangle_{X^*,X}\, dt,\ f \in L^q((a,b);X^*),\ v \in L^p((a,b);X), \tag{1.182}$$

где $\langle f(t), v(t)\rangle_{X^*,X}$ обозначает значение функционала $f(t) \in X^*$ на $v(t) \in X$.

Если X – сепарабельное B-пространство, то $L^p((a,b);X)$, $p \in [1,+\infty)$ также сепарабельное.

Определение 1.123. *Мы скажем, что функция $f:(a,b) \to X$ сильно дифференцируема в точке $t_0 \in (a,b)$, если существует $w \in X$ такой, что*

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - w\right\| = 0. \tag{1.183}$$

Тогда $w = f'(t_0) = \frac{df}{dt}(t_0)$ называется сильной производной от f в точке t_0.

Лемма 1.124. *Если $u:(a,b)\to X$ интегрируема по Бохнеру на (a,b), $t_0 \in [a,b]$ и $\xi \in X$, то функция*

$$v(t) = \xi + \int\limits_{t_0}^{t} u(s)\,ds,\ t \in [a,b] \tag{1.184}$$

непрерывна на $[a,b]$, сильно дифференцируема для почти всех $t \in (a,b)$ и

$$\frac{dv}{dt}(t) = u(t) \text{ для почти всех } t \in (a,b). \tag{1.185}$$

Если $u:(a,b)\to X$ интегрируема по Бохнеру и $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$, то, очевидно, $u(t)\cdot\varphi(t)$ также интегрируема по Бохнеру на (a,b).

Лемма 1.125. *Пусть $u,v:(a,b)\to X$ интегрируемы по Бохнеру. Тогда равенство (1.184) эквивалентно следующему условию:*

$$\int\limits_a^b u(t)\cdot\varphi(t)\,dt = -\int\limits_a^b v(t)\cdot\varphi'(t)\,dt\ \forall\ \varphi \in C_0^\infty(a,b) \tag{1.186}$$

и

$$\frac{d}{dt}\langle \eta, v\rangle = \langle \eta, u\rangle\ \forall\ \eta \in X^*, \tag{1.187}$$

где производная $\frac{d}{dt}$ понимается в смысле скалярного распределения на (a,b).

Определим теперь аналоги пространств Соболева для функций со значениями в X: во-первых мы скажем, что функция $f \in L^1((a,b);X)$ имеет на интервале (a, b) обобщенную производную, если существует функция $g \in L^1((a, b); X)$ такая, что

$$\int_a^b \varphi'(t) f(t)\, dt = -\int_a^b \varphi(t) g(t)\, dt \;\forall\; \varphi \in D(a, b). \tag{1.188}$$

Если это условие выполнено, то мы обозначим $\dfrac{df}{dt} = g$.

Определим теперь пространства

$$W^{k,p}((a, b); X) = \{f \in L^p((a, b); X) :\ \frac{d^j f}{dt^j} \in L^p((a, b); X),\ j = 1, ..., k\} \tag{1.189}$$

для $k = 1, 2, ...$ и $p \in [1, \infty]$. Норма для $f \in W^{k,p}((a, b); X)$ определяется по формуле

$$\|f\|_{k,p} = \|f\|_{W^{k,p}((a,b);X)} = \left(\sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{d^j f}{dt^j} \right\|^p_{L^p((a,b);X)} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.190}$$

Мы определим теперь соответственно пространства непрерывных и дифференцируемых функций на интервале I со значениями в X:

$$\begin{gathered} C(I; X) = C^0(I; X) = \{f : I \to X :\ f \text{ ограничена} \\ \text{непрерывна в каждой точке } I\}, \end{gathered} \tag{1.191}$$

$$C^k(I; X) = \{f \in C(I; X) :\ \frac{d^j f}{dt^j} \in C(I; X) \text{ для всех } j = 1, ..., k\}. \tag{1.192}$$

Норма для $f \in C^k(I; X)$, $k = 0, 1, ...$ определяется по формуле

$$\begin{gathered} \|f\|_{C^k(I;X)} = \sup \left\{ \left\| \tfrac{d^j f}{dt^j}(t) \right\|_{C(I;X)},\ j = 0, ..., k \right\}, \\ \|f\|_{C(I;X)} = \sup_{t \in I} \|f(t)\|_X. \end{gathered} \tag{1.193}$$

Эти пространства не рефлексивные B-пространства, сепарабельные, если сепарабельным является X.

В заключение, определим пространства со слабой и *-слабой топологиями:

$$C(I; X_{weak}) = \{f : I \to X; \langle g, f\rangle_{X^*,X} \in C(I) \;\forall\; g \in X^*\} \tag{1.194}$$

и если $X = B^*$, где B – Банахово пространство, то

$$C(I; B^*_{*-weak}) = \{f : I \to B^*; \langle f, v\rangle_{B^*,B} \in C(I)\ \forall\ v \in B\}. \tag{1.195}$$

Топологии в этих пространствах индуцированы соответственно слабой и *-слабой топологией в X.

Справедлива следующая теорема интегрирования по частям.

Теорема 1.126. *Пусть H – гильбертово пространство и $V \hookrightarrow H$ плотно в H. Если $u, v \in L^p((a,b); V)$ с $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $1 < p < \infty$ и $u', v' \in L^q((a,b); V^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $u, v \in C([a,b]; H)$ и*

$$(u(t), v(t)) - (u(s), v(s)) = \int\limits_s^t (\langle u'(\tau), v(\tau)\rangle + \langle v'(\tau), u(\tau)\rangle)\, d\tau, \tag{1.196}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – соотношение двойственности между V и V^*.

В приложениях часто используется следствие этой теоремы.

Теорема 1.127. *Предположим, что $u \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,2}((0,T); H^{-1}(\Omega))$, $T{>}0$. Тогда*

(i)

$$u \in C(0, T; L^2(\Omega))$$

(быть может после изменения на множестве меры нуль);

(ii) отображение

$$t \to \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

абсолютно непрерывно и

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\langle u'(t), u(t)\rangle$$

для почти всех $0 \le t \le T$;

(iii) имеет место оценка

$$\max_{0 \le t \le T} \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \le C(\|u\|_{L^2((0,T); H_0^1(\Omega))} + \|u'\|_{L^2((0,T); H^{-1}(\Omega))}). \tag{1.197}$$

Далее, мы сформулируем некоторые фундаментальные результаты относительно пространств $L^p((a,b); X)$. Рассмотрим Банаховы пространства X_0, X и X_1 такие, что

a) $X_0 \subset X \subset X_1$,
b) вложения X в X_1 и X_0 в X непрерывны,
c) вложение X_0 в X компактно.

Лемма 1.128. *Пусть пространства X_0, X_1, X удовлетворяют условиям a – c. Тогда для любого $\delta > 0$ существует постоянная C_δ такая, что*

$$\|v\|_X \leq \delta \|v\|_{X_0} + C_\delta \|v\|_{X_1} \ \forall \ v \in X_0. \tag{1.198}$$

Теорема 1.129. *Пусть B и X – Банаховы пространства, причем, вложение B в X компактно. Пусть последовательность функций $f_n : \overline{I} \to B$ равномерно ограничена в B и равностепенно непрерывна в X. Тогда существует функция $f \in C^0(\overline{I}; B)$ такая, что $f_n \to f$ сильно в $C^0(\overline{I}; X)$ с точностью до выбора подпоследовательности.*

Эта теорема представляет собой абстрактную версию известной теоремы Асколи-Арцела.

Теорема 1.130. *Пусть $X \hookrightarrow\hookrightarrow B \hookrightarrow Y$ – Банаховы пространства и $\{f_n\}$ – ограниченная последовательность в $L^q(I; B) \cap L^1(I; X)$ $(1 < q \leq \infty)$ и $\left\{\dfrac{df_n}{dt}\right\}$ ограничена в $L^1(I; Y)$. Тогда $\{f_n\}$ относительно компактно в $L^p(I; B)$ для любого $1 \leq p < q$.*

Теорема 1.131. *Пусть $X \hookrightarrow B \hookrightarrow Y$ – Банаховы пространства, причем, вложение X в Y компактно. Далее, пусть существуют $0 < \theta < 1$ и $M > 0$ такие, что*

$$\|v\|_B \leq M \|v\|_X^{1-\theta} \cdot \|v\|_Y^{\theta} \ \text{для всех} \ v \in X \cap Y. \tag{1.199}$$

Обозначим для $T > 0$

$$W(0,T) = W^{s_0, r_0}((0,T); X) \cap W^{s_1, r_1}((0,T); Y), \tag{1.200}$$

где

$$\begin{gathered} s_0, s_1 \in \mathbb{R}, \ r_0, r_1 \in [1, \infty], \\ s_\theta = (1-\theta)s_0 + \theta s_1, \ \frac{1}{r_\theta} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}, \ s^* = s_\theta - \frac{1}{r_\theta}. \end{gathered} \tag{1.201}$$

Предположим, что $s_\theta > 0$ и F – ограниченное множество в $W(0,T)$.

Если $s^* \leq 0$, то F относительно компактно в $L^p((0,T);B)$ для всех $1 \leq p < p^* = -\frac{1}{s^*}$.

Если $s^* > 0$, то F относительно компактно в $C((0,T);B)$.

Теорема 1.132. *Пусть Ω – ограниченное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию конуса. Положим*

$$X = W^{\alpha_0,\zeta_0}(\Omega),\ B = W^{\alpha,\zeta}(\Omega)\ \text{и}\ Y = W^{\alpha_1,\zeta_1}(\Omega). \tag{1.202}$$

Тогда $X \hookrightarrow B \hookrightarrow Y$ и $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ если и только если

$$\alpha_0 \geq \alpha \geq \alpha_1,\ \alpha_0 > \alpha_1\ \text{и}\ \beta_0 \geq \beta \geq \beta_1,\ \beta_0 > \beta_1, \tag{1.203}$$

где

$$\beta = \alpha - \frac{n}{\zeta},\ \beta_i = \alpha_i - \frac{n}{\zeta_i},\ i = 0,1 \tag{1.204}$$

и (1.199) выполнено для всех

$$\theta < \theta^* = min\left\{\frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha_0 - \alpha_1}, \frac{\beta_0 - \beta}{\beta_0 - \beta_1}\right\}. \tag{1.205}$$

Значение θ^* является оптимальным.

1.3.3. Свойства решений дифференциальных уравнений

При исследовании краевых задач для систем уравнений гидродинамики, перечисленных в разделе 1.2, потребуются сведения из общей теории дифференциальных уравнений с частными производными. В этом разделе приведем их в той степени общности, в которой они необходимы.

1. Уравнения эллиптического типа. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим эллиптическое уравнение второго порядка в дивергентной форме

$$A(x,u) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(x)u = f,\ x \in \Omega, \tag{1.206}$$

дополненное граничным условием

$$\delta u + (\delta - 1)\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}n_j\Big|_{\partial\Omega} = g, \tag{1.207}$$

где $\delta = 0,1$. Предполагается, что

$$a_{i,j} = a_{ji} \in C^1(\overline{\Omega}),\ \sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \tag{1.208}$$

для некоторого $\alpha > 0$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$. В случае $\delta = 1$ задача (1.206)-(1.207) известна как задача Дирихле, а в случае $\delta = 0$ – как задача Неймана.

Рассмотрим сначала результаты о регулярности решений краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений [6], [16], [38]:

Теорема 1.133. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область класса $C^{k+2,\nu}$, $k = 0, 1, ..., \nu > 0$. Предположим в условии (1.208), что $a_{ij} \in C^{k+1,\nu}(\overline{\Omega})$, $i, j = 1, ..., n$, $c \in C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$. Пусть u – классическое решение задачи (1.206)-(1.207), где $f \in C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$, $g \in C^{k+\delta+1,\nu}(\partial\Omega)$.*

Тогда

$$\|u\|_{C^{k+2,\nu}(\overline{\Omega})} \leq C \left(\|f\|_{C^{k,\nu}(\overline{\Omega})} + \|g\|_{C^{k+\delta+1,\nu}(\partial\Omega)} + \|u\|_{C(\overline{\Omega})} \right). \tag{1.209}$$

Теорема 1.134. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область класса C^2. В условии (1.208) предположим, что $c \in C(\overline{\Omega})$. Пусть $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$ - сильное решение задачи (1.206)-(1.207), где $f \in L^p(\Omega)$, $g \in W^{\delta+1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$.*

Тогда

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{W^{\delta+1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)} \right). \tag{1.210}$$

Упомянутые выше оценки могут быть экстраполированы в негативных пространствах. Для простоты будем считать, что $g = 0$ в случае задачи Дирихле, т. е. при $\delta = 1$. Введем форму Дирихле, связанную с оператором A:

$$[Au, v] := \int_\Omega \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + c(x) uv \right) dx. \tag{1.211}$$

Таким образом, оператор A может рассматриваться как линейное непрерывное отображение

$$A : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p}(\Omega) \text{ для задачи Дирихле}$$

или

$$A : W^{1,p}(\Omega) \to [W^{1,p'}(\Omega)]^* \text{ для задачи Неймана,}$$

где $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Имеет место следующее утверждение [52], [63].

Теорема 1.135. *Предположим, что* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– ограниченная область класса* C^2 *и* $1 < p < \infty$*. Пусть* a_{ij} *удовлетворяют (1.208) и* $c \in L^\infty(\Omega)$*.*

(i) Если $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *удовлетворяет для некоторого* $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ *равенству*

$$[Au, v] = \langle f, v\rangle_{[W^{-1,p};W_0^{1,p'}](\Omega)} \ \forall\ v \in W_0^{1,p'}(\Omega), \tag{1.212}$$

тогда

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \le C\left(\|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)} + \|u\|_{W^{-1,p}(\Omega)}\right). \tag{1.213}$$

(ii) Если $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *удовлетворяет для некоторого* $F \in [W^{1,p'}(\Omega)]^*$ *равенству*

$$[Au, v] = \langle F, v\rangle_{[[W^{1,p'}]^*;W^{1,p'}](\Omega)} \ \forall\ v \in W^{1,p'}(\Omega), \tag{1.214}$$

тогда

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C\left(\|F\|_{[W^{1,p'}(\Omega)]^*} + \|u\|_{[W^{1,p'}(\Omega)]^*}\right). \tag{1.215}$$

В частности, если

$$[Au, v] = \int\limits_\Omega fv\,dx - \int\limits_{\partial\Omega} gv\,d\sigma \ \forall\ v \in W^{1,p'}(\Omega), \tag{1.216}$$

то

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C\left(\|f\|_{[W^{1,p'}(\Omega)]^*} + \|g\|_{W^{-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} + \|u\|_{[W^{1,p'}(\Omega)]^*}\right). \tag{1.217}$$

Замечания:

(i) Предположение относительно гладкости границы может быть ослаблено до $C^{0,1}$ в случае задачи Дирихле и до $C^{1,1}$ для задачи Неймана.

(ii) Норму, содержащую u в правой части оценок, в сформулированных выше теоремах можно отбросить, если имеет место теорема единственности в соответствующем классе функций.

(iii) Мы рассматривали эллиптические операторы общего вида, обладающие той степенью гладкости, которую допускают условия на коэффициенты операторов. В частности, решения эллиптических задач с постоянными или аналитическими коэффициентами являются аналитическими на любом открытом подмножестве их области определения. Например, если

$$\triangle u + \vec{b} \cdot \nabla u + cu = f \text{ в } \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

где $\vec{b}$, c являются постоянными и Ω - областью, то u будет аналитическим решением в Ω при условии, что f – аналитическая функция (см. [51]). Результат может быть обобщен на системы эллиптических уравнений и "сглажен" до границы, если последняя будет аналитической (см. [58]).

Теперь, остановимся на проблеме существования решений краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений. Учитывая область применения результатов существования в данном учебном пособии, мы будем рассматривать только задачу Неймана, приняв в задаче (1.206)-(1.207) в качестве $\delta = 0$. Справедливо следующее утверждение [37], [50].

Теорема 1.136. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область класса C^2. В дополнение к (1.208) предположим, что $c \in C(\overline{\Omega})$, $1 < p < \infty$, $k = 1, 2$ и $\delta = 0$.*

Тогда или задача (1.206)-(1.207) обладает единственным решением $u \in W^{k,p}(\Omega)$ для любых f, g таких, что

$$f \in [W^{1,p'}(\Omega)]^*, \ g \in W^{-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \text{ если } k = 1, \tag{1.218}$$

$$f \in L^p(\Omega), \ g \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \text{ если } k = 2, \tag{1.219}$$

или пространство нулей

$$Ker\, A = \{u \in W^{k,p}(\Omega) |\ u \ - \text{ решение (1.206)-(1.207) с } f = g = 0\}$$

конечномерно, и задача (1.206)-(1.207) имеет решение при f, g, принадлежащих классу (1.218)-(1.219), только если

$$\langle f, w\rangle_{[[W^{1,p'}]^*;W^{1,p'}](\Omega)} - \langle g, w\rangle_{[W^{-\frac{1}{p},p};W^{\frac{1}{p},p'}](\partial\Omega)} = 0 \tag{1.220}$$

для любых $w \in Ker\, A$.

2. Системы уравнений эллиптического типа. Хорошо известно определение эллиптичности системы линейных дифференциальных уравнений, сформулированное И. Г. Петровским в работе [27]. Согласно этому определению, система

$$\sum_{j=1}^{m} l_{ij}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_j = f_i(x), \ i = 1, ..., m, \tag{1.221}$$

где $x = (x_1, ..., x_{n+1})$ и l_{ij} – дифференциальные операторы, порядок которых не превосходит t, называется эллиптической в области Ω, если выполняется следующее условие.

Пусть $\xi = (\xi_1, ..., \xi_{n+1})$, $l_{ij}^0(x,\xi)$ – полиномы по ξ_j, получающиеся из $l_{ij}(x,\xi)$ отбрасыванием всех членов, степень которых ниже t. Условие эллиптичности системы в области Ω заключается в том, что в каждой точке $x \in \Omega$ при любом вещественном $\xi \neq 0$

$$L(x,\xi) = det\{l_{ij}^0(x,\xi)\} \neq 0. \qquad (1.222)$$

Это определение не охватывает многих систем, которые тоже естественно было бы назвать эллиптическими, например, систему, распадающуюся на отдельные эллиптические уравнения разных порядков. Рассмотрим более широкий класс систем, введенный А. Даглисом и Л. Ниренбергом в работе [40], который в частности, включает в себя и систему из отдельных эллиптических уравнений разных порядков.

Пусть в $n+1$ мерной ограниченной области Ω с границей $\partial\Omega$ задана система линейных дифференциальных уравнений

$$\Lambda\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \vec{u}(x) = \vec{f}(x). \qquad (1.223)$$

Здесь, $\vec{u}(x)$ и $\vec{f}(x)$ – m-мерные вектор-функции:

$$\vec{u} = (u_1(x), ..., u_m(x)), \ \ \vec{f} = (f_1(x), ..., f_m(x)),$$

а $\Lambda\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ – квадратная матрица, элементами которой являются дифференциальные операторы $l_{ik}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $i, k = 1, ..., m$.

Система (1.223) называется эллиптической, если существуют такие целые числа s_i и t_i, $i = 1, ..., m$, $\max\limits_i s_i = 0$, что

(i) порядок оператора $l_{ij}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ не превосходит $s_i + t_j$, а если $s_i + t_j < 0$, то $l_{ij} = 0$;

(ii) пусть $\xi = (\xi_1, ..., \xi_{n+1})$, $l_{ij}^0(x,\xi)$ – полином по переменным ξ_j, являющийся суммой тех членов полинома $l_{ij}(x,\xi)$, степень которых есть в точности $s_i + t_j$, а $\Lambda_0(x,\xi)$ – матрица, элементами которой являются $l_{ij}^0(x,\xi)$. Полином $L(x,\xi) = det\,\Lambda_0(x,\xi)$ не обращается в нуль в каждой точке $x \in \Omega \cup \partial\Omega$ и при любом вещественном $\xi \neq 0$.

Из условия $\max\limits_i s_i = 0$ и условия эллиптичности вытекает, что $t_i \geq 0$. Оператор $\Lambda_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ называется главной частью оператора $\Lambda\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$. Полиномы $l_{ij}^0(x,\xi)$ являются однородными полиномами степени $s_i + t_j$. Если степень l_{ij} меньше, чем $s_i + tj$, или если $s_i + t_j < 0$, то $l_{ij}^0 = 0$. Легко видеть, что $L(x,\xi)$ – однородный полином степени $\sum\limits_{i=1}^{m}(s_i + t_i)$.

Очевидно, что эллиптические, по Петровскому, системы являются частным случаем систем, эллиптических в смысле Даглиса-Ниренберга. Для них можно положить $s_i = 0$, $t_i = t$, где t – максимальный порядок дифференцирования в системе.

Типичным примером системы, эллиптической в смысле Даглиса-Ниренберга, но не в смысле Петровского, является система уравнений Навье-Стокса:

$$\triangle \vec{u} - \nabla p = 0, \;\; div\, \vec{u} = 0. \tag{1.224}$$

Пусть число пространственных переменных $n + 1 = 3$, тогда можно положить

$$s_1 = s_2 = s_3 = 0, \;\; t_1 = t_2 = t_3 = 2, \;\; s_4 = -1, \;\; t_4 = 1.$$

Характеристическая матрица системы имеет следующий вид:

$$\Lambda(\xi) = \Lambda_0(\xi) = \begin{pmatrix} \xi^2 & 0 & 0 & -\xi_1 \\ 0 & \xi^2 & 0 & -\xi_2 \\ 0 & 0 & \xi^2 & -\xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{pmatrix}, \;\; \xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \;\; det\, \Lambda(\xi) = \xi^6. \tag{1.225}$$

Ясно, что эта система содержит только старшие члены. Другие примеры систем подобного рода можно найти в работе [40].

Важно отметить, что свойство эллиптичности системы в смысле Даглиса-Ниренберга зависит от конкретного вида, в котором записана система, и может быть нарушено заменой неизвестных функций и некоторыми другими преобразованиями. Однако легко убедиться в том, что оно сохраняется при неособых преобразованиях координат.

Теперь поставим краевую задачу для системы (1.223). Пусть краевые условия задаются с помощью прямоугольной матрицы $B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ порядка $r \times m$, состоящей из дифференциальных операторов $B_{qj}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $q = 1, ..., r$, $j = 1, ..., m$, и имеют вид

$$B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \vec{u}\Big|_{\partial\Omega} = \vec{\Phi}(x) \tag{1.226}$$

или

$$\sum_{j=1}^{m} B_{qj}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_j\Big|_{\partial\Omega} = \Phi_q(x). \tag{1.227}$$

Прежде чем сформулировать те условия, которым должны удовлетворять операторы B_{qj}, введем еще несколько обозначений. Через $\hat{\Lambda}_0$ мы будем обозначать матрицу, взаимную для Λ_0, т. е. матрицу, элемент которой номера i, j является алгебраическим дополнением $L_{ji}(x, \xi)$ элемента $l^0_{ij}(x, \xi)$. Через ν обозначим вектор единичной внутренней нормали к поверхности $\partial\Omega$ в точке x с компонентами $(\nu_1, ..., \nu_{n+1})$, а через ζ — вектор, лежащий в касательной плоскости в точке x, т. е. такой, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} \nu_i \zeta_i = 0. \tag{1.228}$$

Предположим, что существуют целые числа σ_q, $q = 1, ..., r$, обладающие следующими свойствами:

(i) порядок операторов $B_{qj}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ не превосходит $\sigma_q + t_j$ (t_j – те же, что и выше), а если $\sigma_q + t_j < 0$, то $B_{qj} = 0$;

(ii) пусть $B_0(x, \xi)$ – матрица, составленная из полиномов $B^0_{qj}(x, \xi)$, каждый из которых является суммой тех членов полинома $B_{qj}(x, \xi)$, степень которых есть в точности $\sigma_q + t_j$, и пусть

$$C(x, \xi) = B_0(x, \xi)\hat{\Lambda}_0(x, \xi). \tag{1.229}$$

Требуется, чтобы выполнялось условие дополнительности:

Строки матрицы $C(x, \zeta + \tau\nu)$, состоящие из полиномов

$$C_{qk}(x, \zeta + \tau\nu) = \sum_{j=1}^{m} B^0_{qj}(x, \zeta + \tau\nu) L_{kj}(x, \zeta + \tau\nu) \tag{1.230}$$

по комплексному переменному τ, при всех $x \in \partial\Omega$ и всех касательных $\zeta \neq 0$ линейно независимы по модулю полинома

$$M^+(x, \zeta, \tau) = \prod_{s=1}^{r} (\tau - \tau^+_s(x, \zeta)), \tag{1.231}$$

где $\tau^+_s(x, \zeta)$ – корни полинома $L(x, \zeta + \tau\nu)$, рассматриваемого как функция τ, которые лежат в верхней полуплоскости комплексной плоскости τ и занумерованы с учетом их кратности (из условия эллиптичности вытекает, что с учетом кратности таких корней имеется r).

Последнему условию можно придать другую формулировку. Пусть $C'_{qk}(x, \zeta, \tau)$ - остатки от деления $C_{q,k}(x, \zeta + \tau\nu)$ на $M^+(x, \zeta, \tau)$. Они являются полиномами по τ, и их порядок не превышает $r - 1$. Пусть

$$C'_{qk}(x, \zeta, \tau) = \sum_{s=1}^{r} c^{(q,k)}_s(x, \zeta)\tau^{s-1}.$$

Составим следующую прямоугольную матрицу, состоящую из r строк и mr столбцов:

$$C' = \begin{pmatrix} c_1^{1,1}(x,\zeta) & ... & c_r^{1,1} & c_1^{1,2} & ... & c_r^{1,2} & ... & c_1^{(1,m)} & ... & c_r^{(1,m)} \\ c_1^{2,1}(x,\zeta) & ... & c_r^{2,1} & c_1^{2,2} & ... & c_r^{2,2} & ... & c_1^{(2,m)} & ... & c_r^{(2,m)} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ c_1^{r,1}(x,\zeta) & ... & c_r^{r,1} & c_1^{r,2} & ... & c_r^{r,2} & ... & c_1^{r,m} & ... & c_r^{r,m} \end{pmatrix}. \qquad (1.232)$$

Легко видеть, что условие дополнительности равносильно следующему условию: ранг матрицы C' в любой точке $x \in \partial\Omega$ при любом ненулевом векторе ζ, лежащем в касательной плоскости к $\partial\Omega$ в точке x, равен r.

В качестве примера рассмотрим первую краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса, ограничившись для простоты случаем $n = 2$ и полагая $p = u_3$:

$$\begin{gathered} \triangle u_1 - \tfrac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0,\ \triangle u_2 - \tfrac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0,\ \tfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \tfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0,\ = 0, \\ u_1|_{\partial\Omega} = \Phi_1,\ u_2|_{\partial\Omega} = \Phi_2. \end{gathered} \qquad (1.233)$$

Имеем

$$\Lambda = \Lambda_0 = \begin{pmatrix} \xi^2 & 0 & -\xi_1 \\ 0 & \xi^2 & -\xi_2 \\ \xi_1 & \xi_2 & 0 \end{pmatrix},\ det\,\Lambda = \xi^4,\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$s_1 = s_2 = 0,\ s_3 = -1,\ t_1 = t_2 = 2,\ t_3 = 1,\ \ \sigma_1 = \sigma_2 = -2,$$

$$\hat\Lambda = \begin{pmatrix} \xi_2^2 & -\xi_1\xi_2 & \xi_1\xi^2 \\ -\xi_1\xi_2 & \xi_1^2 & \xi_2\xi^2 \\ -\xi_1\xi^2 & -\xi_2\xi^2 & \xi^4 \end{pmatrix},\ \ C = B\hat\Lambda = \begin{pmatrix} \xi_2^2 & -\xi_1\xi_2 & \xi_1\xi^2 \\ -\xi_1\xi_2 & \xi_1^2 & \xi_2\xi^2 \end{pmatrix}.$$

Произведем теперь подстановку $\xi_i = \zeta_i + \tau\nu_i$, где $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ – вектор внутренней нормали в некоторой произвольной точке поверхности $\partial\Omega$ и $\zeta_1\nu_1 + \zeta_2\nu_2 = 0$. Пусть $\zeta^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2$, тогда $\xi^2 = \zeta^2 + \tau^2$, $M^+ = (\tau - i\zeta)^2$,

$$C = \begin{pmatrix} (\zeta_2 + \tau\nu_2)^2 & -(\zeta_1 + \tau\nu_1)(\zeta_2 + \tau\nu_2) & (\zeta_1 + \tau\nu_1)(\zeta^2 + \tau^2) \\ -(\zeta_1 + \tau\nu_1)(\zeta_2 + \tau\nu_2) & (\zeta_1 + \tau\nu_1)^2 & (\zeta_2 + \tau\nu_2)(\zeta^2 + \tau^2) \end{pmatrix}.$$

Образовав теперь остатки от деления каждого полинома на M^+, убедимся в том, что матрица C' в нашем случае имеет следующий вид:

$$\Bigg(\begin{matrix} 2\nu_2(i\nu_2\zeta + \zeta_2) & \nu_2^2\zeta^2 + \zeta_2^2 & -\nu_1\zeta_2 - \nu_2\zeta_1 - 2i\zeta\nu_2\nu_1 \\ -\nu_1\zeta_2 - \nu_2\zeta_1 - 2i\zeta\nu_1\nu_2 & -\nu_1\nu_2\zeta^2 - \zeta_1\zeta_2 & 2\nu_1(i\nu_1\zeta + \zeta_1) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -\nu_1^2\nu_2\zeta^2 - \zeta_1\zeta_2 & 2i\zeta(i\zeta\nu_1 + \zeta_1) & 2\zeta^2(i\zeta\nu_1 + \zeta_1) \\ \nu_1^2\zeta^2 + \zeta_1^2 & 2i\zeta(i\zeta\nu_2 + \zeta_2) & 2\zeta^2(i\zeta\nu_2 + \zeta_2) \end{matrix}\Bigg).$$

Определитель, составленный из второго и четвертого столбцов, равен

$$(\zeta_2\nu_1 - \zeta_1\nu_2)^2\zeta^2 = \zeta^4.$$

Таким образом, первая краевая задача для системы Навье-Стокса удовлетворяет условию дополнительности.

Справедливы следующие утверждения об априорных оценках решений задачи (1.223), (1.226) [34].

Теорема 1.137. *Пусть l – нецелое положительное число, удовлетворяющее условию*

$$l > max(0, \sigma_{max}), \;\; \sigma_{max} = max(\sigma_1, ..., \sigma_r). \tag{1.234}$$

Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу $C^{l+t_{max}}$, $t_{max} = max(t_1, ..., t_m)$, коэффициенты операторов $l_{ij}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ – классам $C^{l-s_i}(\Omega)$ и операторов $B_{qj}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ – классам $C^{l-\sigma_q}(\partial\Omega)$. Тогда всякое решение задачи (1.223), (1.226) с $u_j \in C^{l+t_j}(\Omega)$ удовлетворяет неравенству

$$\sum_{j=1}^{m} \|u_j\|_{C^{l+t_j}(\Omega)} \leq C\left(\sum_{i=1}^{m} \|f_i\|_{C^{l-s_i}(\Omega)} + \sum_{q=1}^{r} \|\Phi_q\|_{C^{l+\sigma_q}(\partial\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} max|u_j|\right). \tag{1.235}$$

Теорема 1.138. *Пусть l – неотрицательное целое число, удовлетворяющее условию $l > \sigma_{max}$ и $p > 1$. Пусть $\partial\Omega \in C^{l+t_{max}}$, коэффициенты операторов $l_{ij}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ непрерывно дифференцируемы $l - s_i$ раз, а коэффициенты операторов $B_{qj}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ принадлежат классам $C^{l-\sigma_q-\frac{1}{p}+\varepsilon}(\partial\Omega)$ со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$. Тогда всякое решение задачи (1.223), (1.226) с $u_j \in W^{l+t_j,p}(\Omega)$ удовлетворяет неравенству*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} \|u_j\|_{W^{l+t_j,p}(\Omega)} \leq C\Big(\sum_{i=1}^{m} \|f_i\|_{W^{l-s_i,p}(\Omega)} + \sum_{q=1}^{r} \|\Phi_q\|_{W^{l-\sigma_q,p}(\partial\Omega)} + \\ + \sum_{l+t_j>0} \|u_j\|_{L^p(\Omega)}\Big). \end{aligned} \tag{1.236}$$

Отметим, что если решение задачи (1.223), (1.226) единственно в классе V_l или $V_{l,p}$, то члены $max|u_j|$ и $\|u_j\|_{L^p(\Omega)}$ в (1.235) и (1.236) можно опустить [34].

Введем пространства

$$H_l = \prod_{i=1}^{m} C^{l-s_i}(\Omega) \times \prod_{q=1}^{r} C^{l-\sigma_q}(\partial\Omega), \quad V_l = \prod_{j=1}^{m} C^{l+t_j}(\Omega) \tag{1.237}$$

и запишем задачу (1.223), (1.226) в виде

$$A\vec{u} = \vec{h}, \tag{1.238}$$

где $\vec{u}(x) \in V_l$, $\vec{h} = (f_1, ..., f_m, \Phi_1, ..., \Phi_r) = [\vec{f}, \vec{\Phi}] \in H_l$ и A – оператор, сопоставляющий каждому элементу $\vec{u} \in V_l$ элемент $[\Lambda\vec{u}, B\vec{u}|_{\partial\Omega}] \in H_l$. При условиях теоремы 1.137 оператор A является ограниченным оператором, действующим из V_l в H_l, областью его определения является все пространство V_l. Справедливо утверждение [34].

Теорема 1.139. *Если выполняются условия теоремы 1.137, то область значений оператора A образует подпространство с конечным дефектом в пространстве H_l. Множество нулей оператора A (т. е. таких векторов $\vec{u}$, что $A\vec{u} = 0$) образует конечномерное подпространство в пространстве V_l.*

Аналогичный результат имеет место для пространств $W^{l,p}$. Пусть

$$H_{l,p} = \prod_{j=1}^{m} W^{l-s_j,p}(\Omega) \times \prod_{q=1}^{r} W^{1-\sigma_q-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega), \quad V_{l,p} = \prod_{j=1}^{m} W^{l+t_j,p}(\Omega). \tag{1.239}$$

Оператор A является ограниченным оператором из пространства $V_{l,p}$ в пространство $H_{l,p}$ и имеет место [34]

Теорема 1.140. *Если выполняются условия теоремы 1.138, то область значений оператора A образует подпространство с конечным дефектом в пространстве $H_{l,p}$ и множество нулей оператора A образует конечномерное подпространство в пространстве $V_{l,p}$.*

В заключение, рассмотрим еще один класс эллиптических систем дифференциальных уравнений, введенный М. И. Вишиком в работе [4]. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим систему уравнений

$$\Lambda\vec{u} = \sum_{|i|,\,|j| \leq m} (-1)^{|i|} D^i(A^{(i,j)}(x) D^j \vec{u}) = \vec{f}, \tag{1.240}$$

в которой $D^i = \frac{\partial^s}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_s}}$, $i = (i_1, ..., i_s)$, $|i| = s$, $\vec{u}$ и $\vec{f}$ – векторы $(u_1, ..., u_N)$ и $(f_1, ..., f_N)$, а $A^{(i,j)}(x)$ – квадратные матрицы порядка N, причем, $A^{(i,j)}(x) = A^{(j,i)}(x)$, $|i| = |j| = m$. Система (1.240) называется сильно эллиптической в точке $x \in \overline{\Omega}$, если для любого вектора $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_N) \neq 0$ и любых чисел $\xi_1, ..., \xi_n$ с $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 \neq 0$ квадратичная форма

$$A(x;\xi)\zeta \cdot \zeta = \sum_{|i|,\,|j|=m} A^{(i,j)}(x)\xi_{i_1}...\xi_{i_m}\xi_{j_1}...\xi_{j_m}\zeta \cdot \zeta > 0. \tag{1.241}$$

Здесь символом $\eta \cdot \zeta$ обозначено скалярное произведение N-мерных векторов, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{N} \eta_i \zeta_i$.

Неравенство (1.241) накладывает ограничение только на симметрическую часть матриц $A^{(i,j)}$, так как если представить каждую матрицу $A^{(i,j)}$ в виде

$$A^{(i,j)} = \hat{A}^{(i,j)} + \tilde{A}^{(i,j)},$$

где $\hat{A}^{(i,j)} = \frac{1}{2}A^{(i,j)} + \frac{1}{2}A^{(i,j)^*}$ – симметрическая часть $A^{(i,j)}$, а $\tilde{A}^{(i,j)} = \frac{1}{2}A^{(i,j)} - \frac{1}{2}A^{(i,j)^*}$ – кососимметрическая часть $A^{(i,j)}$ (звездочка над матрицей означает ее транспонирование), то

$$A(x,\xi)\zeta \cdot \zeta = \hat{A}(x,\xi)\zeta \cdot \zeta.$$

Отметим, что класс общих эллиптических систем, выделенный И. Г. Петровским, и тем более системы, эллиптические в смысле Даглиса-Ниренберга, обширнее класса сильно эллиптических систем, определенного М. И. Вишиком.

Нетрудно показать [4], что если $A^{(i,j)}$ при $|i| = |j| = m$ не зависят от x, то из (1.241) вытекает справедливость неравенства

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{|i|,\,|j|=m} A^{(i,j)} D^i\vec{u} \cdot D^j\vec{u}\, dx \geq \nu \int\limits_{\Omega} \sum_{|i|=m} (D^i\vec{u})^2\, dx, \;\; \nu = const > 0, \tag{1.242}$$

для любой вектор-функции $\vec{u}$, принадлежащей $W_0^{2,m}(\Omega)$. Если же $A^{(i,j)}$ зависят от x и являются непрерывными функциями $x \in \overline{\Omega}$, то для любой функции $\vec{u}(x) \in W_0^{2,m}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{|i|,\,|j|=m} A^{(i,j)}(x) D^i\vec{u} \cdot D^j\vec{u}\, dx \geq \nu \int\limits_{\Omega} \sum_{|i|=m} (D^i\vec{u})^2\, dx - \mu_1 \int\limits_{\Omega} \vec{u}^2\, dx \tag{1.243}$$

с некоторыми $\nu = const > 0$ и $\mu_1 = const \geq 0$. Мы не будем приводить здесь доказательство этого факта, а положим его в основу определения сильной эллиптичности системы (1.240).

Рассмотрим краевые условия Дирихле для системы (1.240):

$$\vec{u}\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = ... = \frac{\partial^{m-1}\vec{u}}{\partial n^{m-1}}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.244}$$

Обобщенное решение $\vec{u}(x)$ задачи (1.240), (1.244) из класса $W^{2,m}(\Omega)$ есть элемент $W_0^{2,m}(\Omega)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\Lambda(\vec{u}, \vec{\eta}) = \int\limits_{\Omega} \sum_{|i|,|j|\leq m} A^{(i,j)} D^j \vec{u} D^i \vec{\eta}\, dx = \int\limits_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{\eta}\, dx \;\; \forall\, \vec{\eta} \in W_0^{2,m}(\Omega). \tag{1.245}$$

Справедливо следующее утверждение [15].

Теорема 1.141. *Задача (1.240), (1.244) разрешима по Фредгольму, если $\vec{f} \in L^2(\Omega)$, элементы матриц $A^{(i,j)}(x)$ суть ограниченные в Ω функции и выполнено условие (1.243).*

3. Уравнение $div\, \vec{u} = f$. Рассмотрим задачу

$$div\, \vec{u} = f \text{ в } \Omega, \;\; \vec{u}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.246}$$

для произвольной функции f, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область. Ясно, что задача (1.246) имеет много решений, которые могут быть построены различными способами. Здесь мы рассмотрим один результат, предложенный в работе [2] и развитый в работах [45], [49], который будет использоваться нами в разделе 2.2 второй главы.

Теорема 1.142. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная Липшицева область. Тогда*

(i) Существует линейное отображение

$$B : \{f |\; f \in C_0^\infty(\Omega),\; \int\limits_{\Omega} f\, dx = 0\} \to C_0^\infty(\Omega) \tag{1.247}$$

такое, что $div\, B[f] = f$, т.е. $\vec{u} = B[f]$ - решение (1.246).

(ii) Справедлива оценка

$$\|B[f]\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} \;\forall\; 1 < p < \infty,\; k = 0, 1, ..., \tag{1.248}$$

в частности, оператор B может быть расширен единственным образом как линейный ограниченный оператор

$$B : \{f|\ f \in L^p(\Omega),\ \int\limits_\Omega f\,dx = 0\} \to W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.249}$$

(iii) Если $f \in L^p(\Omega)$, $\int\limits_\Omega f\,dx = 0$ *и, кроме того,* $f = div\,\vec{g}$, *где* $\vec{g} \in E_0^{q,p}(\Omega)$, $1 < q < \infty$, *то*

$$\|B[f]\|_{L^q(\Omega)} \le C\|\vec{g}\|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.250}$$

Здесь $E_0^{q,p}(\Omega)$ *– замыкание* $C_0^\infty(\Omega)$ *в пространстве* $E^{q,p}(\Omega) = \{\vec{u} \in L^q(\Omega)|\ div\,\vec{u} \in L^p(\Omega)\}$.

(iv) Оператор B может быть расширен единственным образом как линейный ограниченный оператор

$$B : [\dot{W}^{1,p'}(\Omega)]^* = \{f \in [W^{1,p'}(\Omega)]^*|\ \langle f, 1\rangle = 0\} \to L^p(\Omega) \tag{1.251}$$

так, что

$$-\int\limits_\Omega B[f]\cdot\nabla v\,dx = \langle f, v\rangle_{\{[W^{1,p'}]^*;W^{1,p'}\}(\Omega)}\ \forall\ v \in W^{1,p'}(\Omega), \tag{1.252}$$

$$\|B[f]\|_{L^p(\Omega)} \le C\|f\|_{[W^{1,p'}(\Omega)]^*}. \tag{1.253}$$

Здесь функция $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *связана с линейной формой в* $[W^{1,p'}(\Omega)]^*$ *через стандартную формулу Рисса*

$$\langle f, v\rangle_{\{[W^{1,p'}]^*;W^{1,p'}\}(\Omega)} = \int\limits_\Omega fv\,dx\ \forall\ v \in W^{1,p'}(\Omega). \tag{1.254}$$

Замечание. *Так как оператор B линеен, то нетрудно проверить, что*

$$\partial_t B[f](t,x) = B[\partial_t f](t,x)\ \text{для почти всех}\ (t,x) \in (0,T)\times\Omega, \tag{1.255}$$

если

$$\partial_t f,\ f \in L^p((0,T)\times\Omega),\ \int\limits_\Omega f(t,\cdot)\,dx = 0\ \text{для почти всех}\ t \in (0,T). \tag{1.256}$$

Глава 2. Корректность первой краевой задачи для уравнений баротропного движения смесей вязких сжимаемых жидкостей

В данной главе доказывается теорема существования слабых обобщенных решений первой краевой задачи для дифференциальных уравнений, описывающих установившееся баротропное движение двухкомпонентных смесей вязких сжимаемых жидкостей в общем случае трех пространственных переменных.

2.1. Постановка задачи и основные результаты

Рассматривается задача об установившемся баротропном движении двухкомпонентной смеси вязких сжимаемых жидкостей в следующей постановке.

Задача А. Смесь занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ евклидова пространства точек $x = (x_1, x_2, x_3)$, граница $\partial\Omega$ которой принадлежит классу C^2. Требуется найти векторные поля скоростей $\vec{u}^{(i)}$, $i = 1, 2$ и скалярные поля плотностей ρ_i, $i = 1, 2$ составляющих смеси, удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = 0 \text{ в } \Omega,\ i = 1, 2, \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\vec{u}^{(j)} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}) + \bigtriangledown p_i = \vec{J}^{(i)} + \rho_i \vec{f}^{(i)} \text{ в } \Omega,\ i = 1, 2. \tag{2.2}$$

Здесь операторы

$$L_{ij} = -\mu_{ij}\triangle - (\lambda_{ij} + \mu_{ij})\nabla\operatorname{div},\ \ i, j = 1, 2,$$

$$\lambda_{12} + 2\mu_{12} = 0$$

определены так, что для некоторой постоянной $C_0 > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} L_{ij}\vec{u}^{(j)} \cdot \vec{u}^{(i)}\, dx \geqslant C_0 \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla \vec{u}^{(i)}|^2\, dx. \tag{2.3}$$

Будем предполагать, что давление $p_i = \rho_i^{\gamma}$, $i = 1, 2$, где $\gamma > 1$ – показатель адиабаты, а интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси $\vec{J}^{(i)} = (-1)^{i+1} a(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)})$, $i = 1, 2$, где $a > 0$ – заданная постоянная. Массовые силы $\vec{f}^{(1)}$ и $\vec{f}^{(2)}$ считаются достаточно гладкими векторными полями. Уравнения (2.1)-(2.2) должны быть дополнены краевыми условиями. Наиболее распространенными являются условия прилипания

$$\vec{u}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \;\; i = 1, 2, \tag{2.4}$$

которые означают, что граница $\partial\Omega$ области течения Ω является неподвижной твердой стенкой. В стационарном случае уравнения и краевые условия не определяют течение единственным образом. Поэтому к уравнениям и граничным условиям необходимо добавить условия нормировки. Будем искать решение, удовлетворяющее дополнительным соотношениям

$$\int\limits_{\Omega} \rho_i\, dx = M_i > 0, \; i = 1, 2, \tag{2.5}$$

где M_i – заданные постоянные. Соотношения (2.5) означают, что общая часть массы каждой из компонент смеси фиксирована.

Отметим, что неравенство (2.3) (с учетом краевых условий (2.4)), в терминах коэффициентов вязкости λ_{ij} и μ_{ij}, эквивалентно следующим условиям

$$\mu_{11} > 0, \; \mu_{22} > 0, \; \lambda_{11} + 2\mu_{11} > 0, \; \lambda_{22} + 2\mu_{22} > 0,$$
$$4\mu_{11}\mu_{22} - (\mu_{12} + \mu_{21})^2 > 0,$$
$$4(\lambda_{11} + 2\mu_{11})(\lambda_{22} + 2\mu_{22}) - (\lambda_{21} + 2\mu_{21})^2 > 0.$$

Кроме того, условие (2.3) обеспечивает выполнение основной энергетической оценки для системы уравнений (2.1)-(2.2). Действительно, умножая обе части (2.2) скалярно на $\vec{u}^{(i)}$, $i = 1, 2$ и интегрируя (с учетом уравнений (2.1) и граничных условий (2.4)) результат по области Ω, приходим к энергетическому неравенству

$$C_0 \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla \vec{u}^{(i)}\,|^2\, dx + \, a \int\limits_{\Omega} |\, \vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)}\,|^2\, dx \leq \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i \vec{f}^{(i)} \cdot \vec{u}^{(i)}\, dx,$$

которое обеспечивает термомеханическую непротиворечивость системы уравнений (2.1)-(2.2).

Рассматриваемая модель смеси является некоторым обобщением классической модели Навье-Стокса динамики вязкого сжимаемого баротропного газа и, естественно, немногочисленные работы о корректности многомерных моделей смесей сжимаемых жидкостей и газов появились после определенного прогресса, достигнутого для уравнений Навье-Стокса.

Начало нелокальной теории двух- и трехмерных уравнений динамики вязкого газа было положено в работах [53]-[57], в которых была доказана глобальная разрешимость основных краевых задач для уравнений Навье-Стокса сжимаемого баротропного газа. Дальнейшее существенное продвижение в теории было проведено в работах [41]-[44].

Одной из первых работ, посвященных исследованию глобальной разрешимости краевых задач для многомерных уравнений движения смесей вязких сжимаемых жидкостей, является работа [46], в которой доказана разрешимость задачи Коши в $\mathbb{R}^3$ для системы Стокса без конвективных членов в случае общей зависимости давления от плотностей составляющих смеси, т. е. рассматривалась система уравнений вида

$$\mathrm{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = 0,\ i = 1, 2, \tag{2.6}$$

$$-\mathrm{div}\, P^{(i)} = \rho_i \vec{f}^{(i)} + \vec{J}^{(i)},\ i = 1, 2, \tag{2.7}$$

где $p_i = \rho_i(\rho_1 + \rho_2)^{\gamma-1}$, $i = 1, 2$. В [47] получен результат о единственности решений задачи Коши в предположении, что массовые силы $\vec{f}^{(i)}$ и члены, учитывающие обмен импульсом между различными компонентами смеси, $\vec{J}^{(i)}$ равны нулю.

В работе [48] рассматривалась краевая задача для квази-стационарной системы уравнений смеси

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = 0,\ i = 1, 2, \tag{2.8}$$

$$-\mathrm{div}\, P^{(i)} = \vec{J}^{(i)},\ i = 1, 2, \tag{2.9}$$

но со специальными граничными условиями

$$\vec{u}^{(i)} \cdot \vec{n} = 0,\ \ \vec{n} \times \mathrm{rot}\vec{u}^{(i)} = 0,\ i = 1, 2, \tag{2.10}$$

оправданными только с математической точки зрения.

Модели, описывающие движения смесей вязких сжимаемых жидкостей с уравнениями состояния $p_i = p_i(\rho_i)$, $i = 1, 2$ в одномерном случае изучались в работах [7], [9], [23]-[26].

В работах [12]-[14], [29] проведено исследование первой краевой задачи для многомерной системы уравнений (2.1), (2.2) с учетом конвективных слагаемых. В частности, установлена теорема существования слабых обобщенных решений вышеупомянутой задачи. Этот результат излагается в данной главе.

2.1.1. Определение слабого решения

Введем понятие слабого обобщенного решения задачи А.

Прежде всего отметим, что специфика уравнений неразрывности (2.1) приводит к определению слабого решения уравнений (2.1)-(2.2) несколько отличному от стандартного определения обобщенного решения для уравнений математической физики (см., например, [28], [43]). Заметим, что для любых непрерывно дифференцируемых функций $G_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ гладкие решения ρ_i, $i = 1, 2$ уравнений (2.1) удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{div}(G_i(\rho_i)\vec{u}^{(i)}) + (G_i{}'(\rho_i)\rho_i - G_i(\rho_i)) \operatorname{div} \vec{u}^{(i)} = 0, \;\; i = 1, 2, \qquad (2.11)$$

которые называются ренормализованной формой уравнений (2.1), а процедура перехода от (2.1) к бесконечной системе уравнений вида (2.11) называется ренормализацией. Функции ρ_i, $i = 1, 2$, удовлетворяющие этой системе, называются ренормализованными решениями уравнений (2.1).

Определение 2.1 *Обобщенным решением краевой задачи А называются неотрицательные функции $\rho_i \in L^1(\Omega)$, $i = 1, 2$ и векторные поля $\vec{u}^{(i)} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(1)

$$\int\limits_{\Omega} \rho_i \, dx = M_i, \; \rho_i \vec{u}^{(i)} \in L^1(\Omega), \; p_i(\rho_i) \in L^1_{loc}(\Omega), \; \rho_i |\vec{u}^{(i)}|^2 \in L^1_{loc}(\Omega), \; i = 1, 2;$$

(2) *для любых дифференцируемых функций G_i с ограниченными производными $G_i' \in C(R)$, $i = 1, 2$ и произвольных функций $\psi_i \in C^1(\Omega)$, $i = 1, 2$ выполняются интегральные тождества*

$$\int\limits_{\Omega} \Big(G_i(\rho_i)\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla \psi_i + (G_i(\rho_i) - G_i'(\rho_i)\rho_i) \, \psi_i \, div \vec{u}^{(i)} \Big) \, dx = 0, \; i = 1, 2;$$

(3) *для любых векторных полей $\vec{\varphi}^{(i)} \in C_0^\infty(\Omega)$, $i = 1, 2$ выполняются интегральные тождества*

$$\sum_{j=1}^{2} \left(\mu_{ij} \int\limits_{\Omega} \nabla \vec{u}^{(j)} : \nabla \vec{\varphi}^{(i)} \, dx + (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \int\limits_{\Omega} div \vec{u}^{(j)} div \vec{\varphi}^{(i)} \, dx \right) -$$

$$-\int\limits_{\Omega} \rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)} : \nabla \vec{\varphi}^{(i)}\, dx = \int\limits_{\Omega} \rho_i^{\gamma}\, div \vec{\varphi}^{(i)}\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} (\vec{J}^{(i)} + \rho_i \vec{f}^{(i)}) \cdot \vec{\varphi}^{(i)}\, dx, \ i = 1, 2.$$

Основной результат настоящей главы формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 2.2 *Для любых* $\vec{f}^{(i)} \in C(\Omega), \ i = 1, 2, \ \gamma > 3$ *краевая задача A имеет по крайней мере одно обобщенное решение.*

2.1.2. Формулировка вспомогательной задачи

Обобщенное решение задачи A будет получено как предел решений следующей регуляризованной краевой задачи:

$$-\varepsilon \Delta \rho_i^{\varepsilon} + \operatorname{div}(\rho_i^{\varepsilon} \vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}) + \varepsilon \rho_i^{\varepsilon} = \varepsilon \frac{M_i}{|\,\Omega|} \text{ в } \Omega, \ i = 1, 2, \tag{2.12}$$

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{2} L_{ij} \vec{u}_{\varepsilon}^{(j)} + \frac{\varepsilon}{2} \rho_i^{\varepsilon} \vec{u}_{\varepsilon}^{(i)} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{M_i}{|\Omega|} \vec{u}_{\varepsilon}^{(i)} + \frac{1}{2} \rho_i^{\varepsilon} (\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)} \cdot \nabla) \vec{u}_{\varepsilon}^{(i)} + \\ + \frac{1}{2} \operatorname{div}(\rho_i^{\varepsilon} \vec{u}_{\varepsilon}^{(i)} \otimes \vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}) + \bigtriangledown p_i^{\varepsilon} = \vec{J}_{\varepsilon}^{(i)} + \rho_i^{\varepsilon} \vec{f}^{(i)} \text{ в } \Omega, \ i = 1, 2, \end{gathered} \tag{2.13}$$

$$\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)} = 0, \ \ \nabla \rho_i^{\varepsilon} \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \ i = 1, 2, \tag{2.14}$$

$$\int\limits_{\Omega} \rho_i^{\varepsilon}\, dx = M_i, \ i = 1, 2, \tag{2.15}$$

которую условимся называть *задачей* A_{ε}. Здесь $p_i^{\varepsilon} = (\rho_i^{\varepsilon})^{\gamma}$, $\vec{J}_{\varepsilon}^{(i)} = (-1)^{i+1} a(\vec{u}_{\varepsilon}^{(2)} - \vec{u}_{\varepsilon}^{(1)}), \ i = 1, 2, \ |\,\Omega| = meas\,(\Omega), \ \varepsilon \in (0, 1], \ \vec{n}$ — вектор единичной внешней нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω. Энергетическое неравенство для краевой задачи A_ε имеет следующий вид:

$$C_0\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla\vec{u}_\varepsilon^{(i)}|^2\,dx+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i^\varepsilon|\vec{u}_\varepsilon^{(i)}|^2\,dx+\frac{\varepsilon}{2}\frac{M_i}{|\Omega|}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}|\vec{u}_\varepsilon^{(i)}|^2\,dx+$$

$$+\varepsilon\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}(\rho_i^\varepsilon)^\gamma\,dx+\varepsilon\gamma\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-2}|\nabla\rho_i^\varepsilon|^2\,dx+$$

$$+\,a\int\limits_{\Omega}|\,\vec{u}_\varepsilon^{(1)}-\vec{u}_\varepsilon^{(2)}\,|^2\,dx\le\varepsilon\frac{M_i}{|\Omega|}\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-1}\,dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i^\varepsilon\vec{f}^{(i)}\cdot\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\,dx.$$

Сначала доказывается существование сильного обобщенного решения задачи A_ε. Затем совершается предельный переход в слабом смысле в уравнениях (2.12)-(2.13) при $\varepsilon\to 0$. Основная проблема здесь связана с предельным переходом в последовательности функций давления $p_i^\varepsilon=(\rho_i^\varepsilon)^\gamma$, $i=1,2$ при $\varepsilon\to 0$. Можно показать, что $\rho_i^\varepsilon\to\rho_i$ слабо в $L^{2\gamma}(\Omega)$, $p_i^\varepsilon\to\overline{p}_i$ слабо в $L^2(\Omega)$, $i=1,2$. Так как априори известно, что последовательности ρ_i^ε, $i=1,2$ только интегрируемы в пространстве $L^{2\gamma}(\Omega)$, $\gamma>3$, равенства $\overline{p}_i=(\rho_i)^\gamma$, $i=1,2$ далеко не очевидны. Для доказательства данных равенств обобщается техника, развитая в работе [43] для классической модели Навье-Стокса, связанная с регулярностью так называемых "эффективных вязких потоков" компонент смеси (см. раздел 2.3).

2.2. Существование сильного обобщенного решения вспомогательной задачи. Априорные оценки

В данном разделе докажем существование сильного обобщенного решения краевой задачи A_ε.

Определение 2.3 *Сильным обобщенным решением задачи A_ε называются неотрицательные функции $\rho_i^\varepsilon\in W^{2,q}(\Omega)$ $\forall\ 1\le q<\infty$, $\int\limits_{\Omega}\rho_i^\varepsilon\,dx=M_i$, $i=1,2$ и векторные поля $\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\in W^{2,q}(\Omega)$ $\forall\ 1\le q<\infty$, $i=1,2$ такие, что уравнения* (2.12), (2.13) *выполнены п.в. в Ω и п.в. на $\partial\Omega$ – краевые условия* (2.14).

Теорема 2.4 *Для любых $\vec{f}^{(i)}\in C(\Omega)$, $i=1,2$, $\gamma>3$ краевая задача A_ε имеет по крайней мере одно сильное обобщенное решение, которое* *удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\|\rho_i^\varepsilon\|_{L^{2\gamma}(\Omega)} + \|\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \|\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\|_{L^{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)}\right) \le C, \tag{2.16}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от $\|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}$, λ_{ij}, μ_{ij}, γ, Ω, M_i, a и не зависит от параметра ε.

Доказательство. Предположим, что $\rho_i^\varepsilon \ge 0$, $\vec{u}_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1, 2$, принадлежащие $W^{2,q}(\Omega)$ $\forall\ 1 \le q < \infty$, удовлетворяют (2.12)-(2.15). Докажем сначала, что при этом имеет место неравенство (2.16), не зависящее от параметра ε. Умножая обе части уравнений (2.13) скалярно на $\vec{u}^{(i)}$, $i = 1, 2$, интегрируя результат по области Ω и суммируя по $i = 1, 2$, получим

$$C_0\sum_{i=1}^{2}\int\limits_\Omega |\nabla\vec{u}^{(i)}|^2\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_\Omega \rho_i|\vec{u}^{(i)}|^2\,dx + \varepsilon\frac{1}{2|\Omega|}\sum_{i=1}^{2}M_i\int\limits_\Omega |\vec{u}^{(i)}|^2\,dx +$$

$$+\varepsilon\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_\Omega \rho_i^\gamma\,dx + \varepsilon\gamma\sum_{i=1}^{2}\int\limits_\Omega \rho_i^{\gamma-2}|\nabla\rho_i|^2\,dx + a\int\limits_\Omega |\,\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)}\,|^2\,dx \le$$

$$\le \varepsilon\frac{1}{|\Omega|}\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{2}M_i\int\limits_\Omega \rho_i^{\gamma-1}\,dx + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_\Omega \rho_i\vec{f}^{(i)}\cdot\vec{u}^{(i)}\,dx. \tag{2.17}$$

Здесь и далее, для простоты записи опустим у решения задачи (2.12)-(2.15) индекс ε. В силу ограниченности вложения $W_0^{1,2}(\Omega)$ в $L^6(\Omega)$, из (2.17) следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{2}\|\vec{u}^{(i)}\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le C\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^2_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)} + C, \tag{2.18}$$

с постоянной C, зависящей только от $\|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}$, λ_{ij}, μ_{ij}, γ, Ω и M_i, но не зависящей от параметра ε.

Для вывода других оценок решений задачи (2.12)-(2.15) будем использовать линейный оператор

$$B : \left\{ g \in L^2(\Omega)\ |\ \int\limits_\Omega g\,dx = 0 \right\} \to W_0^{1,2}(\Omega),$$

обладающий следующими свойствами:

a) функция $\vec{v} = B[g]$ - решение задачи $\operatorname{div}\vec{v} = g$ в Ω, $\vec{v} = 0$ на $\partial\Omega$;

b) $\|B[g]\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C\,\|g\|_{L^2(\Omega)}$.

Заметим далее, что из уравнений (2.13) следуют интегральные соотношения

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\mu_{ij}\int\limits_{\Omega}\nabla\vec{u}^{(j)}:\nabla\vec{\varphi}^{(i)}\,dx+(\lambda_{ij}+\mu_{ij})\int\limits_{\Omega}\mathrm{div}\vec{u}^{(j)}\mathrm{div}\vec{\varphi}^{(i)}\,dx\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i\vec{u}^{(i)}\cdot\vec{\varphi}^{(i)}\,dx+\varepsilon\frac{M_i}{2|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\vec{u}^{(i)}\cdot\vec{\varphi}^{(i)}\,dx+ \tag{2.19}$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i(\vec{u}^{(i)}\cdot\nabla)\vec{u}^{(i)}\cdot\vec{\varphi}^{(i)}\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i\vec{u}^{(i)}\otimes\vec{u}^{(i)}:\nabla\vec{\varphi}^{(i)}\,dx-$$

$$-\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\gamma}\,\mathrm{div}\vec{\varphi}^{(i)}\,dx=\int\limits_{\Omega}(\vec{J}^{(i)}+\rho_i\vec{f}^{(i)})\cdot\vec{\varphi}^{(i)}\,dx,$$

справедливые для любых векторных полей $\vec{\varphi}^{(i)}\in W_0^{1,2}(\Omega)$, $i=1,2$. Возьмем в качестве пробных функций $\vec{\varphi}^{(i)}$ в тождествах (2.19) такие, что $\vec{\varphi}^{(i)}=B[g_i]$, где $g_i=\rho_i^{\gamma}-\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\gamma}\,dx$, $i=1,2$, другими словами

$$\mathrm{div}\,\vec{\varphi}^{(i)}=\rho_i^{\gamma}-\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\gamma}\,dx\ \text{в}\ \Omega,\quad \vec{\varphi}^{(i)}=0\ \text{на}\ \partial\Omega,\quad i=1,2.$$

В результате получаем соотношения

$$\int\limits_{\Omega}\rho_i^{2\gamma}\,dx=\frac{1}{|\,\Omega|}\left(\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\gamma}\,dx\right)^2+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i\vec{u}^{(i)}\cdot\vec{\varphi}^{(i)}\,dx+$$

$$+\varepsilon\frac{M_i}{2|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\vec{u}^{(i)}\cdot\vec{\varphi}^{(i)}\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i(\vec{u}^{(i)}\cdot\nabla)\vec{u}^{(i)}\cdot\vec{\varphi}^{(i)}\,dx+ \tag{2.20}$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\left(\mu_{ij}\int\limits_{\Omega}\nabla\vec{u}^{(j)}:\nabla\vec{\varphi}^{(i)}\,dx+(\lambda_{ij}+\mu_{ij})\int\limits_{\Omega}\mathrm{div}\vec{u}^{(j)}\mathrm{div}\vec{\varphi}^{(i)}\,dx\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i\vec{u}^{(i)}\otimes\vec{u}^{(i)}:\nabla\vec{\varphi}^{(i)}\,dx-\int\limits_{\Omega}\vec{J}^{(i)}\cdot\vec{\varphi}^{(i)}\,dx-$$

$$-\int\limits_{\Omega} \rho_i \vec{f}^{(i)} \cdot \vec{\varphi}^{(i)}\, dx,\ \ i = 1, 2.$$

В силу неравенства $\|\vec{\varphi}^{(i)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C(|\Omega|)\|\rho_i\|^{\gamma}_{L^{2\gamma}(\Omega)}$ из (2.20) следует, что при $\gamma > 3$

$$\begin{gathered}\|\rho_i\|^{2\gamma}_{L^{2\gamma}(\Omega)} \leq C\|\rho_i\|^{4\gamma\frac{\gamma-1}{2\gamma-1}}_{L^{2\gamma}(\Omega)} + C\Big(\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}\|\vec{u}^{(i)}\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \\ +\|\vec{u}^{(1)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \|\vec{u}^{(2)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}\Big)\|\rho_i\|^{\gamma}_{L^{2\gamma}(\Omega)},\ \ i = 1, 2,\end{gathered} \tag{2.21}$$

где постоянная $C = C\left(\|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i, a\right)$ не зависит от параметра ε. Из (2.21), в свою очередь получаем, что

$$\begin{gathered}\|\rho_i\|^{\gamma}_{L^{2\gamma}(\Omega)} \leq C\|\rho_i\|^{\gamma\frac{2\gamma-3}{2\gamma-1}}_{L^{2\gamma}(\Omega)} + C\|\vec{u}^{(i)}\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)} + \\ +C\sum_{j=1}^{2}\|\vec{u}^{(j)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + C,\ \ i = 1, 2.\end{gathered} \tag{2.22}$$

Используя неравенства

$$\|\rho_i\|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)} \leq C(M_i, \gamma)\|\rho_i\|^{\frac{\gamma}{3(2\gamma-1)}}_{L^{2\gamma}(\Omega)},\ \ i = 1, 2,$$

получаем теперь из (2.18) и (2.22) оценку

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^{\gamma}_{L^{2\gamma}(\Omega)} \leq C\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^{\gamma\frac{2\gamma-3}{2\gamma-1}}_{L^{2\gamma}(\Omega)} + C\left[\sum_{j=1}^{2}\|\rho_j\|^{\frac{2\gamma}{3(2\gamma-1)}}_{L^{2\gamma}(\Omega)}\right]\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)} \\ +C\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)} + C\sum_{j=1}^{2}\|\rho_j\|^{\frac{\gamma}{3(2\gamma-1)}}_{L^{2\gamma}(\Omega)} + C,\end{gathered} \tag{2.23}$$

где постоянная C зависит только от $\|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}$, λ_{ij}, μ_{ij}, γ, Ω, M_i и a. Из (2.23) следует оценка

$$\begin{gathered}[R(\vec{\rho})]^{\gamma} \leq C[R(\vec{\rho})]^{\gamma\frac{2\gamma-3}{2\gamma-1}} + CR(\vec{\rho}) + C[R(\vec{\rho})]^{\frac{\gamma}{3(2\gamma-1)}} + \\ +C[R(\vec{\rho})]^{\frac{2\gamma}{3(2\gamma-1)}+1} + C,\end{gathered} \tag{2.24}$$

где $R(\vec{\rho}) = \sum\limits_{i=1}^{2}\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}$, $\vec{\rho} = (\rho_1, \rho_2)$. Далее, так как при $\gamma > \frac{3}{2}$ верно неравенство

$$\gamma > \max\left\{1, \gamma\frac{2\gamma-3}{2\gamma-1}, \frac{\gamma}{3(2\gamma-1)}, 1 + \frac{2\gamma}{3(2\gamma-1)}\right\},$$

то из (2.24) получаем, что

$$R(\vec{\rho}) = \sum_{i=1}^{2} \|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)} \le C\left(\|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i, a\right). \tag{2.25}$$

Осталось заметить, что из оценок (2.18), (2.25) и соотношений

$$\|\varepsilon\nabla\rho_i\|_{L^{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)} \le C\left(1 + \|\rho_i\vec{u}^{(i)}\|_{L^{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)}\right) \le C, \;\; i = 1, 2, \tag{2.26}$$

доказанных в работе [57], следует неравенство (2.16) с положительной постоянной C, зависящей только от $\|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i, a$ и не зависящей от параметра ε.

Докажем теперь существование сильного обобщенного решения краевой задачи A_ε, используя принцип неподвижной точки Лере-Шаудера.

Обозначим через B_p, $1 < p$ замкнутое линейное подпространство в $W^{2,p}(\Omega)$ с индуцированной метрикой

$$B_p = \{\vec{u}_* \in W^{2,p}(\Omega) : \; \vec{u}_* = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$$

и воспользуемся следующим предложением [59]- [61]:

Предложение 2.5. *Пусть* $p > 3$ *и* $\vec{u}_* \in B_p$. *Обозначим через* $\rho = S(\vec{u}_*)$ *решение задачи*

$$\begin{gathered} -\varepsilon\Delta\rho + div(\rho\vec{u}_*) + \varepsilon\rho = \varepsilon\frac{M}{|\,\Omega|} \;\textit{в}\; \Omega, \\ \nabla\rho\cdot\vec{n} = 0 \;\textit{на}\; \partial\Omega, \; \int\limits_{\Omega} \rho\, dx = M. \end{gathered} \tag{2.27}$$

Тогда S *– непрерывный и компактный оператор из* B_p *в* $W^{2,q}(\Omega)$ $\forall$ $1 \le q < \infty$. *Кроме того, решение* ρ *задачи (2.27) единственно, неотрицательно и имеют место оценки*

$$\|\rho\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|S(\vec{u}_*)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C\left(\varepsilon, \|\vec{u}_*\|_{L^p(\Omega)}\right), \; p > 3, \tag{2.28}$$

$$\|\rho\|_{W^{2,p}(\Omega)} = \|S(\vec{u}_*)\|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C\left(\varepsilon, \|\vec{u}_*\|_{W^{1,p}(\Omega)}\right), \; p > \frac{3}{2}. \tag{2.29}$$

В соответствии с предложением 2.5 для произвольного $p > 3$ и заданных вектор-функций $\vec{u}_*^{(i)} \in B_p$, $i = 1, 2$ найдем неотрицательные функции

$\rho_i \in W^{2,q}(\Omega)$, $q \geq 1$ - произвольное, $\int\limits_{\Omega} \rho_i \, dx = M_i$, $i = 1, 2$ как решения задач

$$-\varepsilon\Delta\rho_i + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}_*^{(i)}) + \varepsilon\rho_i = \varepsilon\frac{M_i}{|\,\Omega|} \text{ в } \Omega,$$
$$\nabla\rho_i \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega,\ i = 1, 2. \tag{2.30}$$

Таким образом,

$$\rho_i = S(\vec{u}_*^{(i)}),\ i = 1, 2 \tag{2.31}$$

(положительные константы M_i в (2.30), вообще говоря, отличны от M в (2.27), но оператор задачи по прежнему обозначаем через S).

Далее, обозначим через

$$\vec{u} = (\vec{u}^{(1)}, \vec{u}^{(2)}) = \Lambda(\vec{F}) = \Lambda(\vec{F}^{(1)}, \vec{F}^{(2)}) \tag{2.32}$$

решение краевой задачи для сильно эллиптической системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\vec{u}^{(j)} = \vec{F}^{(i)} \text{ в } \Omega,\ i = 1, 2,$$
$$\vec{u}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega,\ i = 1, 2. \tag{2.33}$$

Из классических результатов для эллиптических краевых задач имеем, что при условиях $\vec{F}^{(i)} \in L^p(\Omega)$, $i = 1, 2$ задача (2.33) имеет единственное решение $\vec{u} \in W^{2,p}(\Omega)$, причем, справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{2} \|\vec{u}^{(i)}\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(p, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \Omega) \sum_{i=1}^{2} \left\|\vec{F}^{(i)}\right\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.34}$$

В соответствии со структурой правых частей уравнений (2.13), введем операторы

$$\mathcal{F}^{(i)}(\rho_i, \vec{u}_*) = -\frac{\varepsilon}{2}\rho_i\vec{u}_*^{(i)} - \frac{\varepsilon}{2}\frac{M_i}{|\Omega|}\vec{u}_*^{(i)} - \frac{1}{2}\rho_i(\vec{u}_*^{(i)} \cdot \nabla)\vec{u}_*^{(i)} -$$
$$-\frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho_i\vec{u}_*^{(i)} \otimes \vec{u}_*^{(i)}) - \nabla\rho_i^{\gamma} + \vec{J}_*^{(i)} + \rho_i\vec{f}^{(i)}, \tag{2.35}$$

где $\vec{J}_*^{(i)} = (-1)^{i+1}a(\vec{u}_*^{(2)} - \vec{u}_*^{(1)}),\ i = 1, 2,\ \vec{u}_* = (\vec{u}_*^{(1)}, \vec{u}_*^{(2)})$.

В силу непрерывности вложения $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\Omega)$, $\alpha = \frac{p-3}{p}$, $p > 3$ из условий $\rho_i \in W^{2,p}(\Omega)$, $\vec{u}_* \in W^{2,p}(\Omega)$, $i = 1, 2$ следует непрерывность в Ω вектор-функций $x \to \mathcal{F}^{(i)}(\rho_i(x), \vec{u}_*(x))$, $i = 1, 2$, причем имеют место оценки вида

$$\|\mathcal{F}^{(i)}(\rho_i, \vec{u}_*)\|_{C(\Omega)} \leq C\Big(\|\rho_i\|_{C(\Omega)}\|\vec{u}_*^{(i)}\|_{C(\Omega)} + \|\rho_i\|_{C(\Omega)}\|\vec{u}_*^{(i)}\|^2_{C^1(\Omega)} + \tag{2.36}$$

$$+\|\rho_i\|_{C^1(\Omega)}\|\vec{u}_*^{(i)}\|^2_{C(\Omega)} + \|\rho_i\|^{\gamma}_{C^1(\Omega)} + \sum_{j=1}^{2}\|\vec{u}_*^{(j)}\|_{C(\Omega)}\Big)+$$

$$+\|\rho_i\|_{C(\Omega)}\|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)},\ i=1,2.$$

Более того, нетрудно убедиться в справедливости неравенств

$$\|\mathcal{F}^{(i)}(\rho_i^{'},\vec{u}_*^{'}) - \mathcal{F}^{(i)}(\rho_i^{''},\vec{u}_*^{''})\|_{L^p(\Omega)} \le C(\Omega)\|\mathcal{F}^{(i)}(\rho_i^{'},\vec{u}_*^{'}) - \mathcal{F}^{(i)}(\rho_i^{''},\vec{u}_*^{''})\|_{C(\Omega)}$$

$$\le C_1\|\rho_i^{'} - \rho_i^{''}\|_{C^1(\Omega)} + C_2\sum_{j=1}^{2}\left\|\vec{u}_*^{(j)'} - \vec{u}_*^{(j)''}\right\|_{C^1(\Omega)},\ i=1,2, \tag{2.37}$$

где $C_i = C_i\left(\|\rho_i^{'}\|_{C^1(\Omega)}, \|\rho_i^{''}\|_{C^1(\Omega)}, \|\vec{u}_*^{'}\|_{C^1(\Omega)}, \|\vec{u}_*^{''}\|_{C^1(\Omega)}\right)$, $i = 1,2$ – локально ограниченные функции своих аргументов.

Определим теперь оператор

$$\Psi : B_p \to B_p,\ p > 3$$

по формуле

$$\Psi(\vec{u}_*) = \Lambda\left(\mathcal{F}^{(1)}(S(\vec{u}_*^{(1)}),\vec{u}_*), \mathcal{F}^{(2)}(S(\vec{u}_*^{(2)}),\vec{u}_*)\right), \tag{2.38}$$

где операторы S, Λ и $\mathcal{F}^{(i)}$ определены выше по формулам (2.31), (2.32), (2.35) соответственно.

Неподвижные точки $\vec{u} = (\vec{u}^{(1)}, \vec{u}^{(2)})$ оператора Ψ вместе с соответствующими функциями $\rho_i = S(\vec{u}^{(i)})$, $i = 1,2$ являются решениями релаксированной краевой задачи A_ε. Это очевидно, поскольку построение образа $\Psi(\vec{u}_*)$, $\vec{u}_* = (\vec{u}_*^{(1)}, \vec{u}_*^{(2)})$ элемента $\vec{u}_* \in B_p$ заключается в последовательном решении задач (2.30) и краевой задачи

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\vec{u}^{(j)} = -\frac{\varepsilon}{2}\rho_i\vec{u}_*^{(i)} - \frac{\varepsilon}{2}\frac{M_i}{|\Omega|}\vec{u}_*^{(i)} - \frac{1}{2}\rho_i(\vec{u}_*^{(i)}\cdot\nabla)\vec{u}_*^{(i)} - \\ -\frac{1}{2}\mathrm{div}(\rho_i\vec{u}_*^{(i)}\otimes\vec{u}_*^{(i)}) - \nabla\rho_i^{\gamma} + (-1)^{i+1}a(\vec{u}_*^{(2)} - \vec{u}_*^{(1)}) + \rho_i\vec{f}^{(i)}, \\ \rho_i = S(\vec{u}_*^{(i)}) \text{ в } \Omega,\ i=1,2,\ \ \vec{u}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega,\ i=1,2.\end{gathered} \tag{2.39}$$

Покажем, что оператор Ψ из (2.38) удовлетворяет условиям теоремы Лере-Шаудера.

Установим сначала непрерывность оператора Ψ. Пусть $\vec{u}_{*_n} \in B_p$, $\vec{u}_{*_n} = (\vec{u}_{*_n}^{(1)}, \vec{u}_{*_n}^{(2)})$, $n = 1,2,...$ и $\vec{u}_{*_n} \to \vec{u}_*$ сильно в B_p при $n \to \infty$. Тогда, в силу непрерывности оператора $S:\ B_p \to W^{2,p}(\Omega)$ имеем

$$\rho_i^n = S(\vec{u}_{*_n}^{(i)}) \to \rho_i = S(\vec{u}_*^{(i)}),\ n\to\infty,\ i=1,2 \tag{2.40}$$

по норме $W^{2,p}(\Omega)$. Из непрерывности вложения $W^{2,p}(\Omega) \to C^1(\Omega)$, $p > 3$ и свойств (2.37) операторов $\mathcal{F}^{(i)}$ получаем, что

$$\mathcal{F}^{(i)}(S(\vec{u}^{(i)}_{*_n}), \vec{u}_{*_n}) \to \mathcal{F}^{(i)}(S(\vec{u}^{(i)}_{*}), \vec{u}_{*}),\ i = 1, 2 \tag{2.41}$$

при $n \to \infty$ в пространствах $L^p(\Omega)$ и $C(\Omega)$. Наконец, из ограниченности линейного оператора $\Lambda : L^p(\Omega) \to W^{2,p}(\Omega)$ (оценка (2.34)) следует

$$\Psi(\vec{u}_{*_n}) \to \Psi(\vec{u}_{*}),\ n \to \infty \tag{2.42}$$

сильно в B_p.

Для доказательства компактности оператора Ψ возьмем ограниченную последовательность $\{\vec{u}_{*_n}\}$ в B_p. В силу компактности оператора $S : B_p \to W^{2,p}(\Omega)$ и компактности вложения $W^{2,p}(\Omega) \to C^1(\Omega)$, из последовательности $\{\vec{u}_{*_n}\}$ выделим подпоследовательность, сохранив за ней прежнее обозначение, такую что

$$\vec{u}^{(i)}_{*_n} \to \vec{u}^{(i)}_{*} \text{ сильно в } C^1(\Omega),\ i = 1, 2,$$

$$\rho_i^n = S(\vec{u}^{(i)}_{*_n}) \to \rho_i = S(\vec{u}^{(i)}_{*}) \text{ сильно в } W^{2,p}(\Omega),\ i = 1, 2,$$

$$\vec{u}_{*} = (\vec{u}^{(1)}_{*}, \vec{u}^{(2)}_{*}) \in B_p\,.$$

Повторяя далее предыдущие рассуждения, получим, что

$$\Psi(\vec{u}_{*_n}) \to \Psi(\vec{u}_{*}),\ n \to \infty$$

в пространстве B_p. Компактность оператора Ψ установлена.

Чтобы завершить доказательство теоремы 1.2, осталось показать, что множество всех решений класса B_p уравнения

$$t\Psi(\vec{u}) = \vec{u},\ t \in [0; 1] \tag{2.43}$$

ограниченно в B_p. Равенство (2.43) означает, что рассматривается следующее семейство краевых задач, зависящее от параметра $t \in [0; 1]$:

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\vec{u}^{(j)} = -\frac{\varepsilon t}{2}\rho_i\vec{u}^{(i)} - \varepsilon\frac{tM_i}{2|\Omega|}\vec{u}^{(i)} - \frac{t}{2}\rho_i(\vec{u}^{(i)}\cdot\nabla)\vec{u}^{(i)} - \\ -\frac{t}{2}\mathrm{div}(\rho_i\vec{u}^{(i)}\otimes\vec{u}^{(i)}) - t\bigtriangledown\rho_i^{\gamma} + t\vec{J}^{(i)} + t\rho_i\vec{f}^{(i)} \text{ в } \Omega, \\ \vec{u}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega,\ i = 1, 2,\end{gathered} \tag{2.44}$$

где $\rho_i = S(\vec{u}^{(i)})$, $i = 1, 2$. Умножая обе части уравнений (2.44) скалярно на $\vec{u}^{(i)}$, $i = 1, 2$, интегрируя результат по области Ω и суммируя по $i = 1, 2$, получим

$$C_0 t \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla \vec{u}^{(i)}|^2 \, dx + \frac{\varepsilon t}{2} \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i |\vec{u}^{(i)}|^2 \, dx + \varepsilon \frac{t}{2|\Omega|} \sum_{i=1}^{2} M_i \int\limits_{\Omega} |\vec{u}^{(i)}|^2 \, dx +$$

$$+ \varepsilon t \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i^{\gamma} \, dx + \varepsilon t \gamma \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i^{\gamma-2} |\nabla \rho_i|^2 \, dx + a t \int\limits_{\Omega} |\, \vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)} \,|^2 \, dx \leq$$

$$\leq \varepsilon \frac{t}{|\Omega|} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sum_{i=1}^{2} M_i \int\limits_{\Omega} \rho_i^{\gamma - 1} \, dx + t \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i \vec{f}^{(i)} \cdot \vec{u}^{(i)} \, dx. \tag{2.45}$$

Отсюда, в силу оценок

$$\frac{1}{|\Omega|} \sum_{i=1}^{2} M_i \int\limits_{\Omega} \rho_i^{\gamma-1} \, dx \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i^{\gamma} \, dx + C(\gamma, \Omega, M_i),$$

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i \vec{f}^{(i)} \cdot \vec{u}^{(i)} \, dx \leq \frac{C_0}{2} \sum_{i=1}^{2} \|\vec{u}^{(i)}\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{4} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sum_{i=1}^{2} \|\rho_i\|^{\gamma}_{L^{\gamma}(\Omega)} +$$

$$+ C \left(\varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma \right)$$

следует при $\gamma > 2$, что

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\|\vec{u}^{(i)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \|\rho_i\|_{L^{\gamma}(\Omega)} \right) \leq C \left(\varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, , \Omega, M_i \right). \tag{2.46}$$

Тогда, в силу ограниченности вложения $W_0^{1,2}(\Omega)$ в $L^6(\Omega)$ имеем

$$\|\vec{u}^{(i)}\|_{L^6(\Omega)} \leq C \left(\varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i \right), \quad i = 1, 2.$$

Из последних неравенств и априорных оценок решений эллиптических уравнений из (2.30) следует (с $\vec{u}_*^{(i)} = \vec{u}^{(i)}$, $i = 1, 2$), что

$$\|\rho_i\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq C \left(\varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i \right), \quad i = 1, 2.$$

Таким образом,

$$\|\rho_i \vec{u}^{(i)}\|_{L^6(\Omega)} \leq C \left(\varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i \right), \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим функции $v^{(i)}$, $i=1,2$ такие, что

$$\operatorname{div} v^{(i)} = \frac{1}{2}\rho_i(\vec{u}^{(i)}\cdot\nabla)\vec{u}^{(i)} - \frac{\vec{\alpha}}{|\Omega|} \text{ в } \Omega,\ \ v^{(i)}=0 \text{ на } \partial\Omega,\ \ i=1,2, \tag{2.47}$$

где $\vec{\alpha} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{\Omega}\rho_i(\vec{u}^{(i)}\cdot\nabla)\vec{u}^{(i)}\,dx,\ i=1,2$. Так как правые части уравнений (2.47) допускают оценку по норме пространства $L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, то для $v^{(i)}$, $i=1,2$ справедливы неравенства

$$\|v^{(i)}\|_{W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega)} \le C\left(\varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i\right),\ \ i=1,2.$$

Таким образом, правые части уравнений (2.44) имеют вид $\vec{H}^{(i)} + \operatorname{div} G^{(i)}$, где

$$\begin{gathered}\vec{H}^{(i)} = -\frac{\varepsilon t}{2}\rho_i\vec{u}^{(i)} - \varepsilon\frac{tM_i}{2|\Omega|}\vec{u}^{(i)} + t\vec{J}^{(i)} + t\rho_i\vec{f}^{(i)} - t\frac{\vec{\alpha}}{|\Omega|},\ i=1,2,\\ G^{(i)} = -t\rho_i^{\gamma}I - \frac{t}{2}\rho_i\vec{u}^{(i)}\otimes\vec{u}^{(i)} - tv^{(i)},\ i=1,2.\end{gathered} \tag{2.48}$$

В силу вышесказанного справедливы неравенства

$$\|\vec{H}^{(i)}\|_{L^6(\Omega)} \le C\left(\varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i, a\right),\ \ i=1,2,$$

$$\|G^{(i)}\|_{L^3(\Omega)} \le C\left(\varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i\right),\ \ i=1,2.$$

Из классических оценок для решений эллиптических систем уравнений теперь следует, что

$$\|\vec{u}^{(i)}\|_{W^{1,3}(\Omega)} \le C\left(\varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i, a\right),\ \ i=1,2, \tag{2.49}$$

и, в силу ограниченности вложения $W^{1,3}(\Omega)$ в $L^r(\Omega)$ $\forall\ 1\le r<\infty$,

$$\|\vec{u}^{(i)}\|_{L^r(\Omega)} \le C\left(r, \varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i, a\right),\ i=1,2. \tag{2.50}$$

Тогда, из оценки (2.49) и классических результатов о регулярности решений эллиптических уравнений получаем из (2.30), что

$$\|\rho_i\|_{W^{2,3}(\Omega)} \le C\left(r, \varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i, a\right),\ \ i=1,2. \tag{2.51}$$

Отсюда, в силу ограниченности вложения $W^{2,3}(\Omega)$ в $W^{1,r}(\Omega)$ $\forall\ 1\le r<\infty$, следуют неравенства

$$\|\rho_i\|_{W^{1,r}(\Omega)} \le C\left(r, \varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i, a\right),\ i=1,2. \tag{2.52}$$

Таким образом, для любых $r \in [1;\infty)$ получаем для функций $\vec{H}^{(i)}$ и $G^{(i)}$ в (2.48) оценки

$$\|\vec{H}^{(i)}\|_{L^r(\Omega)} \leq C\left(r, \varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i, a\right), \; i = 1, 2,$$

$$\|G^{(i)}\|_{L^r(\Omega)} \leq C\left(r, \varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i, a\right), \; i = 1, 2.$$

Поэтому, из классических оценок для решений эллиптических систем уравнений получаем неравенства

$$\|\vec{u}^{(i)}\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C\left(r, \varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i, a\right) \; \forall\, 1 \leq r < \infty, \; i = 1, 2. \tag{2.53}$$

Из этих неравенств и классических априорных оценок для решений эллиптических уравнений из (2.30) следует, что

$$\|\rho_i\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leq C\left(r, \varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i, a\right) \; \forall\, 1 \leq r < \infty, \; i = 1, 2. \tag{2.54}$$

В свою очередь, из (2.53) и (2.54) получаем (в силу ограниченности вложений $W^{1,r}(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ и $W^{2,r}(\Omega)$ в $C^1(\overline{\Omega})$, $r > 3$), что

$$\begin{aligned} &\|\vec{u}^{(i)}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\left(r, \varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i, a\right), \; i = 1, 2, \\ &\|\nabla\rho_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\left(r, \varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i, a\right), \; i = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Для функций $\vec{H}^{(i)}$ и $G^{(i)}$ в (2.48) теперь справедливы следующие неравенства

$$\|\vec{H}^{(i)}\|_{L^r(\Omega)} \leq C\left(r, \varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i, a\right) \; \forall\, 1 \leq r < \infty, \; i = 1, 2,$$

$$\|\operatorname{div} G^{(i)}\|_{L^r(\Omega)} \leq C\left(r, \varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i, a\right) \; \forall\, 1 \leq r < \infty, \; i = 1, 2.$$

Отсюда и из классических оценок для решений эллиптических систем уравнений следует, наконец, что

$$\|\vec{u}^{(i)}\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leq C\left(r, \varepsilon, \|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i, a\right) \; \forall\, 1 \leq r < \infty, \; i = 1, 2. \tag{2.56}$$

Итак, в силу теоремы Лере-Шаудера можно утверждать, что задача A_ε имеет по крайней мере одно сильное обобщенное решение. Теорема 2.4 доказана.

2.3. Предельный переход

Следующий шаг состоит в том, чтобы совершить предельный переход (в слабом смысле) в уравнениях (2.12)-(2.13) при $\varepsilon \to 0$. Благодаря априорной оценке (2.16), можно извлечь подпоследовательности, снова обозначенные как ρ_i^ε, $\vec{u}_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1, 2$ такие, что при $\varepsilon \to 0$

$$\rho_i^\varepsilon \to \rho_i \ \text{ слабо } \ \text{в } L^{2\gamma}(\Omega), \ i = 1, 2, \tag{2.57}$$

$$\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \to \vec{u}^{(i)} \ \text{ слабо } \ \text{в } W_0^{1,2}(\Omega), \ i = 1, 2, \tag{2.58}$$

и, по теореме вложения,

$$\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \to \vec{u}^{(i)} \ \text{ сильно } \ \text{в } L^q(\Omega), \ q \in [1; 6), \ i = 1, 2. \tag{2.59}$$

Кроме того, из оценок (2.16) и (2.17) следует неравенство

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega (\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-2} |\nabla \rho_i^\varepsilon|^2 \, dx \le C \left(\|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, \Omega, M_i, a \right), \tag{2.60}$$

где постоянная C не зависит от параметра ε. Из этого неравенства и из уравнений (2.12) получаем, что при $\varepsilon \to 0$

$$\varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon \to 0 \ \text{ сильно в } \ L^q(\Omega), \ 1 \le q < \frac{6\gamma}{\gamma + 3}, \ i = 1, 2. \tag{2.61}$$

Действительно, из оценки (2.60) следует, что для любого $\delta > 0$ (при $\gamma \ge 2$)

$$\|\varepsilon |\nabla \rho_i^\varepsilon| I_{\{\rho_i^\varepsilon \ge \delta\}}\|^2_{L^2(\Omega)} \le C \varepsilon \delta^{2-\gamma}, \ \ i = 1, 2, \tag{2.62}$$

где I_K – характеристическая функция множества K. С другой стороны, умножая уравнения (2.12) на $(\rho_i^\varepsilon - \delta) I_{\{\rho_i^\varepsilon < \delta\}}$ и интегрируя результат по области Ω, получим, что

$$\|\varepsilon |\nabla \rho_i^\varepsilon| I_{\{\rho_i^\varepsilon < \delta\}}\|^2_{L^2(\Omega)} \le C \left(\delta^2 + \varepsilon^2 \delta \right), \ \ i = 1, 2. \tag{2.63}$$

Таким образом, из неравенств (2.62)-(2.63) с $\delta = \varepsilon^\alpha$, $\alpha \in \left(0, \frac{1}{\gamma-2}\right)$ получаем, что

$$\varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon \to 0 \ \text{ сильно в } \ L^2(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0, \ i = 1, 2, \tag{2.64}$$

откуда в силу оценки (2.16) и следуют соотношения (2.61).

Переходя к пределу по выбранным подпоследовательностям в уравнениях (2.12)-(2.13) при $\varepsilon \to 0$, получим, что предельные функции $\rho_i \in L^{2\gamma}(\Omega)$,

$\rho_i \geq 0$, $\int\limits_\Omega \rho_i\, dx = M_i$, $\vec{u}^{(i)} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $i = 1, 2$ при $\gamma > 3$ удовлетворяют в слабом смысле следующей системе уравнений:

$$\operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = 0 \text{ в } \Omega,\ i = 1, 2, \tag{2.65}$$

$$\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\vec{u}^{(j)} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}) + \bigtriangledown \overline{p}_i = \vec{J}^{(i)} + \rho_i \vec{f}^{(i)} \text{ в } \Omega,\ i = 1, 2, \tag{2.66}$$

где

$$(\rho_i^\varepsilon)^\gamma \to \overline{p}_i \text{ слабо в } L^2(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0,\ \ i = 1, 2. \tag{2.67}$$

Таким образом, чтобы завершить доказательство теоремы 2.2, следует показать, что имеют место равенства

$$\overline{p}_i = \rho_i^\gamma,\ i = 1, 2 \tag{2.68}$$

и, что слабые решения уравнений неразрывности (2.1) являются ренормализованными решениями.

С этой целью используем технику, развитую в работе [43] для классической модели Навье-Стокса.

2.3.1. Эффективные вязкие потоки составляющих смеси

Введем в рассмотрение величины

$$p_i - (\lambda_{i1} + 2\mu_{i1})\operatorname{div} \vec{u}^{(1)} - (\lambda_{i2} + 2\mu_{i2})\operatorname{div} \vec{u}^{(2)},\ i = 1, 2,$$

которые по аналогии с моделью вязкой сжимаемой жидкости назовем эффективными вязкими потоками компонент смеси. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.6. *Пусть ρ_i^ε, $\vec{u}_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1, 2$ — последовательности решений задачи A_ε, существование которых гарантируется теоремой 2.4, и пусть ρ_i, $\vec{u}^{(i)}$ и $\overline{p}_i$, $i = 1, 2$ — пределы, определенные в* (2.57), (2.58) *и* (2.67) *соответственно.*

Тогда при $\varepsilon \to 0$

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega \rho_j^\varepsilon \left[(\rho_i^\varepsilon)^\gamma - (\lambda_{i1} + 2\mu_{i1})\, div\vec{u}_\varepsilon^{(1)} - (\lambda_{i2} + 2\mu_{i2})\, div\vec{u}_\varepsilon^{(2)}\right] \tau^2\, dx \to \\ \to \int\limits_\Omega \rho_j \left[\overline{p}_i - (\lambda_{i1} + 2\mu_{i1})\, div\vec{u}^{(1)} - (\lambda_{i2} + 2\mu_{i2})\, div\vec{u}^{(2)}\right] \tau^2\, dx \\ \forall\ \tau \in C_0^\infty(\Omega),\ i, j = 1, 2.\end{gathered} \tag{2.69}$$

Доказательство. Рассмотрим линейные ограниченные операторы

$$A_k : L^p(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega), \;\; A_k = \frac{\partial}{\partial x_k}\triangle^{-1}, \;\; k = 1,2,3, \tag{2.70}$$

$$A_{ks} : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega), \quad A_{ks} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_s}\triangle^{-1}, \; k,s = 1,2,3, \tag{2.71}$$

где для произвольной функции $v \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, продолженной нулем в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, оператор $\triangle^{-1}(v) = -\frac{1}{3\omega_3}\int\limits_{R^3} \frac{v(y)}{|x-y|}\,dy$, $\omega_3 = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{3\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} > 0$ при $p > \frac{3}{2}$ является вполне непрерывным оператором из $L^p(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ [32]. Заметим, что

$$\triangle(\triangle^{-1}(v)) = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}A_k[v] = v. \tag{2.72}$$

Пусть $\vec{\varphi}^{(j)} = \nabla(\tau\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau))$, $j = 1,2$, где τ – произвольная функция из $C_0^\infty(\Omega)$ и все рассматриваемые функции считаем продолженными нулем в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$. Приняв данные вектор-функции $\vec{\varphi}^{(j)}$ в качестве тестовых, из уравнений (2.13) получаем соотношения

$$\int\limits_\Omega \rho_j^\varepsilon[(\rho_i^\varepsilon)^\gamma - (\lambda_{i1} + 2\mu_{i1})\mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon^{(1)} - (\lambda_{i2} + 2\mu_{i2})\mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon^{(2)}]\tau^2\,dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \rho_j[(\rho_i^\varepsilon)^\gamma - (\lambda_{i1} + 2\mu_{i1})\mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon^{(1)} - (\lambda_{i2} + 2\mu_{i2})\mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon^{(2)}]\tau^2\,dx -$$

$$-\int\limits_\Omega (\rho_i^\varepsilon)^\gamma \triangle(\tau)\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\,dx - 2\int\limits_\Omega (\rho_i^\varepsilon)^\gamma\,\nabla\tau\cdot\nabla\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\,dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}(\lambda_{ik} + 2\mu_{ik})\int\limits_\Omega \mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon^{(k)}\triangle(\tau)\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\,dx + \tag{2.73}$$

$$+2\sum_{k=1}^{2}(\lambda_{ik} + 2\mu_{ik})\int\limits_\Omega \mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon^{(k)}\nabla\tau\cdot\nabla\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\,dx -$$

$$-\int\limits_\Omega \rho_i^\varepsilon\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\otimes\vec{u}_\varepsilon^{(i)} : \nabla(\nabla(\tau\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)))\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\cdot\nabla)\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\cdot\nabla(\tau\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau))\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\otimes\vec{u}_\varepsilon^{(i)}:\nabla(\nabla(\tau\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau)))\,dx-$$

$$-\int\limits_{\Omega}[-\varepsilon\rho_i^\varepsilon\vec{u}_\varepsilon^{(i)}+\vec{J}_\varepsilon^{(i)}+\rho_i^\varepsilon\vec{f}^{(i)}]\cdot\nabla(\tau\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau))\,dx,\ \ i,j=1,2.$$

При выводе формулы (2.73) были использованы тождества

$$-\frac{\varepsilon}{2}\triangle\rho_i^\varepsilon\vec{u}_\varepsilon^{(i)}=-\frac{1}{2}\mathrm{div}(\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\otimes\vec{u}_\varepsilon^{(i)})+\frac{1}{2}\varepsilon(\nabla\rho_i^\varepsilon\cdot\nabla)\vec{u}_\varepsilon^{(i)},\ \ i=1,2,$$

а также соотношения

$$\frac{\varepsilon}{2}\rho_i^\varepsilon\vec{u}_\varepsilon^{(i)}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{M_i}{|\Omega|}\vec{u}_\varepsilon^{(i)}+\frac{1}{2}\rho_i^\varepsilon(\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\cdot\nabla)\vec{u}_\varepsilon^{(i)}+\frac{1}{2}\mathrm{div}(\rho_i^\varepsilon\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\otimes\vec{u}_\varepsilon^{(i)})=$$

$$=\varepsilon\rho_i^\varepsilon\vec{u}_\varepsilon^{(i)}+\mathrm{div}(\rho_i^\varepsilon\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\otimes\vec{u}_\varepsilon^{(i)})-\frac{\varepsilon}{2}\triangle\rho_i^\varepsilon\vec{u}_\varepsilon^{(i)},\ \ i=1,2,$$

вытекающие из уравнений (2.12).

I. Исследование интегралов, порожденных конвективным слагаемым

$$\int\limits_{\Omega}\rho_i^\varepsilon\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\otimes\vec{u}_\varepsilon^{(i)}:\nabla(\nabla(\tau\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau)))\,dx=$$

$$=\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_k}^{(i)}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial^2\tau}{\partial x_k\partial x_s}\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau)\,dx+$$

$$+2\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_k}^{(i)}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_k}A_s[(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau]\,dx+\qquad(2.74)$$

$$+\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_k}^{(i)}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau A_{k\,s}[(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau]\,dx,\ \ i,j=1,2.$$

Рассмотрим первый интеграл в правой части (2.74). Так как оператор $\triangle^{-1}$ является вполне непрерывным из $L^p(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ при $p>\frac{3}{2}$, то в силу

(2.16) выполняются соотношения

$$\left|\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\varepsilon}u_{\varepsilon_k}^{(i)}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial^2\tau}{\partial x_k\partial x_s}\triangle^{-1}((\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau)\,dx\right|\leq$$
$$\leq C\|\triangle^{-1}((\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau)\|_{C(\overline{\Omega})}\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0,\ i,j=1,2. \qquad (2.75)$$

Далее, поскольку оператор $A_k : L^{2\gamma}(\Omega)\to W^{1,2\gamma}(\Omega)$ линеен и ограничен, а вложение $W^{1,2\gamma}(\Omega)\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ $(\gamma>\frac{3}{2})$ компактно, тогда

$$\left|\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\varepsilon}u_{\varepsilon_k}^{(i)}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_k}A_s[(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau]\,dx\right|\leq$$
$$\leq C\sum_{s=1}^{3}\|A_s[(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau]\|_{C(\overline{\Omega})}\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0,\ i,j=1,2. \qquad (2.76)$$

Сходимость к нулю последнего интеграла в правой части (2.74) далеко не очевидна. Для доказательства этого факта воспользуемся следующим утверждением, доказанным в работе [43]:

Предложение 2.7. *Предположим, что*

$$v_\varepsilon\to v \text{ слабо в } L^p(\Omega) \text{ при } \varepsilon\to 0,$$

$$w_\varepsilon\to w \text{ слабо в } L^q(\Omega) \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

Тогда

$$v_\varepsilon A_{k\,s}[w_\varepsilon]-w_\varepsilon A_{k\,s}[v_\varepsilon]\to vA_{k\,s}[w]-wA_{k\,s}[v] \text{ слабо в } L^r(\Omega) \text{ при } \varepsilon\to 0,$$
$$k,s=1,2,3,\ \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}<1.$$

Умножая обе части уравнений (2.12) на функцию $\tau\in C_0^\infty(\Omega)$, получаем:

$$\operatorname{div}(\rho_i^{\varepsilon}\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}\tau)=\varepsilon\frac{M_i}{|\Omega|}\tau+\rho_i^{\varepsilon}\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}\nabla\tau-\varepsilon\rho_i^{\varepsilon}\tau+\varepsilon\triangle(\rho_i^{\varepsilon}\tau)-\varepsilon\rho_i^{\varepsilon}\triangle\tau-$$
$$-2\varepsilon\nabla\rho_i^{\varepsilon}\cdot\nabla\tau,\ i=1,2.$$

Применим к обеим частям этих уравнений оператор $\nabla\triangle^{-1}$, считая рассматриваемые функции продолженными нулем в $\mathbb{R}^3\setminus\Omega$:

$$\nabla\triangle^{-1}(\operatorname{div}(\rho_i^{\varepsilon}\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}\tau))=\varepsilon\frac{M_i}{|\Omega|}\nabla\triangle^{-1}(\tau)+\nabla\triangle^{-1}(\rho_i^{\varepsilon}\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}\nabla\tau)-\varepsilon\nabla\triangle^{-1}(\rho_i^{\varepsilon}\tau)+$$

$$+\varepsilon\nabla(\rho_i^{\varepsilon}\tau)-\varepsilon\nabla\triangle^{-1}(\rho_i^{\varepsilon}\triangle\tau)-2\varepsilon\nabla\triangle^{-1}(\nabla\rho_i^{\varepsilon}\cdot\nabla\tau),\ i=1,2.$$

Далее, умножим последние уравнения на $(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau\vec{u}_\varepsilon^{(i)}$ и проинтегрируем результат по области Ω:

$$\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_{k\,s}[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau]\,dx=\varepsilon\frac{M_i}{|\Omega|}\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\tau]\,dx+$$

$$+\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k\left[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]\,dx-\varepsilon\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\rho_i^\varepsilon\tau]\,dx+$$

$$+\varepsilon\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_i^\varepsilon\tau)\,dx-\varepsilon\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\rho_i^\varepsilon\triangle\tau]\,dx-$$

$$-2\varepsilon\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\nabla\rho_i^\varepsilon\cdot\nabla\tau]\,dx\;\; i,j=1,2. \qquad (2.77)$$

В силу формул (2.77) имеем

$$\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_k}^{(i)}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau A_{k\,s}[(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau]\,dx=$$

$$=\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}u_{\varepsilon_k}^{(i)}\left(\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau A_{k\,s}[(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau]-(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau A_{k\,s}[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau]\right)\,dx+$$

$$+\varepsilon\frac{M_i}{|\Omega|}\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\tau]\,dx+\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k\left[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]\,dx-$$

$$-\varepsilon\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\rho_i^\varepsilon\tau]\,dx+\varepsilon\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_i^\varepsilon\tau)\,dx-$$

$$-\varepsilon\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\rho_i^\varepsilon\triangle\tau]\,dx-2\varepsilon\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\nabla\rho_i^\varepsilon\cdot\nabla\tau]\,dx,$$

$$i,j=1,2. \qquad (2.78)$$

Рассмотрим каждое слагаемое в правой части (2.78). Так как

$$(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau\to 0 \;\text{ слабо в }\; L^{2\gamma}(\Omega)\;\text{ при }\;\varepsilon\to 0,\;\; j=1,2,$$

$$\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau\to\rho_i u_s^{(i)}\tau\text{ слабо в }L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)\text{ при }\varepsilon\to 0,\; i=1,2,\; s=1,2,3,$$

то согласно предложению 2.7

$$\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)} \tau A_{k\,s}[(\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau] - (\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau A_{k\,s}[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau] \to 0 \text{ слабо в } L^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}}(\Omega)$$

$$\text{при } \varepsilon \to 0,\ i, j = 1, 2. \tag{2.79}$$

В силу (2.59) отсюда следует, что

$$\sum_{k,s=1}^{3} \int\limits_\Omega u_{\varepsilon_k}^{(i)} \left(\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)} \tau A_{k\,s}[(\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau] - (\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau A_{k\,s}[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau]\right) dx \to 0$$

$$\text{при } \varepsilon \to 0,\ \ i, j = 1, 2. \tag{2.80}$$

Рассмотрим другие слагаемые в правой части (2.78). Используя неравенство (2.16), получим, что при $\varepsilon \to 0$

$$\varepsilon \frac{M_i}{|\Omega|} \left| \sum_{k=1}^{3} \int\limits_\Omega (\rho_j^\varepsilon - \rho_j) u_{\varepsilon_k}^{(i)} \tau A_k[\tau]\, dx \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon C(\|\rho_j^\varepsilon\|_{L^{2\gamma}(\Omega)} + \|\rho_j\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}) \sum_{k=1}^{3} \|u_{\varepsilon_k}^{(i)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq \varepsilon C \to 0,\ \ i, j = 1, 2.$$

Далее, рассмотрим третье слагаемое в правой части (2.78):

$$\sum_{k,s=1}^{3} \int\limits_\Omega (\rho_j^\varepsilon - \rho_j) u_{\varepsilon_k}^{(i)} \tau A_k \left[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)} \frac{\partial \tau}{\partial x_s}\right] dx =$$

$$= \sum_{k,s=1}^{3} \int\limits_\Omega (\rho_j^\varepsilon - \rho_j)(u_{\varepsilon_k}^{(i)} - u_k^{(i)}) \tau A_k \left[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)} \frac{\partial \tau}{\partial x_s}\right] dx + \tag{2.81}$$

$$+ \sum_{k,s=1}^{3} \int\limits_\Omega (\rho_j^\varepsilon - \rho_j) u_k^{(i)} \tau \left(A_k \left[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)} \frac{\partial \tau}{\partial x_s}\right] - A_k \left[\rho_i u_s^{(i)} \frac{\partial \tau}{\partial x_s}\right]\right) dx +$$

$$+ \sum_{k,s=1}^{3} \int\limits_\Omega (\rho_j^\varepsilon - \rho_j) u_k^{(i)} \tau A_k \left[\rho_i u_s^{(i)} \frac{\partial \tau}{\partial x_s}\right] dx,\ \ i, j = 1, 2.$$

Отсюда, учитывая (2.16), (2.70) и ограниченность вложения $W^{1,\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ при $\gamma > 3$, получим

$$\left|\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)(u_{\varepsilon_k}^{(i)}-u_k^{(i)})\tau A_k\left[\rho_i^{\varepsilon}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]\,dx\right| \leq$$

$$\leq C\sum_{k,s=1}^{3}\|\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j\|_{L^2(\Omega)}\|u_{\varepsilon_k}^{(i)}-u_k^{(i)}\|_{L^2(\Omega)}\left\|A_k\left[\rho_i^{\varepsilon}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]\right\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \tag{2.82}$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{3}\|u_{\varepsilon_k}^{(i)}-u_k^{(i)}\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0,\ i,j=1,2.$$

Поскольку $\rho_i^{\varepsilon}u_{\varepsilon_s}^{(i)} \to \rho_i u_s^{(i)}$ слабо в $L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$ и операторы $A_k : L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega) \to W^{1,\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)$ ограниченны, а вложение $W^{1,\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)$ в $L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-3}}(\Omega)$ компактно, то

$$\left|\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)u_k^{(i)}\tau\left(A_k\left[\rho_i^{\varepsilon}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]-A_k\left[\rho_i u_s^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]\right)\,dx\right| \leq$$

$$\leq C\sum_{k,s=1}^{3}\left\|A_k\left[\rho_i^{\varepsilon}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]-A_k\left[\rho_i u_s^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]\right\|_{L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-3}}(\Omega)} \to 0 \tag{2.83}$$

$$\text{при } \varepsilon \to 0,\ i,j=1,2.$$

Так как $\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j \to 0$ слабо в $L^{2\gamma}(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$, а функции $\tau u_k^{(i)}A_k\left[\rho_i u_s^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]$ принадлежат сопряженному пространству $L^{\frac{2\gamma}{2\gamma-1}}(\Omega)$, то последнее слагаемое в правой части (2.81) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, доказано, что при $\varepsilon \to 0$

$$\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k\left[\rho_i^{\varepsilon}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]\,dx \to 0,\ \ i,j=1,2. \tag{2.84}$$

Далее, в силу (2.16) и (2.70), интегралы

$$\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\rho_i^{\varepsilon}\tau]\,dx,\ \sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\rho_i^{\varepsilon}\triangle\tau]\,dx$$

равномерно (по ε) ограниченны, следовательно четвертое и шестое слагаемые в правой части (2.78) стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Пятое и седьмое слагаемые в правой части (2.78) стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$ в силу (2.61) и оценок

$$\varepsilon \left| \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{\Omega} (\rho_j^\varepsilon - \rho_j) u_{\varepsilon_k}^{(i)} \tau \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_i^\varepsilon \tau)\, dx \right| \le C \|\varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon C,\ i,j = 1,2, \quad (2.85)$$

$$\varepsilon \left| \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{\Omega} (\rho_j^\varepsilon - \rho_j) u_{\varepsilon_k}^{(i)} \tau A_k [\nabla \rho_i^\varepsilon \cdot \nabla \tau]\, dx \right| \le C \|\varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)},\ i,j = 1,2. \quad (2.86)$$

В итоге, доказаны соотношения

$$\sum_{k,s=1}^{3} \int\limits_{\Omega} \rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_k}^{(i)} u_{\varepsilon_s}^{(i)} \tau A_{k\,s} [(\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau]\, dx \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0,\ i,j = 1,2 \quad (2.87)$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\Omega} \rho_i^\varepsilon \vec{u}_\varepsilon^{(i)} \otimes \vec{u}_\varepsilon^{(i)} : \nabla(\nabla(\tau \triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)))\ dx \to 0$$
$$\text{при } \varepsilon \to 0,\ i,j = 1,2. \quad (2.88)$$

II. Исследование интегралов, содержащих $\mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon^{(i)}$**.** Так как оператор $\triangle^{-1}$ является вполне непрерывным из $L^p(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ при $p > \frac{3}{2}$, то в силу (2.16) выполняются соотношения

$$\left| \int\limits_{\Omega} \mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \triangle(\tau) \triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\, dx \right| \le C \|\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\|_{C(\overline{\Omega})} \to 0$$
$$\text{при } \varepsilon \to 0,\ i,j = 1,2. \quad (2.89)$$

Далее, поскольку операторы $A_k : L^{2\gamma}(\Omega) \to W^{1,2\gamma}(\Omega)$ линейны и ограниченны, а вложение $W^{1,2\gamma}(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ ($\gamma > \frac{3}{2}$) компактно, то

$$\left| \int\limits_{\Omega} \mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \nabla(\tau) \cdot \nabla \triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\, dx \right| \le C \sum_{k=1}^{3} \|A_k[(\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau]\|_{C(\overline{\Omega})} \to 0$$
$$\text{при } \varepsilon \to 0,\ i,j = 1,2. \quad (2.90)$$

Кроме того, в силу (2.16), (2.58) имеем

$$\int\limits_{\Omega} \mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \rho_j \tau^2 \, dx \to \int\limits_{\Omega} \mathrm{div}\vec{u}^{(i)} \rho_j \tau^2 \, dx \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0, \ i, j = 1, 2. \tag{2.91}$$

III. Исследование интегралов, содержащих $(\rho_i^\varepsilon)^\gamma$. В силу (2.16) и (2.67), получим

$$\int\limits_{\Omega} (\rho_i^\varepsilon)^\gamma \rho_j \tau^2 \, dx \to \int\limits_{\Omega} \overline{p}_i \rho_j \tau^2 \, dx \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0, \ i, j = 1, 2. \tag{2.92}$$

Так как оператор $\triangle^{-1}$ является вполне непрерывным из $L^p(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ при $p > \frac{3}{2}$, то в силу (2.16) мы имеем

$$\left| \int\limits_{\Omega} (\rho_i^\varepsilon)^\gamma \triangle(\tau) \triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau) \, dx \right| \leq C \|\rho_i^\varepsilon\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}^\gamma \|\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\|_{C(\overline{\Omega})} \leq$$

$$\leq C \|\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\|_{C(\overline{\Omega})} \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0, \ i, j = 1, 2. \tag{2.93}$$

Из оценки

$$\left| \int\limits_{\Omega} (\rho_i^\varepsilon)^\gamma \nabla(\tau) \cdot \nabla \triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau) \, dx \right| \leq C \|\rho_i^\varepsilon\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}^\gamma \sum_{k=1}^{3} \|A_k[(\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau]\|_{C(\overline{\Omega})} \leq$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{3} \|A_k(\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau]\|_{C(\overline{\Omega})}, \ i, j = 1, 2, \tag{2.94}$$

как и при выводе формулы (2.90) получим, что данные интегралы стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

IV. Три последних интеграла в правой части (2.73) стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Это вытекает из следующих оценок:

$$\left| \int\limits_{\Omega} (\varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla(\tau \triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)) \, dx \right| \leq$$

$$\leq C \|\varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \vec{u}_\varepsilon^{(i)}\|_{L^2(\Omega)} \|\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\|_{C(\overline{\Omega})} + \tag{2.95}$$

$$+ C \|\varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \vec{u}_\varepsilon^{(i)}\|_{L^2(\Omega)} \sum_{k=1}^{3} \|A_k[(\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau]\|_{C(\overline{\Omega})}, \ i, j = 1, 2;$$

$$\left| \int\limits_{\Omega} \varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon \otimes \vec{u}_\varepsilon^{(i)} : \nabla(\nabla(\tau \triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau))) \, dx \right| \leq$$
$$\leq C \|\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\|_{C(\overline{\Omega})} + C \sum_{k=1}^{3} \|A_k[(\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau]\|_{C(\overline{\Omega})} + \tag{2.96}$$
$$+ C \|\varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}, \; i, j = 1, 2;$$

$$\left| \int\limits_{\Omega} \left[-\varepsilon \rho_i^\varepsilon \vec{u}_\varepsilon^{(i)} + \vec{J}_\varepsilon^{(i)} + \rho_i^\varepsilon \vec{f}^{(i)} \right] \cdot \nabla(\tau \triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)) \, dx \right| \leq$$
$$\leq \int\limits_{\Omega} \left[\rho_i^\varepsilon |\vec{u}_\varepsilon^{(i)}| + |\vec{J}_\varepsilon^{(i)}| + \rho_i^\varepsilon |\vec{f}^{(i)}| \right] |\nabla \tau| |\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)| \, dx +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} |\tau| \left[\rho_i^\varepsilon |\vec{u}_\varepsilon^{(i)}| + |\vec{J}_\varepsilon^{(i)}| + \rho_i^\varepsilon |\vec{f}^{(i)}| \right] |\nabla \triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)| \, dx \leq \tag{2.97}$$
$$\leq C \left(\|\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{k=1}^{3} \|A_k[(\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau]\|_{C(\overline{\Omega})} \right), \; i, j = 1, 2.$$

Таким образом, из результатов полученных в I - IV вытекает справедливость леммы 2.6.

2.3.2. Ренормализация уравнений неразрывности

Следующий шаг посвящен доказательству того, что слабые решения уравнений неразрывности (2.1) являются ренормализованными решениями. Отметим сначала следующее утверждение, аналогичное доказанному в работе [43].

Предложение 2.8. *Пусть ρ, $\vec{u}$ – решение уравнения $div(\rho\vec{u}) = 0$ в $D'(\Omega)$ такое, что $\rho \in L^2(\Omega)$, $\vec{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Тогда, продолжая ρ и $\vec{u}$ нулем в $\mathbb{R}^3 \backslash \Omega$, получим, что продолженные функции являются решением данного уравнения в $D'(\mathbb{R}^3)$, т. е. для любых функций $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ выполнено тождество*
$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \rho \vec{u} \cdot \triangledown \psi \, dx = 0. \tag{2.98}$$

Доказательство. Необходимо доказать, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \rho\vec{u}\cdot\bigtriangledown\psi\,dx = 0 \ \ \forall\ \psi \in D(\mathbb{R}^3).$$

Для этого выберем последовательность функций $\phi_m \in D(\Omega)$ $(\equiv C_0^\infty(\Omega))$ таких, что $0 \le \phi_m \le 1$, $\phi_m(x) = 1$ для $x : dist[x,\partial\Omega] \ge \frac{1}{m}$, $|\nabla\phi_m| \le 2m$ $\forall\ x \in \Omega$. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \rho\vec{u}\cdot\bigtriangledown\psi\,dx = \int\limits_{\Omega} \rho\vec{u}\cdot\bigtriangledown(\psi\phi_m)\,dx + \int\limits_{\Omega} \rho(1-\phi_m)\vec{u}\cdot\bigtriangledown\psi\,dx - \int\limits_{\Omega} \rho\psi\vec{u}\cdot\bigtriangledown\phi_m\,dx.$$

Так как

$$\int\limits_{\Omega} \rho\vec{u}\cdot\bigtriangledown(\psi\phi_m)\,dx = 0,$$

то достаточно доказать соотношение

$$\int\limits_{\Omega} \rho\psi\vec{u}\cdot\bigtriangledown\phi_m\,dx \to 0,\ \ m \to \infty. \tag{2.99}$$

Из условия $\vec{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ следует $dist^{-1}[x,\partial\Omega]\cdot|\vec{u}(x)| \in L^2(\Omega)$. С другой стороны, $dist[x,\partial\Omega]\cdot|\bigtriangledown\phi_m| \le 2$ и $dist[x,\partial\Omega]\cdot|\bigtriangledown\phi_m(x)| \to 0$ п.в. в Ω. Отсюда следует (2.99).

В силу предложения 2.8 из уравнений (2.65) следует (считая ρ_i, $\vec{u}^{(i)}$, $i = 1,2$ продолженными нулем в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$), что для любых $\psi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $i = 1,2$ выполняются равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \rho_i\vec{u}^{(i)}\cdot\bigtriangledown\psi_i\,dx = 0,\ \ i = 1,2. \tag{2.100}$$

Введем в рассмотрение оператор усреднения

$$S_h[v] = \frac{1}{h^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \theta\left(\frac{|x-y|}{h}\right)v(y)dy,$$

(где $\theta\,(t)$ – бесконечно дифференцируемая, четная неотрицательная функция одного переменного t $(-\infty < t < +\infty)$, равная нулю для $|t| \ge 1$ и такая, что $\int\limits_{\mathbb{R}^3} \theta(|t|)\,dt = 1$, h – произвольное положительное число). Как известно, оператор усреднения S_h обладает следующими свойствами:

Если $v \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ *и* $v = 0$ *в* $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, *то*

$$\|S_h[v]\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C\|v\|_{L^p(\Omega)} \text{ и } \|S_h[v] - v\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \to 0 \text{ при } h \to 0. \qquad (2.101)$$

Кроме того, будем пользоваться следующей леммой R. J. DiPerna и P.-L. Lions [56]:

Если $\rho \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $\vec{u} \in W^{1,q}(\mathbb{R}^3)$, $1 \leq q,\ p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$, *то*

$$\begin{gathered} \|div(S_h[\rho\vec{u}]) - div(S_h[\rho]\vec{u})\|_{L^r(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}\|_{W^{1,q}(\mathbb{R}^3)} \text{ и} \\ \|div(S_h[\rho\vec{u}]) - div(S_h[\rho]\vec{u})\|_{L^r(\mathbb{R}^3)} \to 0 \text{ при } h \to 0, \text{ если } r < \infty. \end{gathered} \qquad (2.102)$$

Приняв в качестве тестовых функций в (2.100) $\psi_i = \frac{1}{h^3}\,\theta\left(\frac{|x-y|}{h}\right)$, $i = 1, 2$, получаем равенства

$$\mathrm{div}(S_h[\rho_i]\vec{u}^{(i)}) = r_i^h,\ i = 1, 2, \qquad (2.103)$$

где $r_i^h = \mathrm{div}(S_h[\rho_i]\vec{u}^{(i)}) - \mathrm{div}(S_h[\rho_i\vec{u}^{(i)}]) \to 0$ при $h \to 0$ в $L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\mathbb{R}^3)$, $i = 1, 2$ согласно свойству (2.102). Теперь, умножая уравнения (2.103) на $G_i'(S_h[\rho_i])$ ($G_i(\rho_i) \in C'(\mathbb{R})$ — произвольная функция как в условии (**2**) определения 2.1), $i = 1, 2$, получаем

$$\begin{gathered} \mathrm{div}(G_i(S_h[\rho_i])\vec{u}^{(i)}) + (G_i'(S_h[\rho_i])S_h[\rho_i] - G_i(S_h[\rho_i]))\mathrm{div}(\vec{u}^{(i)}) = \\ = r_i^h G_i'(S_h[\rho_i]),\ i = 1, 2. \end{gathered} \qquad (2.104)$$

Из (2.104) следует, что для произвольных функций $\psi_i \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $i = 1, 2$, имеют место тождества

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} G_i(S_h[\rho_i])\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla\psi_i\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^3} (G_i(S_h[\rho_i]) - G_i'(S_h[\rho_i])S_h[\rho_i])\mathrm{div}(\vec{u}^{(i)})\psi_i\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^3} r_i^h G_i'(S_h[\rho_i])\psi_i\,dx = 0,\ i = 1, 2. \qquad (2.105)$$

Совершая в тождествах (2.105) предельный переход при $h \to 0$, приходим к равенствам

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} G_i(\rho_i)\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla\psi_i\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^3} (G_i(\rho_i) - G_i'(\rho_i)\rho_i)\psi_i \mathrm{div}\vec{u}^{(i)}\,dx = 0,\ i = 1, 2, \qquad (2.106)$$

которые справедливы для всех $\psi_i \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $i = 1, 2$. Этот факт вытекает из следующих соотношений для отдельных слагаемых в (2.105):

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^3} (G_i(S_h[\rho_i]) - G_i(\rho_i))\, \vec{u}^{(i)} \cdot \bigtriangledown \psi_i \, dx \right| \le$$
$$\le C \| S_h[\rho_i] - \rho_i \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0 \ \text{ при } \ h \to 0, \ \ i = 1, 2; \tag{2.107}$$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^3} ((G_i'(S_h[\rho_i])S_h[\rho_i] - G_i(S_h[\rho_i]) - (G_i'(\rho_i)\rho_i - G_i(\rho_i)))\, \mathrm{div}\vec{u}^{(i)} \psi_i \, dx \right| \le$$
$$\le C \| (G_i'(S_h[\rho_i])S_h[\rho_i] - G_i(S_h[\rho_i]) - (G_i'(\rho_i)\rho_i - G_i(\rho_i)) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$$
$$\text{при } \ h \to 0, \ \ i = 1, 2; \tag{2.108}$$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^3} r_i^h G_i'(S_h[\rho_i]) \psi_i \, dx \right| \le C \| r_i^h \|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \to 0 \ \text{ при } \ h \to 0, \ \ i = 1, 2. \tag{2.109}$$

Таким образом, предельные функции ρ_i, $i = 1, 2$ являются ренормализованными решениями уравнений (2.1).

2.3.3. Сильная сходимость плотностей составляющих смеси

Можно убедиться, что соотношения (2.107)-(2.109) справедливы также в том случае, если принять в качестве $G_i(z) = z \ln(z + \delta)$, $i = 1, 2$, $\delta > 0$. Следовательно, из (2.105) с $\psi_i = 1$, $i = 1, 2$, получаем равенства

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\rho_i^2}{\rho_i + \delta}\, \mathrm{div}\vec{u}^{(i)} \, dx = 0, \ \ i = 1, 2. \tag{2.110}$$

Совершая в последних равенствах предельный переход при $\delta \to 0$, приходим к следующим соотношениям

$$\int\limits_{\Omega} \rho_i \, \mathrm{div}\vec{u}^{(i)} \, dx = 0, \ \ i = 1, 2. \tag{2.111}$$

С другой стороны, умножая уравнения (2.12) на $\ln(\rho_i^\varepsilon + \delta) + \dfrac{\rho_i^\varepsilon}{\rho_i^\varepsilon + \delta}$, $\delta > 0$ и интегрируя результат по области Ω, получаем, что

$$\int\limits_{\Omega} \rho_i^\varepsilon \mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \, dx \le \delta \int\limits_{\Omega} |\mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon^{(i)}| \, dx + \varepsilon \frac{M_i}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} \ln(\rho_i^\varepsilon + \delta) \, dx -$$

$$-\varepsilon\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\varepsilon}\ln(\rho_i^{\varepsilon}+\delta)\,dx+2\varepsilon M_i,\ \ i=1,2,$$

откуда, учитывая неравенства $\ln z+1\le z$, $-z(\ln z+1)<z+1$, имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\varepsilon}\mathrm{div}\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}\,dx\le\delta\|\mathrm{div}\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}\|_{L^1(\Omega)}+\varepsilon\frac{M_i}{|\Omega|}(M_i+\delta|\Omega|-|\Omega|)+\\ +\varepsilon(\delta M_i+\delta^2|\Omega|+2M_i+\delta|\Omega|+|\Omega|)+2\varepsilon M_i,\ \ i=1,2.\end{gathered}\tag{2.112}$$

Совершая в (2.112) предельный переход при $\delta\to0$, приходим, в силу оценки (2.16), к следующим неравенствам

$$\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\varepsilon}\mathrm{div}\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}\,dx\le\varepsilon C\left(\|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)},\lambda_{ij},\mu_{ij},\gamma,|\,\Omega|,M_i,a\right),\ \ i=1,2.\tag{2.113}$$

Предполагая, что $\lambda_{12}+2\mu_{12}=0$, рассмотрим теперь соотношение (2.69) при $i=j=1$:

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\Omega}\left[(\rho_1^{\varepsilon})^{\gamma}-(\lambda_{11}+2\mu_{11})\mathrm{div}\vec{u}_{\varepsilon}^{(1)}\right]\rho_1^{\varepsilon}\tau^2\,dx=\\ =\int\limits_{\Omega}\left[\overline{p}_1-(\lambda_{11}+2\mu_{11})\mathrm{div}\vec{u}^{(1)}\right]\rho_1\tau^2\,dx\\ \forall\ \tau\in C_0^{\infty}(\Omega).\end{gathered}\tag{2.114}$$

Возьмем неубывающую последовательность неотрицательных функций τ_n такую, что $\tau_n\in C_0^{\infty}(\Omega)$, $\tau_n\to1$ при $n\to\infty$ п.в. в Ω, $0\le\tau_n\le1$. Объединяя (2.111), (2.113) и (2.114), получаем для любых $m\le n$

$$\begin{gathered}\varlimsup_{\varepsilon\to0+}\int\limits_{\Omega}p_1^{\varepsilon}\rho_1^{\varepsilon}\tau_m^2\,dx\le\varlimsup_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\Omega}p_1^{\varepsilon}\cdot\rho_1^{\varepsilon}\tau_n^2\,dx\le\\ \le\varlimsup_{\varepsilon\to0+}\int\limits_{\Omega}\tau_n^2\left[p_1^{\varepsilon}-(\lambda_{11}+2\mu_{11})\mathrm{div}\vec{u}_{\varepsilon}^{(1)}\right]\rho_1^{\varepsilon}\,dx+\\ +(\lambda_{11}+2\mu_{11})\varlimsup_{\varepsilon\to0+}\int\limits_{\Omega}\tau_n^2\mathrm{div}\vec{u}_{\varepsilon}^{(1)}\rho_1^{\varepsilon}\,dx\le\\ \le\int\limits_{\Omega}\tau_n^2\left[\overline{p}_1-(\lambda_{11}+2\mu_{11})\mathrm{div}\vec{u}^{(1)}\right]\rho_1\,dx+\end{gathered}\tag{2.115}$$

$$+(\lambda_{11}+2\mu_{11})\overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}}\int\limits_{\Omega}|\tau_n^2-1||\mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon^{(1)}|\rho_1^\varepsilon\,dx+(\lambda_{11}+2\mu_{11})\overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}}\int\limits_{\Omega}\mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon^{(1)}\rho_1^\varepsilon\,dx$$

$$\le\int\limits_{\Omega}\overline{p}_1\rho_1\,dx+(\lambda_{11}+2\mu_{11})\int\limits_{\Omega}|\tau_n^2-1||\mathrm{div}\vec{u}^{(1)}|\rho_1\,dx+\eta_1(n)\le$$

$$\le\int\limits_{\Omega}\overline{p}_1\rho_1\,dx+\eta_1(n)+\eta_2(n),$$

где $\eta_1(n)$, $\eta_2(n)\to 0$ при $n\to\infty$. Переходя к пределу при $n\to\infty$ в неравенстве (2.115), имеем

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}}\int\limits_{\Omega}p_1^\varepsilon\rho_1^\varepsilon\tau_m^2\,dx\le\int\limits_{\Omega}\overline{p}_1\rho_1\,dx\qquad\forall\ m=1,2,...\tag{2.116}$$

Так как функция $z\mapsto z^\gamma$ $(\gamma>1)$ монотонна на $\mathbb{R}_0^+$, то

$$\int\limits_{\Omega}\tau_m^2\left[(\rho_1^\varepsilon)^\gamma-v^\gamma\right]\cdot(\rho_1^\varepsilon-v)\,dx\ge 0\ \forall\,v\in K=\{v\in L^{2\gamma}(\Omega):\ v\ge 0\ \text{п.в. в }\Omega\}$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\Omega}\tau_m^2(\rho_1^\varepsilon)^\gamma\rho_1^\varepsilon\,dx\ge\int\limits_{\Omega}\tau_m^2v^\gamma[\rho_1^\varepsilon-v]\,dx+\int\limits_{\Omega}\tau_m^2(\rho_1^\varepsilon)^\gamma v\,dx.\tag{2.117}$$

Из (2.116) и (2.117) следует неравенство

$$\int\limits_{\Omega}\overline{p}_1\rho_1\,dx\ge\int\limits_{\Omega}\tau_m^2v^\gamma[\rho_1-v]\,dx+\int\limits_{\Omega}\tau_m^2\overline{p}_1v\,dx,\ m=1,2,...\tag{2.118}$$

Совершая в (2.118) предельный переход при $m\to\infty$, приходим к неравенству

$$\int\limits_{\Omega}(\overline{p}_1-v^\gamma)(\rho_1-v)\,dx\ge 0\ \ \forall\ v\in K.\tag{2.119}$$

Полагая здесь $v=\rho_1+\eta\psi$, $\eta>0$, $\psi\in K$, получим

$$-\eta\int\limits_{\Omega}[\overline{p}_1-(\rho_1+\eta\psi)^\gamma]\psi\,dx\ge 0,$$

т. е. $\forall\ \psi\in K$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{\Omega}[\overline{p}_1-(\rho_1+\eta\psi)^\gamma]\psi\,dx\le 0.$$

Устремляя $\eta \to 0$ отсюда получаем

$$\int\limits_{\Omega} [\overline{p}_1 - \rho_1^{\gamma}]\psi\, dx \leq 0 \ \ \forall\ \psi \in K.$$

С другой стороны (в силу выпуклости $z \mapsto z^{\gamma}$) $\overline{p}_1 \geq \rho_1^{\gamma}$ п.в. и, следовательно, имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega} [\overline{p}_1 - \rho_1^{\gamma}]\psi\, dx = 0 \ \ \forall\ \psi \in K. \tag{2.120}$$

Замечая, наконец, что произвольная функция $\psi \in L^{2\gamma}(\Omega)$ может быть представлена в виде разности двух неотрицательных п.в. функций из $L^{2\gamma}(\Omega)$ ($\psi = \psi^{+} - \psi^{-}$) получим, что равенство вида (2.120) справедливо для произвольной функции ψ из $L^{2\gamma}(\Omega)$ и поэтому имеет место равенство

$$\overline{p}_1 = \rho_1^{\gamma}. \tag{2.121}$$

Из формул (2.57) и (2.121) (в силу теоремы Рисса) вытекает, что $\rho_1^{\varepsilon} \to \rho_1$ сильно в $L^{\gamma}(\Omega)$ из чего, в свою очередь, следует

$$\rho_1^{\varepsilon} \to \rho_1 \ \text{ сильно в } L^{q}(\Omega),\ q \in [1, 2\gamma). \tag{2.122}$$

Рассмотрим теперь соотношение из (2.69) при $i = 1$, $j = 2$, т. е.

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega} \tau^2 \left[(\rho_1^{\varepsilon})^{\gamma} - (\lambda_{11} + 2\mu_{11})\mathrm{div}\vec{u}_{\varepsilon}^{(1)}\right] \rho_2^{\varepsilon}\, dx = \\ = \int\limits_{\Omega} \tau^2 \left[\overline{p}_1 - (\lambda_{11} + 2\mu_{11})\mathrm{div}\vec{u}^{(1)}\right] \rho_2\, dx \ \forall\ \tau \in C_0^{\infty}(\Omega).\end{gathered} \tag{2.123}$$

Из соотношений (2.57), (2.121) и (2.122) получаем

$$\int\limits_{\Omega} \tau^2(\rho_1^{\varepsilon})^{\gamma}\rho_2^{\varepsilon}\, dx \to \int\limits_{\Omega} \tau^2\rho_1^{\gamma}\rho_2\, dx \text{ при } \varepsilon \to 0$$

и поэтому в силу (2.123) справедлива формула

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega} \tau^2\mathrm{div}\vec{u}_{\varepsilon}^{(1)}\rho_2^{\varepsilon}\, dx = \int\limits_{\Omega} \tau^2\mathrm{div}\vec{u}^{(1)}\rho_2\, dx \ \forall\ \tau \in C_0^{\infty}(\Omega). \tag{2.124}$$

Далее, из соотношения (2.69) при $i = 2$, $j = 2$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega} \tau^2 \left[(\rho_2^\varepsilon)^\gamma - (\lambda_{21} + 2\mu_{21})\mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon^{(1)} - (\lambda_{22} + 2\mu_{22})\mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon^{(2)}\right] \rho_2^\varepsilon\, dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \tau^2 \left[\overline{p_2} - (\lambda_{21} + 2\mu_{21})\mathrm{div}\vec{u}^{(1)} - (\lambda_{22} + 2\mu_{22})\mathrm{div}\vec{u}^{(2)}\right] \rho_2\, dx \tag{2.125}$$

и формулы (2.124) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega} \tau^2 \left[(\rho_2^\varepsilon)^\gamma - (\lambda_{22} + 2\mu_{22})\mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon^{(2)}\right] \rho_2^\varepsilon\, dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \tau^2 \left[\overline{p}_2 - (\lambda_{22} + 2\mu_{22})\mathrm{div}\vec{u}^{(2)}\right] \rho_2\, dx \ \forall\ \tau \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.126}$$

Из соотношения (2.126), дословно повторяя вывод формулы (2.121), получаем, что

$$\overline{p}_2 = \overline{(\rho_2^\varepsilon)^\gamma} = \rho_2^\gamma. \tag{2.127}$$

Теорема 2.2 доказана.

Библиографический список

[1] Антонцев, С. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С. Н. Антонцев, А. В. Кажихов, В. Н. Монахов. – Новосибирск: Наука, 1983.

[2] Боговский, М. Е. О решении некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad / М. Е. Боговский // Труды семинара С. Л. Соболева. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. – 1980. – Т. 1. – С. 5 – 40.

[3] Борисенко, А. И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления / А. И. Борисенко. – М.: Высшая школа, 1972.

[4] Вишик, М. И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений / М. И. Вишик // Математический сборник. – Т. 29. – № 3. – 1951. – С. 615 – 676.

[5] Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. М. Захариас. – М.: Мир, 1978.

[6] Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989.

[7] Злотник, А. А. Равномерные оценки и стабилизация решений системы уравнений одномерного движения многокомпонентной баротропной смеси / А. А. Злотник // Математические заметки. – Т. 58. – № 2. – 1995. – С. 307 – 312.

[8] Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967.

[9] Кажихов, А. В. Корректность начально-краевой задачи для модельной системы уравнений многокомпонентной смеси / А. В. Кажихов,

А. Н. Петров // Динамика сплошной среды. – Выпуск. 35. – 1978. – С. 61 – 73.

[10] Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: Наука, 1976.

[11] Кочин, Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н. Е. Кочин. – М.: Наука, 1965.

[12] Кучер, Н. А. Разрешимость уравнений баротропных течений смесей вязких сжимаемых жидкостей / Н. А. Кучер, Д. А. Прокудин; Кемеровский государственнй университет. – Кемерово, 2009. – 32 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 339-В2009.

[13] Кучер, Н. А. Корректность первой краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей / Н. А. Кучер, Д. А. Прокудин // Вестник Новосибирского государственного университета. – Т. 9. – № 3. – 2009. – С. 33 – 53.

[14] Кучер, Н. А. Стационарные решения уравнений смеси вязких сжимаемых жидкостей / Н. А. Кучер, Д. А. Прокудин // Сибирский журнал индустриальной математики. – Т. 12. – № 3 (39). – 2009. – С. 52 – 65.

[15] Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973.

[16] Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. – М.: Наука, 1964.

[17] Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – Т. VI. – М.: Наука, 1986.

[18] Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1970.

[19] Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1965.

[20] Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. – М.: Наука, 1976.

[21] Нигматулин, Р. И. Динамика многофазных сред / Р. И. Нигматулин. – Ч. 1. – М.: Наука, 1987.

[22] Никольский, С. Л. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. Л. Никольский. – М.: Наука, 1969.

[23] Папин, А. А. Существование решения "в целом" уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. I. Постановка задачи и вспомогательные утверждения / А. А. Папин // Сибирский журнал индустриальной математики. – Т. 9. – № 2 (26). – 2006. – С. 116 – 136.

[24] Папин, А. А. Существование решения "в целом" уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. II. Результаты о разрешимости / А. А. Папин // Сибирский журнал индустриальной математики. – Т. 9. – № 3 (27). – 2006. – С. 111 – 123.

[25] Папин, А. А. Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений движения двухфазной смеси / А. А. Папин. – Барнаул: Алтайский государственный университет, 2007.

[26] Папин, А. А. Краевые задачи двухфазной фильтрации / А. А. Папин. – Барнаул: Алтайский государственный университет, 2009.

[27] Петровский, И. Г. Об аналитичности решений систем уравнений с частными производными / И. Г. Петровский // Математический сборник. – Т. 5 (47). – № 1. – 1939. – С. 3 – 70.

[28] Плотников, П. И. Стационарные решения уравнений Навье-Стокса для двухатомных газов / П. И. Плотников, Ж. Соколовски // Успехи математических наук. – Т. 62. – № 3 (375). – 2007. – С. 117 – 148.

[29] Прокудин, Д. А. Анализ разрешимости краевых задач для уравнений смесей жидкостей / Д. А. Прокудин: диссертация кандидата физико-математических наук. – Кемеровский государственный университет, 2010.

[30] Рудин, У. Функциональный анализ / У. Рудин. – М.: Мир, 1975.

[31] Седов, Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – Т. 1. – М.: Наука, 1970.

[32] Соболев, С. Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций / С. Л. Соболев. – М.: Наука, 1989.

[33] Солонников, В. А. Об общих краевых задачах, эллиптических в смысле А. Дуглиса - Л. Ниренберга, I / В. А. Солонников // Известия АН СССР. – Т. 28. – № 3. – 1964. – С. 665 – 706.

[34] Солонников, В. А. Об общих краевых задачах для систем эллиптических уравнений в смысле А. Дуглиса - Л. Ниренберга, II / В. А. Солонников // Труды математического института им. В. А. Стеклова. – Т. XCII. – 1966. – С. 233 – 297.

[35] Треногин, В. А. Функциональный анализ / В. А Треногин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

[36] Френкель, Я. И. Курс теоретической механики / Я. И. Френкель. – Л.; М.: Гостехиздат, 1940.

[37] Amann, H. Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems / H. Amann. – In Function spaces, differential operators and nonlinear analysis. – V. 133. – Teubner, Stuttgart, 1993.

[38] Agmon, S. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I / S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. – V. 12. – 1959. – P. 623 – 727.

[39] Agmon, S. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II / S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. – V. 17. – 1964. – P. 35 – 92.

[40] Douglis, A. Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations / A. Douglis, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. – V. 8. – 1955. – P. 503 – 538.

[41] Feireisl, E. On the motion of a viscous compressible fluid driven by a time-periodic external force / E. Feireisl, S. Matusu-Necasova, H. Petzeltova, I. Straskraba // Arch. Rational Mech. Anal. – V. 149. – 1999. – P. 69 – 96.

[42] Feireisl, E. On compactness of solutions to the compressible isentropic Navier-Stokes equations when the denisty is not square integrable / E. Feireisl // Comment. Math. Univ. Carolinae. – V. 42. – 2001. – P. 83 – 98.

[43] Feireisl, E. On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations / E. Feireisl, A. Novotny, H. Petzeltova // Math. Fluid Mech. – V. 3. – 2001. – P. 358 – 392.

[44] Feireisl, E. Dynamics of Viscous Compressible Fluids / E. Feireisl. – New York: Oxford University Press, 2004.

[45] Feireisl, E., Novotny A. Singular limits in thermodynamics of viscous fluids / E. Feireisl, A. Novotny. – Berlin: Birkhauser Verlag, 2009.

[46] Frehse, J. On a Stokes-like system for mixtures of fluids / J. Frehse, S. Goj, J. Malek // SIAM J. Math. Anal. – V. 36. – № 4. – 2005. – P. 1259 – 1281.

[47] Frehse, J. A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum / J. Frehse, S. Goj, J. Malek // Appl. Math. – V. 50. – № 6. – 2005. – P. 527 – 541.

[48] Frehse, J. On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids / J. Frehse, W. Weigant // Appl. Math. – V. 53. – № 4. – 2008. – P. 319 – 345.

[49] Galdi, G. P. An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations, I. / G. P. Galdi. – New York: Springer-Verlag, 1994.

[50] Geymonat, G. Alcuni risultati di teoria spettrale per i problemi ai limiti lineari ellittici / G. Geymonat, P. Grisvard // Rend. Sem. Mat. – Univ. Padova. – V. 38. – 1967. – P. 121 – 173.

[51] John, F. Plane waves and spherical means applied to partial differential equations / F. John. – New York: Dover Publ., 2004.

[52] Lions, J.-L. Quelques remarques sur les probl‘emes de Dirichlet et de Neumann / J.-L. Lions // Seminaire Jean Leray. – Exp. 6. – 1961 – 1962. – P. 1 – 18.

[53] Lions, P.-L. Existence globale de solutions pour les equations de Navier-Stokes compressible isentropiques / P.-L. Lions // C. R. Acad. Sci. Paris. – Ser. 1. – № 316. – 1993. – P. 1335 – 1340.

[54] Lions, P.-L. Compacticite des solutions des equations de Navier-Stokes compressible isentropiques / P.-L. Lions // C. R. Acad. Sci. Paris. – Ser. 1. – № 317. – 1993. – P. 115 – 120.

[55] Lions, P.-L. Bornes sur la deniste pour les de Navier-Stokes compressible isentropiques avec conditions aux limits de Dirichlet / P.-L. Lions // C. R. Acad. Sci. Paris. – Ser. 1. – № 328. – 1999. – P. 659 – 662.

[56] Lions, P.-L. Mathematical topics in fluid mechanics. V. 1: Incompressible Models. / P.-L. Lions. – New York: Oxford University Press, 1996.

[57] Lions, P.-L. Mathematical topics in fluid mechanics. V. 2: Compressible Models. / P.-L. Lions. – New York: Oxford University Press, 1998.

[58] Morrey, C. B. On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations / C. B. Morrey, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. – V. 10. – 1957. – P. 271 – 290.

[59] Mucha, P. On the steady compressible Navier-Stokes-Fourier system / P. Mucha, M. Pokorny // Comm. in Math. Phys. – V. 288. – № 1. – 2007. – P. 349 – 377.

[60] Mucha, P. Weak solutions to equations of steady compressible heat conducting fluids / P. Mucha, M. Pokorny // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – V. 20. – № 5. – 2010. – P. 785 – 813.

[61] Novotny, A. Introduction to mathematical theory of compressible flow / A. Novotny, I. Straskraba. – New York: Oxford University Press, 2004.

[62] Rajagopal, K. R. Mechanics of mixtures / K. R. Rajagopal, L. Tao. – London: World Scientific Publishing, 1995.

[63] Schechter, M. On L^p estimates and regularity / M. Schechter // I. Amer. J. Math. – V. 85. – 1963. – P. 1 – 13.

Оглавление