А.Е.Мамонтов

Практикум по уравнениям в частных производных

Новосибирск 2016

А.Е.Мамонтов

Практикум по уравнениям в частных производных

Новосибирск
2016

УДК 517.95
ББК В161.62
М226

Мамонтов А. Е.

Практикум по уравнениям в частных производных / А. Е. Мамонтов. — Новосибирск: Издательство Института математики, 2016. — 112 с.

ISBN 978–5–91907–033–7

Конспект семинарских (практических) занятий по курсу «Уравнения математической физики», проводившихся автором на 3 курсе механико-математического факультета Новосибирского государственного университета в течение 2000-х годов.

Для студентов математических специальностей и их преподавателей.

УДК 517.95
ББК В161.62
М226

ISBN 978–5–91907–033–7

Предисловие

Предлагаемые разработки фиксируют проведенные мной неоднократно практические занятия по курсу «Уравнения математической физики» (т. е. уравнения в частных производных) на механико-математическом факультете (ММФ) Новосибирского государственного университета (НГУ). Данное учебное пособие является продолжением ранее изданного аналогичного пособия [32][1] по ОДУ[2], хотя может использоваться и независимо. В предисловии к [32] я подробно пояснил цели издания обеих книжек, поэтому здесь мне остается лишь дать комментарии, специфические именно для предлагаемого курса УЧП.

Соответствующий теоретический курс (читавшийся для студентов 3 курса ММФ НГУ) опубликован в [20–22][3]. В предисловиях к этим книжкам я изложил подробно свое ви́дение университетского курса УЧП (УМФ), пояснив при этом, почему теоретический курс называется именно УМФ, а не УЧП. Для практического курса более уместно все-таки название УЧП, как это можно видеть по спектру изучаемых вопросов. По сравнению с ОДУ курс УЧП обладает рядом особенностей, частично перечисленных в [20–22]. Применительно к практикуму основная особенность в том, что тщетны попытки создать логически замкнутую программу годового курса, которая могла бы претендовать хоть на какой-то полноценный охват теории УЧП. Другими словами, годовой курс УЧП обречен быть своего рода «открытой системой»[4]. Пожалуй, такова судьба любого честно составленного современного математического курса, но, скажем, по ОДУ можно хотя бы создать видимость некой законченной годовой программы, в которой студентам дано ба-

[1]Здесь и далее в квадратных скобках приведены ссылки на литературу, список которой находится в конце пособия.

[2]Аббревиатуры расшифрованы в списке, приведенном в конце пособия.

[3]В конце пособия приведен подробный план (конспект) этого курса.

[4]По выражению С.К. Годунова, курс УМФ — это набор этюдов.

зовое представление о предмете. Здесь же, в теории УЧП, даже такая видимость невозможна — обязательно будут зиять видимые всем «дыры» даже не начатых важных тем.

Поэтому, следуя негласной традиции и лишь вербализовав ее, я фиксировал упомянутую «этюдную» структуру практического курса, и лишь разделил «этюды» на обязательные и «факультативные». Подробно принципы планирования курса изложены в специальном разделе в конце пособия. Сущность их в том, что предлагаемые в пособии планы тем в совокупности заведомо превышают рамки годового курса, и от преподавателя требуется провести предварительный отбор тех из них, которые он в текущем году планирует «пройти» (хотя этот отбор производится в рамках определенных ограничений).

Источники задач:

- М.—М.[5] — основной источник. Логически ситуация в основном обратная, т. е. соответствующие разделы этого задачника написаны по итогам ведения занятий, зафиксированных сначала в виде планов тем (но публикуемых лишь сейчас в предлагаемой книжке). С другой стороны, не менее половины задачника М.—М. представлена материалами, разработанными Е.В. Мамонтовым задолго до того, как я вообще взялся за курс УМФ. Особенно это касается тем, так и не вошедших в данное пособие, и лишь упомянутых в годовом плане (приведенном в конце пособия). Короче говоря, данная книжка и М.—М. могут рассматриваться как сообщающиеся сосуды, обмен между которыми я даже не ставил себе целью здесь отслеживать. Основная разница между упомянутыми сосудами лишь в том, что в М.—М. не ставилась цель окончательной методической разработки планов занятий, а в предлагаемом пособии это было одним из приоритетов.

[5]Здесь и далее это: Мамонтов А.Е., Мамонтов Е.В. Сборник задач по уравнениям математической физики. Новосибирск, НГУ, 2006 (см. [28] в списке литературы).

- Г.—З.[6] — второй по значимости источник. Здесь, впрочем, уместно оговорить следующее немаловажное обстоятельство. Как написано в предисловии к Г.—З., часть материала этого задачника предоставлена другими людьми (не из числа двух авторов, обозначенных на титуле книги), а параграф по обобщенным решениям и вовсе целиком написан Е.В. Мамонтовым, который, тем не менее, в число авторов книги Г.—З. не был включен. Поэтому мы не стесняясь перенесли (после определенной доработки с учетом моего опыта) этот параграф в свой задачник М.—М., а теперь этот же материал вошел в тему 12 предлагаемой книжки.

- Смирнов[7] — использован незначительно в теме о приведении к каноническому виду.

- Филиппов[8] — использован незначительно в теме об УЧП I порядка.

Кроме того, имеется немалое количество задач, не заимствованных из имеющихся задачников (но и не вошедших в М.—М.), часть из которых я узнал при общении с Г.В. Демиденко.

После многих задач (пунктов плана) имеются пометки, рекомендующие их к тому или иному применению, из которых неочевидна лишь пометка $(*)$, означающая (впрочем, вполне традиционно) необязательный (дополнительный) характер и/или повышенную трудность. Также неочевидны применяе-

[6]Здесь и далее это: Годунов С.К., Золотарева Е.В. Сборник задач по уравнениям математической физики. Новосибирск, НГУ, 1987 (см. [27] в списке литературы).

[7]Здесь и далее это: Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. М., Наука, 1975 (см. [29] в списке литературы).

[8]Здесь и далее это: Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., РХД, 2000 (см. [30] в списке литературы), или любое другое издание.

мые обозначения вида $(N)_0$ (это однородное уравнение, соответствующее уравнению (N)) и $(N)_k$ (k-е уравнение в (N)).

Поскольку я сначала разработал план практических занятий, а потом уже́ приступил к чтению лекций по теоретическому курсу, то приведенный план значительно нагружен теоретическим материалом, изучаемым «в виде задач». Впоследствии бо́льшая часть этого материала вошла в текст лекций [20–22]. Если лекции читаются по программе, приведенной в конце пособия, то упомянутые «теоретические» пункты можно сократить, т. е. ограничиться ссылкой на лекции. В случае если лекции читаются иначе, то эти пункты послужат хорошим дополнением к работе лектора.

Я сознательно не подвергал предлагаемую книгу «парадному» редактированию, сохранив стиль конспекта (в чем-то разрозненных) занятий. В частности, потому, что мне так и не удалось довести материал до законченного вида (что, впрочем, в таком предмете как УЧП видимо пока и невозможно), да я и не ставил себе такой цели, в связи еще и с тем что преподавание курса УЧП мною (пока?) остановлено, и хватает других забот. Поэтому пособие может производить впечатление несистематичности (например, векторы во всей книжке обозначаются обычным шрифтом, а в теме 19 — полужирным), но это именно внешнее впечатление — сквозная проверка на непротиворечивость обозначений и прочее минимальное редактирование все-таки проведено. Моей целью была фиксация проделанной работы с тем, чтобы она не лежала под спудом, в то время как в методическом сопровождении университетского курса УЧП (как подробно описано в предисловии к [32]) еще много недоделанной работы. Надеюсь, что мой труд принесет кому-нибудь пользу.

Мамонтов А.Е.,
Новосибирск,
июнь 2016 г.

План занятий по теме №1,2:

УЧП I порядка и их характеристики: квазилинейные и нелинейные уравнения, и системы со скалярным дифференциальным оператором[9].

2 занятия

[Из М.—М. задействовано Приложение: по сути все, кроме пп. 6,10]

[здесь начинаем сразу с квазилинейных УЧП и только методом характеристик, лишь слегка вспоминая о ПИ. Основная цель изучения этой темы в курсе УМФ — развить понятие характеристик и подойти к понятию ХМ для произвольных УЧП.]

1. [все что в п. 1 можно сократить смотря по тому, что уже было на лекции и по настроению] Напомним, что такое УЧП, в т. ч. I порядка, квазилинейное, линейное. Особую роль играют случаи:

   (a) одного квазилинейного (в т. ч. линейного) УЧП I порядка;

   (b) системы квазилинейных УЧП I порядка со СДО (позже скажем что это значит);

   (c) одного нелинейного УЧП I порядка,

   т. к. (a) и (b) решаются с помощью так наз. *характеристик*, а (c) сводится к (b) с помощью *дифференциального продолжения*. Позже мы поясним эти понятия. Начнем с (a). Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x,u). \tag{1}$$

[9]Предполагается знакомство (в курсе ОДУ — см. [32], в т. ч. замечание в обзорном годовом плане там) с ПИ ОДУ и решением с их помощью линейных и квазилинейных УЧП I порядка.

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — независимые переменные, $u = u(x)$ — искомая функция, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Напомним, что с (1) связана так наз. *характеристическая система* ОДУ:

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i(x, u), \quad \frac{du}{ds} = f(x, u). \tag{2}$$

В курсе ОДУ мы узнали, что (2) имеет n независимых ПИ $\{ \Phi_1(x, u), \dots, \Phi_n(x, u) \}$, так что любой ПИ для (2) имеет вид $\Phi(x, u) = F(\Phi_1(x, u), \dots, \Phi_n(x, u))$, где F — гладкая функция, и тогда общее решение (1) ищется из уравнения

$$F(\Phi_1(x, u), \dots, \Phi_n(x, u)) = 0, \tag{3}$$

т. е. решение (1) имеет произвол в $(n-1)$ функцию. Чтобы выделить единственное решение, обычно рассматривают так наз. задачу Коши, где как раз ставится $(n - 1)$ функциональных условий:

$$u = \varphi(\tau) \quad \text{на} \quad M_x = \{ x = \psi(\tau) \mid \tau \in K \subset \mathbb{R}^{n-1} \}, \tag{4}$$

т. е. данные Коши (4) — это задание u на многообразии M_x размерности $(n - 1)$. Геометрически задача Коши (1),(4) — это задача о нахождении графика функции u (n-мерного многообразия в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, u)\}$), проходящего через заданное $(n - 1)$-мерное многообразие $M = \{ u = \varphi(\tau),\ x = \psi(\tau) \}$. В курсе ОДУ[10] мы это делали формально с помощью формулы (3) (т. е. подставляя ее в (4) и исключая F), пользуясь системой (2) лишь как источником для нахождения ПИ $\Phi_i(x, u)$. При этом мы также записывали (2) в симметричной форме

$$\frac{dx_1}{a_1(x, u)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x, u)} = \frac{du}{f(x, u)} \, [= ds] \tag{5}$$

или в неавтономной форме (например, через d/dx_1). Но такой метод слишком формальный и не позволяет четко

[10] См. [32].

отследить поведение решения и понять причину этого поведения. Сейчас мы будем вместо метода ПИ применять так наз. *метод характеристик*, рассматривая решения (2) сами по себе (а не ПИ), при этом важна запись именно в форме (2), т. к. переменная s играет важную роль. Итак, *характеристиками* уравнения (1) называются кривые в $\mathbb{R}^{n+1} = \{\,(x,u)\,\}$, которые суть траектории системы (2) (что оправдывает ее название), т. е. это кривые, которые заметаются точкой $(x(s),u(s))$ при изменении $s \in \mathbb{R}$. При этом эти кривые образуют n-параметрическое семейство, т. к. мы можем произвольно задать данные Коши для (2) — например, в виде $\{\, x(0) = x_0,\ u(0) = u_0 \,\}$ (здесь $(n{+}1)$ данных, но 1 степень свободы исчезает в силу автономности — проще всего это понять, записав (2) и данные Коши в неавтономной форме через d/dx_1). Но не все эти кривые нужны для решения задачи Коши (1),(4). Чтобы это понять, рассмотрим любое многообразие размерности n, состоящее из характеристик, т. е. многообразие вида

$$N = \{\, u = u(\xi, s),\ x = x(\xi, s),\ \xi \in \mathbb{R}^{n-1} \,\},$$

где $(x,u)(\xi,s)$ — решение (2) с данными Коши вида

$$\{\, x(0) = \alpha(\xi),\ u(0) = \beta(\xi) \,\} \quad \Longleftrightarrow$$

$$(x,u)|_{s=0} \in L \equiv \{\, x = \alpha(\xi),\ u = \beta(\xi) \,\} \tag{6}$$

(т. е. N состоит из характеристик, проходящих через L, $\dim L = n-1$). Если записать N в явном виде $\{\, u = u(x) \,\}$, то на нем (т. е. взяв любую точку $(x,u) \in N$, которая обязана иметь вид $(x,u)(\xi,s)$ с некоторыми (ξ,s)) будем иметь в силу (2):

$$f(x,u) = \frac{du}{ds} = \frac{d}{ds}u(x(\xi,s)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} a_i(x,u),$$

т. е. на N выполнено (1). Таким образом, при разных L получаем разные графики (интегральные гиперповерхности) решений (1) — многообразия N, состоящие из характеристик. Но мы хотим отобрать среди этих решений то, которое удовлетворяет (4). Для этого надо потребовать, чтобы характеристики проходили через M. Естественно для этого просто положить $L = M$, т. е. взяв в (6) $\alpha = \psi$, $\beta = \varphi$:

$$x|_{s=0} = \psi(\tau), \quad u|_{s=0} = \varphi(\tau). \tag{7}$$

Решение (2),(7) образует n-мерное многообразие ($\dim\tau + \dim s = n$) в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, u)\}$, которое и дает решение (1),(4) по построению, правда, записанное в параметрическом виде $(x, u) = (x, u)(\tau, s)$. При этом на самом деле, вообще говоря, не вся гиперповерхность является решением, т. к. перезапись параметрической формы в явном виде $u = u(x)$ возможна не всегда, а только лишь в случае, когда (это все эквивалентно):

(a) уравнение $x = x(\tau, s)$ однозначно разрешимо относительно (τ, s);

(b) характеристики в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \{\, (x, u) \,\}$ не нахлестываются;

(c) проекции характеристик на пространство $\mathbb{R}^n = \{\, x \,\}$ (тоже называемые характеристиками) не пересекаются.

В противном случае гиперповерхность (ее часть) не задает функцию $u(x)$. Но в окрестности M такое разрешение (т. е. нахождение решения) возможно, если соблюдены условия о расположении M относительно характеристик, которые мы укажем позже. Далее на примерах мы все это увидим. При этом под нахождением u мы понимаем лишь теоретическую возможность такого разрешения, т. к. решение в «аналитическом виде» может не получиться, и приходится оставлять параметрическую запись в качестве ответа. Но в некоторых случаях удается выразить решение неявно: $F(x,u) = 0$ или даже явно: $u = u(x)$, и тогда это надо делать, или хотя бы избавиться от части параметров.

2. Решить задачу Коши
$$xu_x + 2yu_y + 2zu_z = x + 2u; \qquad u = x + z \quad \text{при} \quad x = 2y.$$

3. **Замечание.** Как мы видели в п. 2, в случае линейного уравнения (точнее, важно только то, что $a_i = a_i(x)$ в (1), а f может быть любой) в системе (2) первые n уравнений отделяются, и их можно решить независимо. Геометрически это означает, что проекции характеристик на пространство $\mathbb{R}^n = \{x\}$ можно найти независимо от u, а затем ужé отдельно найти u из $(2)_2$ (т. е. решить (1) вдоль этих кривых). В общем случае (1) приходится решать сразу для (x,u), т. к. (2) перемешана, а проекции характеристик на пространство $\mathbb{R}^n = \{\ x\ \}$ зависят от решения, и рассматривать их не имеет смысла.

4. [*на дом*] Вспомнить метод ПИ и решить с его помощью задачу из п. 2, а также ее же с нулевой правой частью.
Вывод: метод ПИ часто даже более громоздкий и совершенно скрывает суть (а мы просто «тонем в вычислениях»).

5. [*на дом*] Филиппов 1206.
Указание. Полезно решить обоими методами. В методе характеристик долго искать параметрическое задание, но легко довести до конца; а в методе ПИ быстро находится общее решение, но дальше долго.

6. Решим задачу (для закрепления — для простоты линейная):
$$u_t - 4u_x + 3u_y + u = t + x, \quad u|_{t=0} = x + y.$$

Вывод: если начальное многообразие есть $\{ t = 0 \}$, а при u_t коэффициент равен 1, то можно сразу понять, что $t = s$, и писать везде d/dt вместо d/ds. При этом, если решать методом ПИ, будет столько же ПИ, т. к. число уравнений на 1 меньше, но система ОДУ неавтономная, и ищутся ПИ, зависящие и от t.

7. **Замечание.** До сих пор мы не задумывались о проблеме с характеристиками, локальностью существования, разрешимостью уравнений для параметров, что упоминалось в п. 1, т. к. задачи были в этом смысле «без проблем». Но на самом деле обычно, если уравнение не линейное, эти вопросы возникают[11]. Самое удобное уравнение для изучения этих явлений — простейшее не линейное (но квазилинейное) уравнение — уравнение Хопфа (моделирующее газовую динамику).

8. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Хопфа:

$$u_t + uu_x = 0, \quad t > 0; \qquad u|_{t=0} = \varphi(x).$$

   (a) Получить (методом характеристик) параметрическое представление решения.
   (b) Получить неявное представление решения.

9. [*на дом*] Проделать то же методом ПИ.

10. [это п. 7 приложения к М.—М.] Получить явное задание решения п. 8 для следующих частных случаев:

   (a) $\varphi(\tau) = \tau$;
   (b) $\varphi(\tau) = -\tau$;
   (c) $\varphi(\tau) = \tau^2$.

[11]Если система УЧП I порядка не со СДО, то даже в линейном случае может быть лишь локальное существование — см. М.—М. 1.5.

В последнем случае убедиться, что $u(t, x) \to \varphi(x)$ при $t \to 0$. Во всех случаях указать область существования решения.

11. Объяснить, почему в пп. 10(b),(c) решение существует не при всех $t > 0$:
аналитически: уравнение $u = \varphi(x - tu)$ разрешимо однозначно не при всех $t > 0$;
геометрически: характеристики нахлестываются (т. е. их проекции на плоскость $\{ (t, x) \}$ пересекаются).
Здесь уместно показать картинку (интегральная поверхность, построенная на компьютере).

12. Подход через характеристики (геометрический) предпочтительнее, т. к. в нем яснее природа локальности существования. В случае уравнения Хопфа легко понять, какие свойства φ влияют на область существования решения:

13. [*на дом*] [это п. 8 приложения к М.—М.] Доказать, что если φ возрастает, то решение существует при всех $t > 0$.
Указание. Полезно проделать это 2-мя способами — аналитическим и геометрическим.

14. [*на дом*] $u_t + u^2 u_x = 0$, $u|_{t=0} = 2x$. Найти решение явно, убедиться, что $u \to 2x$ при $t \to 0$.
Указание. Внимательно отсеять «побочные» решения.

15. [*на дом*] [это модифицированный п. 9 приложения к М.—М.] Рассмотрим задачу Коши:

$$u_t + uu_x = \gamma u^2, \quad t > 0; \qquad u|_{t=0} = \varphi(x).$$

Случай $\gamma = 0$ уже рассмотрен, поэтому пусть $\gamma \neq 0$.

(a) Решить — получить параметрическое представление решения.

(b) При каких условиях на φ решение существует при всех $t > 0$?

(c) Дать геометрическую иллюстрацию (начертить проекции характеристик на плоскость $\{ (t, x) \}$).

16. Перейдем к п. 1(b). Отметим, что любая система квазилинейных УЧП I порядка имеет вид $A(x, u, \nabla)u = f(x, u)$, где A — матрица (линейная по ∇). Рассмотреть это на примерах

$$u_t + v_x = 0, \qquad v_t - u_x = 0,$$

$$u_t + v_t = 0, \qquad v_t + u_x = 0,$$

$$u_t + vu_x = v^2, \qquad v_t + vv_x = u + v.$$

В последнем случае $A(t, x, D_t, D_x) = (D_t + vD_x)E$ — скалярная матрица, т. е. это система со СДО (или, как говорят, с общей главной частью — сказать что это значит). Такие системы, в отличие от систем I порядка вообще[12], по сути ничем не отличаются от случая одного уравнения. В самом деле, для любой такой системы:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} \right] u = f(x, u), \tag{8}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^k$, так же как и для одного уравнения (1), можно выписать характеристическую систему:

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i(x, u), \quad \frac{du_j}{ds} = f_j(x, u), \tag{9}$$

поставить задачу Коши:

$$u = \varphi(\tau) \quad \text{на} \quad M_x = \{ x = \psi(\tau) \mid \tau \in K \subset \mathbb{R}^{n-1} \} \tag{10}$$

[12] к которым сводится любая квазилинейная система УЧП, а по сути вообще любая система УЧП с помощью дифференциального продолжения, и которые суть очень сложный объект

— это задает $(n-1)$-мерное многообразие M в пространстве $\mathbb{R}^{n+k} = \{\,(x,u)\,\}$. Мы ищем решение, которое задает n-мерное многообразие в этом пространстве. Оно состоит из характеристик (кривых — решений (9)) в этом пространстве. Для этого снова ставим задачу Коши для (9):

$$x|_{s=0} = \psi(\tau), \quad u|_{s=0} = \varphi(\tau). \tag{11}$$

Решение (9),(11) $[(x,u) = (x,u)(\tau,s)]$ и есть искомое многообразие. Иногда удается исключить часть параметров или даже все и получить неявное: $F(x,u) = 0$, $\dim F = k$, или явное $u = u(x)$ представление. В остальном все аналогично случаю одного уравнения.

Здесь также примени́м метод ПИ, хотя он здесь совсем громоздкий и сильно скрывает суть, так что применять его нежелательно. Но кратко скажем: система (9) имеет $(n+k-1)$ независимых ПИ $\{\,\Phi_1(x,u),\dots,\Phi_{n+k-1}(x,u)\,\}$, поэтому общее решение (8) ищется из неявного задания $F(\Phi_1(x,u),\dots,\Phi_{n+k-1}(x,u)) = 0$, $\dim F = k$. Если подставить это в (10), то получим нужные k уравнений для исключения F, т. к. $\dim\tau = (n-1)$:
$F((\Phi_1,\dots,\Phi_{n+k-1})(\tau)) = 0$,
(количество Φ_j)$-\dim\tau = (n+k-1)-(n-1) = k$.

17. Решить задачу Коши (методом характеристик):

$$u_t + uu_x + vu_y = 0; \quad v_t + uv_x + vv_y = 0;$$

$$u|_{t=0} = y, \quad v|_{t=0} = x.$$

18. [*на дом*] Решить ту же задачу методом ПИ.

19. [*на дом*] Решить (только характеристиками, метод ПИ вязнет!) задачу

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + u\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x + v\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_y = \begin{bmatrix} 2u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} 2y \\ x \end{bmatrix}$$

— ответ довести до явного.

[Долго на этом вопросе не задерживаемся, т. к. все равно придется решать системы со СДО в связи с нелинейными уравнениями.]

$\boxed{\text{занятие 1}}$

....

$\boxed{\text{занятие 2}}$

20. [сильно не задерживаться, т. к. это было на лекции] Перейдем к п. 1(c). Рассмотрим произвольное УЧП I порядка:

$$f(x, u, \nabla u) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \quad u = u(x). \tag{12}$$

Для него так же, как и для (1), можно поставить задачу Коши (4). Для ее решения сведем (12),(4) к задаче Коши для системы квазилинейных УЧП I порядка со СДО. Это делается с помощью процедуры так наз. *дифференциального продолжения.* А именно, примéним к (12) операцию ∇. Обозначив $p = \nabla u$ и добавив тавтологическое уравнение для u, получим систему (первая продолженная система для (12)):

$$\left(\sum_{j=1}^{n} f_{p_j}(x, u, p) \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \cdot \nabla_p f(x, u, p) \\ -\nabla_x f(x, u, p) - f_u(x, u, p) p \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Это система вида (8). Чтобы поставить для нее задачу Коши, у нас уже есть (4). Чтобы найти p на M_x, надо взять $(n-1)$ касательных производных от (4) на M_x, а тогда оставшаяся $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{M_x}$ найдется из (12). Получим данные вида

$$u = \varphi(\tau), \;\; p = \chi(\tau) \;\text{ на }\; M_x = \{\, x = \psi(\tau) \mid \tau \in K \subset \mathbb{R}^{n-1} \,\}, \tag{14}$$

т. е. вида (11). Решая теперь (13),(14), как если бы (u,p) были независимыми (нам нужно только u, но приходится находить и p), найдем решение $(x,u)=(x,u)(\tau,s)$, или даже неявный или явный вид.

Замечание 1. Правая часть $p\cdot\nabla_p f(x,u,p)$ уравнения для u может оказаться громоздкой, но ее часто можно упростить в силу (12).

21. Решить задачу Коши:

$$u_x^2+u_y^2=1;\quad u=x\quad \text{при}\quad x=-y.$$

Указание. Лучше заново выводить продолженную систему, а не пользоваться готовой формулой (13).

Замечание 2. Здесь видно, что в нелинейных уравнениях типичен эффект неединственности, как это было в ОДУ, неразрешенных относительно старшей производной.

Замечание 3. Если одна переменная выделена: $u_t+\dots$, $u|_{t=0}=\dots$, то, как говорилось в п. 6, можно брать $s=t$, т. е. писать d/dt; и к тому же можно не включать u_t в продолженную систему[13], и не нужно решать систему для $(\nabla u)|_M$.

22. Замечания 1–3 могут существенно облегчить решение задачи. Рассмотрим пример:

$$u_t+2u_x+3\sqrt{u_x^2+u_y^2}+u^2=0;\quad u|_{t=0}=x+2y^2.$$

Сделать примерно до выписывания системы характеристик.

23. [*на дом*] Доделать п. 22 до максимально явного вида (хотя исключить все параметры не удастся, 2 из них останутся).

[13] т. к. в уравнения для u_{x_i} не войдет u_t, а в уравнении для u ее можно исключить в силу (12), и при $t=0$ данные для u_{x_i} находятся без участия u_t.

24. [*на дом*] Найти (явно!) решение задачи

$$u_x + u_y^2 = x; \quad u = 2y^2 \quad \text{при} \quad x = 2y.$$

$\left[\text{\parbox{}{}}\right.$Это еще не уравнение ГЯ, т. к. явно присутствует эволюционная переменная x и не работает Замечание 3, поскольку начальное многообразие не есть $\{\, x = 0 \,\}$.]

25. [можно кратко, т. к. было на лекции] Важный частный случай п. 1(c) — уравнение ГЯ с данными Коши, заданными при $t = 0$ (это определяется прикладным смыслом и к тому же иначе никаких особых преимуществ нет):

$$u_t + H(x, \nabla u) = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x) \tag{15}$$

— здесь $\nabla = \nabla_x$. Для (15) справедливы Замечания 1,3 (что дает экономию в 2 переменные по сравнению с общим случаем (12),(14)), и еще можно не включать в продолженную систему саму u, т. к. (13),(14) принимают вид (где $p = \nabla_x u$, сразу в уравнении для u используем уравнение $(15)_1$)

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} H_{p_j} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \cdot \nabla_p H - H \\ -\nabla_x H \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \nabla\varphi \end{bmatrix}.\end{gathered} \tag{16}$$

Видно, что задача для u отпадает, и можно сначала найти p, а потом уже́ u (последнее можно сделать 2-мя способами — находя непосредственно решение характеристического уравнения для u, либо восстанавливая u по ∇u с учетом (15)). При этом характеристическая система для $(16)_p$ имеет специальный вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = H_{p_i}, \ \frac{dp_j}{dt} = -H_{x_j}; \quad x|_{t=0} = \xi, \ p|_{t=0} = \nabla\varphi(\xi) \tag{17}$$

(гамильтонова система). Решая (17) (для чего есть специальные приемы), находим $(x,p) = (x,p)(t,\xi)$ (откуда можно сразу найти $\xi = \xi(x,t)$), а тогда отдельно находим $u(t,\xi)$ и наконец $u(t,x)$.

26. Найти явно решение задачи

$$u_t + u_x^2 + u_y^2 = 0, \quad u|_{t=0} = x + y.$$

Замечание. На контрольной работе тоже все задачи для ГЯ допускают явное нахождение решения, и его надо будет найти.

27. [*на дом*] Найти явно решение задачи

$$u_t + u_x u_y = x, \quad u|_{t=0} = x - y.$$

28. До сих пор мы не затрагивали вопрос о взаимодействии характеристик и начального многообразия, хотя из вышеизложенного ясно, что это играет принципиальную роль в вопросе об однозначной разрешимости задачи Коши ((1),(4), или (8),(10), или (12),(4)). Просто до сих пор задачи подбирались так, что этих проблем не было, и наша беззаботность не вредила нам. Рассмотрим ситуации, когда это не так.

[Должно остаться много времени, так что пп. 28–30 делать спокойно и подробно.]

29. Рассмотрим задачу Коши

$$xu_t - tu_x = 0; \quad u|_{t=1} = \varphi(x).$$

   (a) Найти решение (решать методом ПИ, иначе не будет наглядно и мы запутаемся!).

   (b) При каких необходимых условиях на φ это удается сделать?

(c) В какой области решение существует при выполнении этих условий?

(d) Объяснить ответ, нарисовав картину характеристик на плоскости (t, x).

(e) Когда можно утверждать $u \in C^1$ в указанной области?

30. [это п. 1 приложения к М.—М.] Все те же вопросы для задачи (тоже решать при помощи ПИ!)

$$u_t + u_x = 0; \quad u|_{t=\alpha x} = \varphi(x).$$

31. [*на дом*] Решить задачу Коши (с помощью ПИ)

$$u_y - \varepsilon u_x = 0; \quad u = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = y|y|.$$

(a) При $\varepsilon \neq 0$ доказать, что при $\varphi \in C^1$ $\exists!$ $u \in C^1$.

(b) Исследовать $\varepsilon \to 0$, выяснить, когда в пределе останется $u \in C^1$.

(c) Объяснить ответ с помощью характеристик.

32. **Вывод.** В УЧП I порядка для безусловной разрешимости задачи Коши, единственности решения и его гладкости необходимо и достаточно, чтобы начальное многообразие не касалось характеристик (и тем более не совпадало с ними на целом участке) и пересекало их ровно по 1 разу. Иначе возникают дополнительные условия на данные Коши. Дальнейшая гладкость решения определяется гладкостью данных Коши.

[Эти явления и метод можно в определенной степени обобщить на уравнения и системы высшего порядка. Тогда возникает (и не только поэтому, и даже из других соображений на самом деле) понятие ХМ. Их мы изучим в следующей теме.]

План занятий по теме №3,4:

ХМ для УЧП, соотношения на них.
Классификация и КВ
линейных УЧП II порядка на плоскости.

3 занятия

[Из М.—М. § 1 вошли: пп. 1.1, 1.2, 1.4, 1.8, 1.13, 1.19–1.21]

1. Напомнить понятие задачи Коши для УЧП (кратко из лекций).

2. [лучше на местах делать] Рассмотрим систему

$$u_x w_{xyy} - u v_{xx} = 1; \quad \sin v_{xy} + w v_y = 0; \quad u_y = v_y.$$

   (a) Определить порядок по каждой из неизвестных функций.

   (b) Какой размерности многообразия, на которых ставится задача Коши?

   (c) Поставить задачу Коши на прямой $\gamma = \{\, y = x \,\}$ нормального вида (т. е. все производные по нормали), расписав все производные через таковые по x, y.

   (d) Предложить эквивалентную задачу Коши с более простыми комбинациями производных. Показать эквивалентность этих задач для v.

   (e) [*на дом*] Показать эквивалентность этих задач для w.

3. Напомнить понятие ХМ (и характеристической точки) [кратко из лекций]; то, что все касательные производные находятся из данных Коши, мы видели на примере из п. 2. Зачем нужны ХМ, мы посмотрим позже, а пока научимся их находить.

4. Разобрать самому пример нахождения ХК для системы

$$u_t + v_x = 0; \quad v_t + u_x = 0.$$

Отметить путаницу с понятием «характеристика».

5. Решить Г.—З. 1.

$$\left[\begin{array}{l}\text{Использовать формулы для касательных производных} \\ \text{из п. 4 — не стирать их с доски. Использовать формулу} \\ \det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - CB) \text{ при } AC = CA.\end{array}\right]$$

6. Найти (по определению) ХК для УКС $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

7. На самом деле уравнения типа УКС можно делать проще. Напомнить утверждение из лекций: для одного УЧП вида $P_k(x, \nabla_x)u$ =мл.члены, $P_k(x, \xi) = \sum\limits_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$, ХМ имеют вид $\{\, \varphi(x) = 0 \,\}$, где $P_k(x, \nabla\varphi) = 0$.
Пример. $e^y u_{xx} + 2u_{xy} + xu_{yy} + 3u_x + 2u = y$. Берем главную часть: $P_2(x, y, \xi, \eta) = e^y\xi^2 + 2\xi\eta + x\eta^2$. Тогда ХК имеют вид $\{\, \varphi(x, y) = 0 \,\}$, где $e^y\varphi_x^2 + 2\varphi_x\varphi_y + x\varphi_y^2 = 0$.

8. [это Г.—З. 2 и М.—М. 1.19] Найти (с помощью п. 7) ХК уравнения Трикоми $yu_{xx} + u_{yy} = 0$, нарисовать их.

9. [*на дом*] (тем же способом)
   (a) Г.—З. 11.
   (b) Г.—З. 17.

9.5. **Замечание.** Если еще остается время (5–10 минут), то пояснить что такое соотношения на ХМ на примере УКС, и задать на дом п. 18. Если остается больше времени, то идти на п. 10.

$\boxed{\text{занятие 1}}$
. . . .
$\boxed{\text{занятие 2}}$

10. Напомнить, что для систем вида $Au_t+Bu_x = f$ процедура как в пп. 4,5 может быть записана в виде

$$\begin{bmatrix} dt\cdot E & dx\cdot E \\ A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t \\ u_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} du \\ f \end{bmatrix},$$

откуда ясно следующее:

   (a) уравнение ХК имеет вид: $\det \begin{bmatrix} dt\cdot E & dx\cdot E \\ A & B \end{bmatrix} = 0;$

   (b) любое решение удовлетворяет на ХК соотношениям

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} dt\cdot E & dx\cdot E & du \\ A & B & f \end{bmatrix} < 2\dim u.$$

11. Решить М.—М. 1.1. [лучше все в аудитории, тем более что некуда спешить]

12. [*на дом*]

   (a) М.—М. 1.2.
   Указание. Начать со случая $a > 0$. Случай $a = 0$ сделать 2-мя способами: непосредственно и как $\lim\limits_{a\searrow 0}$.

   (b) М.—М. 1.4.

   (c) М.—М. 1.13.

13. **Замечание.** УЧП, для которых имеется полный набор ХМ и соотношений на них (как в п. 11), называются гиперболическими. Для них, как мы видели в пп. 11,12, можно решить уравнение в общем виде и задачу Коши благодаря этим соотношениям. Кроме того, для эллиптических уравнений такая же (но уже формальная[14], и только при аналитических данных) процедура тоже возможна в определенных случаях, как мы видели в п. 12.

[14] Эта процедура обосновывается аналитическим продолжением в $\mathbb{C}^2$.

14. (∗) [*на дом*]

    (a) Г.—З. 4.

    (b) М.—М. 1.20.

15. Напомнить, что для систем вида $Au_t + Bu_x + Cu_y = f$ ХП имеют нормаль $\vec{\nu} = (\nu_t, \nu_x, \nu_y) = (\tau, \xi, \eta)$, удовлетворяющую уравнению характеристических нормалей $\det(\tau A + \xi B + \eta C) = 0$, которые образуют конус в пространстве $\{(\tau, \xi, \eta)\}$, свой для каждой точки (t, x, y). Если $A, B, C = \mathrm{const}$, то конус везде одинаковый, и среди ХП имеются плоскости.

16. Рассмотрим М.—М. 1.8а).

    (a) Написать уравнение для характеристических нормалей [подсказать разложение кубического полинома для (ν_t, ν_x, ν_y)].

    (b) Ищем ХП в виде $\{ \varphi(t, x, y) = 0 \}$. Тогда выписать уравнение (ГЯ) для φ. В данном случае ситуация упрощена тем, что под корнем стоит полный квадрат и потому уравнение ГЯ превращается в линейное.

    (c) Поставить задачу Коши для φ (при $t = 0$).

    (d) [*на дом*] Доделать этим путем (через уравнение ГЯ).

    (e) Сделать напрямую, сразу ища ХП в виде плоскостей (хотя это не совсем честный способ, т. к. неясно, почему так найдутся все ХП).

17. Г.—З. 27. Использовать подсказку в ответе, данном там!

18. [если еще не сделали выше — см. п. 9.5] Продолжим п. 6: найти соотношения на ХК для УКС.
    Замечание. В другой теме (специально об УКС) мы подробнее изучим, как отсюда вывести общее решение, решение задачи Коши и др. (ср. пп. 11–13 и лекции).

19. Еще одна польза от ХМ — это построение специальной СК, в которой уравнение принимает более простой (канонический) вид (не путать с КВ для гиперболических систем на плоскости через сведение к римановым инвариантам!). Рассмотрим этот вопрос на примере линейных уравнений II порядка на плоскости. Для этих уравнений до конца доводятся вопросы о ХК, классификации и КВ. Рассказать общие слова и подробно гиперболический случай (см. приложение к плану темы). В частности, рассмотрим пример $3u_{xx} + 2u_{xy} = 0$ — пояснить самому КВ. Упражнение на местах: решить уравнение в полученном КВ $v_{\xi\eta} = 0$ и получить отсюда решение исходного уравнения.

занятие 2

....

занятие 3

[В это занятие большой запас времени, зарезервированный под возможное множество вопросов по д. з. с занятия 2. Если вопросов мало, то надо порешать часть из нынешнего д. з. прямо в ауд. — см. далее как это делать. Но в любом случае разбирать д. з. не более 25 минут, иначе не успеем необходимое.]

20. [это М.—М. 1.19] Рассмотрим уравнение Трикоми $yu_{xx} + u_{yy} = 0$. В п. 8 мы уже́ нашли его ХК. Теперь выделим область гиперболичности и приведем его в ней к КВ.

21. [это Смирнов 4] $u_{xx} - 2(\cos x)u_{xy} - (3+\sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$. Найти ХК, привести к КВ. [сделать полностью, чтобы четко показать, как должен выглядеть ответ — все в новой СК!]

22. [*на дом*] [это Смирнов 8] То же задание для уравнения $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^4u = 0$.

23. Рассказать о КВ в параболическом случае (см. приложение к плану темы).

24. [можно начать, а доделать [*на дом*] , если совсем не успеваем] Найти ХК и КВ уравнения
$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + 8u_x = 0.$

25. [*на дом*] [если же впереди много времени (см. выше), то в ауд.] М.—М. 1.21 — пример того, как КВ может помочь решить «до конца».

26. Рассказать о КВ в эллиптическом случае (см. приложение к плану темы).

27. [это М.—М. 1.19] [в завершение п. 20] Привести уравнение Трикоми к КВ в области эллиптичности, выделив эту область. Сделать замечание о «множестве параболичности» и «КВ» в ней для этого уравнения.

28. [*на дом*] [если остается время, то в ауд.] [это Смирнов 9] Найти ХК и КВ уравнения
$(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0.$

29. [*на дом*] Заменами вида $v = w\exp(R(\xi,\eta))$ уничтожить члены с I производными в КВ уравнения Трикоми в обеих областях (гиперболичности и эллиптичности) и привести его к виду $P_2(D_\xi, D_\eta)w = f(\xi,\eta)w$, где
$P_2(\alpha,\beta) = \alpha^2 \pm \beta^2$, т. е. уравнение Лапласа или УКС с младшим членом.
Указание. В гиперболическом случае сделать дополнительную замену $\lambda = \xi - \eta$, $\mu = \xi + \eta$.

Вывод. Достаточно изучить уравнение Гельмгольца $\Delta u + \lambda u = f$ или так наз. телеграфное уравнение $u_{tt} - u_{xx} + \lambda u = f$, и тогда охватятся «почти все» уравнения II порядка на плоскости. В следующей теме мы перейдем к УКС, которое есть телеграфное уравнение при $\lambda = 0$. А дальше изучим и упомянутые уравнения (особенно методом Фурье, когда наличие λ не мешает). При этом параболические уравнения аналогично фактически сводятся уравнению теплопроводности $u_t = u_{xx} + f$, поэтому его мы и будем изучать далее «вместо произвольных параболических уравнений».

Приложение к плану темы 3,4:
КВ линейных УЧП II порядка на плоскости.

[Образующая идея — применение ХМ: в порождаемой ими СК уравнение принимает специальный вид]

Рассмотрим УЧП

$$\begin{gathered} a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{yy} + 2c(x,y)u_{xy} + \\ +\big(m(x,y)u_x + n(x,y)u_y + k(x,y)u\big) = f(x,y). \end{gathered} \tag{1}$$

Его ХК имеют вид $\varphi(x,y) = 0$, где φ удовлетворяет УЧП I порядка

$$a(x,y)\varphi_x^2 + b(x,y)\varphi_y^2 + 2c(x,y)\varphi_x\varphi_y = 0, \tag{2}$$

а по сути 2 линейным УЧП I порядка, для получения которых надо разложить квадратный трехчлен на множители: обозначив $\lambda(x,y) = \varphi_x/\varphi_y$, получим уравнение $a\lambda^2 + 2c\lambda + b = 0$, т. е. $a(\lambda - \varepsilon_1)(\lambda - \varepsilon_2) = 0$, где $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x,y)$ — корни трехчлена.

Случай I. $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2} \in \mathbb{R}$ в какой-то точке (x,y). Критерий в терминах коэффициентов уравнения (1): $c^2 - ab > 0$.

Тогда уравнение гиперболическое в данной точке (а значит, и в ее окрестности).

[Тогда в этой точке 2 вещественные характеристические нормали.]

Случай II. $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ в какой-то точке (x, y). Критерий в терминах коэффициентов уравнения (1): $c^2 - ab < 0$. Тогда уравнение эллиптическое в данной точке (а значит, и в ее окрестности).

[Тогда в этой точке 2 комплексные характеристические нормали.]

Случай III. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ в какой-то точке (x, y). Критерий в терминах коэффициентов уравнения (1): $c^2 - ab = 0$. Тогда уравнение параболическое в данной точке.

[Тогда в этой точке 1 вещественная характеристическая нормаль.]

Разберем все 3 случая подробно.

[В первый день только случай I.]

Случай I. Выведем КВ. Введем новую СК:

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y),$$

в которой величина u представляется новой функцией v, т. е.

$$u(x, y) = v(\xi, \eta) = v(\varphi(x, y), \psi(x, y)). \tag{3}$$

Пересчитываем производные в новой СК:

$$u_x = v_\xi \varphi_x + v_\eta \psi_x,$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi}\varphi_x^2 + v_{\xi\eta}\varphi_x\psi_x + v_\xi\varphi_{xx} + v_{\xi\eta}\varphi_x\psi_x + v_{\eta\eta}\psi_x^2 + v_\eta\psi_{xx},$$

и аналогично u_y, u_{xy}, u_{yy}. Подставляя в (1), получаем

$$(a\varphi_x^2 + b\varphi_y^2 + 2c\varphi_x\varphi_y)v_{\xi\xi} + (a\psi_x^2 + b\psi_y^2 + 2c\psi_x\psi_y)v_{\eta\eta}+$$

$$+(a\varphi_x\psi_x + b\varphi_y\psi_y + c\varphi_x\psi_y + c\varphi_y\psi_x)v_{\xi\eta}+ \tag{4}$$

$$+\text{мл. члены (из 2 источников)} = f(\text{в новых коорд.}).$$

Возьмем в качестве φ, ψ характеристические координаты:

$$a\varphi_x^2 + b\varphi_y^2 + 2c\varphi_x\varphi_y = 0, \qquad a\psi_x^2 + b\psi_y^2 + 2c\psi_x\psi_y = 0, \tag{5}$$

а именно, например,

$$\varphi_x - \varepsilon_1\varphi_y = 0, \qquad \psi_x - \varepsilon_2\psi_y = 0,$$

тогда (5) выполнено. Получим так наз. КВ

$$v_{\xi\eta} + \text{младшие члены} = \text{свободный член}.$$

Поскольку имеется 2 разных корня, то φ, ψ образуют невырожденную СК.

В КВ уравнение часто можно решить, и тем самым получить общее решение исходного уравнения.

Пример. $3u_{xx} + 2u_{xy} = 0$. Здесь $a = 3$, $b = 0$, $c = 1$; $c^2 - ab = 1 > 0$ — гиперболический тип во всей плоскости. Характеристическое уравнение: $3\varphi_x^2 + 2\varphi_x\varphi_y = 0$, т. е. $\varphi_x(3\varphi_x + 2\varphi_y) = 0$. Берем, например, $\varphi_x = 0$, $3\psi_x + 2\psi_y = 0$, т. е. $\varphi = y$, $\psi = 2x - 3y$. Итак, искомая СК имеет вид $\xi = y$, $\eta = 2x - 3y$, так что замена переменных выглядит как $u(x, y) = v(y, 2x - 3y)$. Пересчитываем производные:

$$u_x = v_\eta 2, \quad u_{xx} = 4v_{\eta\eta}, \quad u_y = v_\xi - 3v_\eta, \quad u_{xy} = 2v_{\xi\eta} - 6v_{\eta\eta},$$

[есть еще $u_{yy} = v_{\xi\xi} + 9v_{\eta\eta} - 6v_{\xi\eta}$, но это не потребуется]

что после подстановки дает КВ $v_{\xi\eta} = 0$. Отсюда очевидно общее решение $v = A(\xi) + B(\eta)$, т. е. $u(x, y) = A(y) + B(2x - 3y)$.

Случай II рассмотрим только для аналитических a, b и c (а значит, и $\varepsilon_i(x, y)$). Тогда имеется 2 решения уравнения (2) вида $\varphi = \Phi \pm i\Psi$, где Φ и Ψ — вещественные аналитические функции.

[Строго говоря, при этом решается не исходное уравнение (2), а его аналитическое продолжение в двумерное комплексное пространство, т. е. с аналитическим образом продолженными коэффициентами.]

Оказывается, если положить $\xi = \Phi$, $\eta = \Psi$, то функция v после замены (3) удовлетворяет уравнению

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \text{младшие члены} = \text{свободный член}$$

— КВ в эллиптическом случае.

Случай III. Тогда $c = \operatorname{sgn} c \sqrt{a}\sqrt{b}$, и уравнение (2) принимает вид $(\sqrt{a}\,\varphi_x + \operatorname{sgn} c\sqrt{b}\,\varphi_y)^2 = 0$ и потому имеет только одно (функционально независимое) решение, которое мы и возьмем в качестве первой координаты $\xi = \varphi$, а вторую η можно взять любой (независимой) функцией. Тогда КВ в новой СК будет иметь вид

$$v_{\eta\eta} + \text{младшие члены} = \text{свободный член},$$

т. к. коэффициент при $v_{\xi\eta}$ в (4) равен
$(\sqrt{a}\,\varphi_x + \operatorname{sgn} c\sqrt{b}\,\varphi_y)(\sqrt{a}\,\psi_x + \operatorname{sgn} c\sqrt{b}\,\psi_y) = 0$.

План занятий по теме №6:

Линейные системы I порядка на плоскости; римановы инварианты; канонический вид; краевые задачи.

3 занятия

[М.—М. не задействован]

1. Рассказать о каноническом виде и римановых инвариантах, общем решении и задаче Коши (собственные числа вещественны и различны — гиперболическая система).

2. Г.—З. 62: найти общее решение системы[15]

$$\begin{bmatrix} (x-1) & -(x+1) \\ (x+1) & -(x-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Какие функции в общем решении допустимы, чтобы было классическое решение?
   (Ответ: C^1).

3. [*на дом*] Г.—З. 56: привести к каноническому виду и найти римановы инварианты[16] для системы:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}.$$

4. Привести к каноническому виду, найти римановы инварианты и общее решение системы[17]

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

[15] на доске писать задание в почленном виде, а не матрицы.

[16] под этим понимается «выразить римановы инварианты через исходные переменные», а не «найти их как функции от (t, x)» — так будет и в контрольной.

[17] здесь комплексные СЧ, но формально можно делать так же, хотя система и эллиптическая.

Прокомментировать, какие функции допустимы в общем решении (т. е. аналитические)[18]. Но это будут все решения, т. к. эллиптические системы с постоянными коэффициентами имеют только аналитические решения.

5. [*на дом можно*] Для предыдущей системы решить задачу Коши[19]

$$u|_{t=0} = 1; \quad v|_{t=0} = 2x.$$

Замечание. Если начальные данные не аналитичны, то этот способ конечно не годится (т. е. формула общего решения теряет силу при $t \to 0$).

6. Рассказать о корректной постановке краевых задач в стакане (для гиперболических систем первого порядка на плоскости): критерий корректности, идея решения в окрестности $t = 0$. Подробно разобрать все случаи при $k = 2$ (здесь и далее k — это число неизвестных функций) и изложить алгоритм решения для всех $t \geqslant 0$.

7. Проверка корректности ужѐ поставленных задач: Г.—З. 96($k = 3$), 94($k = 2$); указать причину некорректности, если таковая случается[20].

8. [можно сделать в основном, а дома доделать] Рассмотрим задачу из п. 2 с правой частью[21]:

$$\begin{bmatrix} (x-1) & -(x+1) \\ (x+1) & -(x-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 2x \\ 2x \end{bmatrix}.$$

Указать все корректные постановки краевой задачи вида

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad v|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in (0, 1);$$

[18] т. е. по сути рассматривается аналитическое продолжение решения в $\mathbb{C}^2$, и уравнения рассматриваются как ДУ в $\mathbb{C}^2$ для функций от 2 комплексных переменных

[19] можно задавать только аналитические начальные данные.

[20] эти 2 задачи лучше выполнять в аудитории.

[21] здесь $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$.

$$\text{что-то при} \quad x = 0, 1.$$

Убедиться, что условия

$$u|_{x=0} = 1, \quad v|_{x=1} = 0$$

годятся, и найти решение этой задачи при любых φ, ψ.
Замечание. Хотя в этой задаче можно найти общее решение[22] и затем подставить в начально-краевые условия, но так делать не стоит, т. к. нам надо научиться решать задачи методом ХК (годящимся в общем случае, с любой правой частью), а здесь взята простая правая часть не для того, чтобы угадывать решение, а чтобы было легче отрабатывать общий метод.

9. [можно сделать в основном, а дома доделать] Та же задача, но на интервале[23] $(-1, 0)$, соответствующие конкретные краевые условия предлагаются в виде

$$u|_{x=0} = 1, \quad v|_{x=0} = 0.$$

10. [можно начать, а дома доделать] Указать какие-нибудь корректные краевые условия для задачи

$$u_t + \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} u_x + \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} u = 0, \quad x \in (0, 1);$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad [\text{что-то на границах}],$$

и решить ее[24].

---

[22]через римановы инварианты — получатся простые уравнения, и частное решение неоднородной системы можно угадать.

[23]здесь будут оба СЧ отрицательны.

[24]здесь $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$. Только не позволять ставить краевые условия в точности для римановых инвариантов, так же как и в контрольной. Например, можно задать $u_1|_{x=0} = 0$.

План занятий по теме № 7:
Уравнение колебаний струны.
1.5–2 занятия

[Это М.—М. § 8. Он задействован весь, кроме пп. 8.7, 8.13–8.19, 8.23, 8.24, 8.26]

1. Рассмотрим однородное УКС:
$$u_{tt} - u_{xx} = 0. \tag{1}$$
Напомним (как мы нашли в теме «ХМ» и в лекциях), что ХК для (1) — это $x \pm t = \text{const}$, а соотношения на них соответственно $u_t \pm u_x = \text{const}$. Из них вытекает формула для решения задачи Коши:
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \tag{2}$$
а именно формула Даламбера
$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(s)ds. \tag{3}$$
Также разными способами можно вывести общее решение уравнения (1):
$$u(t,x) = A(x+t) + B(x-t). \tag{4}$$

2. [*на дом*] Вспомнить вывод (3) и (4) (из лекций).

3. Потренируемся применять (3). Решить М.—М. 8.2.

4. М.—М. 8.3.
Замечание. Вообще $u \in C^2$, если $\varphi \in C^2$, $\psi \in C^1$. Здесь

$\psi \in C \setminus C^1 \Longrightarrow u \in C^1 \setminus C^2$.

Вывод. Можно формально работать и с негладкими решениями — тогда особенности распространяются вдоль ХК. При этом все формулы решений «не замечают» этих проблем. Строгое обоснование таких операций требует понятия обобщенных решений, которые мы рассмотрим позже в других темах. [так можно делать для всех гиперболических УЧП] А пока будем при необходимости применять такие решения. Еще один способ это обосновать — рассмотреть близкие гладкие решения и данные (а затем перейти к пределу), что можно делать в силу корректности задачи Коши (см. ниже).

5. [*на дом*] М.—М. 8.4 (для $a = 1$).

6. [*на дом*] М.—М. 8.6, 8.12.
Указание к 8.12 — рассмотреть аналитические φ, ψ.

7. Рассмотрим теперь неоднородное УКС:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t, x). \tag{5}$$

Поставим для него задачу Коши (2). Пусть сначала $\varphi = \psi = 0$. Тогда задача (5),$(2)_0$ решается методом Дюамеля:

8. Решить М.—М. 8.5.

9. Конкретный пример:

$$u_{tt} - u_{xx} = 2x + t^2, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0.$$

Решить методом Дюамеля.

10. Чтобы решить (5),(2) в общем случае, надо разбить задачу на две. Это можно сделать *в силу линейности*. Рассмотрим на примере:

$$u_{tt} - u_{xx} = 6x^2 + t^3, \qquad u|_{t=0} = 3x, \quad u_t|_{t=0} = 1$$

— показать самому как разбить.

11. [*на дом*] Дорешать эту задачу, найти u.

12. Исследуем, как решение задачи (1),(2) зависит от значений φ, ψ на разных множествах из $\mathbb{R}$: решить М.—М. 8.8.

[Это было в лекциях, поэтому можно быстро.]

Прокомментировать понятия: область единственности, область влияния, скорость звука, конечная скорость распространения возмущений. Сказать о следствии — единственности решения задачи (5),(2). Сказать что эти факты верны и для неоднородного уравнения, но доказывать их надо непосредственно с помощью соотношений на ХК (по сути это то же самое).

13. $(*)$ [*на дом*] М.—М. 8.9, 8.22, а также 8.8 в случае если α или β бесконечны.

14. Перейдем к начально-краевым задачам (напомнить смысл — был в лекциях — струна занимает не все $\mathbb{R}$, тогда нужны дополнительные условия на концах струны). Простейшая задача:

$$\begin{gathered} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (t > 0, x > 0); \quad u|_{t=0,x>0} = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0,x>0} = \psi(x); \quad u|_{x=0,t>0} = \mu(t). \end{gathered} \tag{6}$$

Как и раньше, можно разбить ее на несколько задач. Начнем с одной из этих «частичных» задач:

15. Решить (6) при $\varphi = \psi = 0$.
Указание. Использовать (4).
При каких условиях на μ получится: $u \in C$, $u \in C^1$, $u \in C^2$? Обратить внимание на распространение особенности вдоль ХК со скоростью звука.

16. [*на дом*] Рассмотрим задачу — аналог (6):

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (t > 0, x > 0); \quad u|_{t=0,x>0} = \varphi(x),$$
$$u_t|_{t=0,x>0} = \psi(x); \quad u_x|_{x=0,t>0} = \nu(t). \tag{7}$$

Решить ее в случае $\varphi = \psi = 0$. При каких условиях на ν будет $u \in C$, $u \in C^1$, $u \in C^2$?

17. Теперь, наоборот, рассмотрим задачи (6),(7) при любых φ, ψ, но с $\mu = \nu = 0$ — т. е. решим М.—М. 8.10. Можно делать с помощью (4), но физически интереснее (и часто проще) делать так:

    (a) Рассмотреть 8.10 a) при $\psi = 0$ (пусть $a = 1$). Как следует задать данные $u|_{t=0} = \overline{\varphi}$, $u_t|_{t=0} = 0$, чтобы задача Коши с этими данными имела решение, удовлетворяющее нужной нам краевой задаче?
    Ответ. $\overline{\varphi}(s) = \varphi(|s|)\mathrm{sgn} s$, т. е. нечетное продолжение функции φ.

    (b) М.—М. 8.10 b) при $\psi = 0$ ($a = 1$). Тот же вопрос.
    Ответ. $\overline{\varphi}(s) = \varphi(|s|)$, т. е. четное продолжение φ.

    (c) [*на дом*] Показать, что при любых ψ надо брать такие же продолжения ψ (соответственно виду условия).
    Способ I. Непосредственно проверить.
    Способ II. Написав задачу для $v = u_t$, свести к случаю $\varphi \neq 0$, $\psi = 0$ — так можно догадаться, какое продолжение ψ брать.

Занятие 1

. . . . Зан. 2 (1 час, если быстро)

[Если долго разбирать д. з. в началах занятий, то эта тема почти на 2 занятия, и тогда до 2 занятий довести путем решения части последних д. з. прямо в аудитории. Если же не разбирать д. з., то эта тема как раз на 1.5 занятия.]

18. Теперь мы понимаем, как решать (6),(7) — разбивая на 2 задачи, каждую из которых мы умеем решать. Можно делать сразу через общее решение — т. е. сделали М.—М. 8.11 a,b.

19. [*на дом*] М.—М. 8.11 c) (задача с косой производной). При каких b получилось и почему?

20. Как решать задачи вида (6),(7) при наличии правой части в уравнении, т. е. для уравнения (5)? Тогда годится тот же метод Дюамеля: пусть

$$w_{tt} - w_{xx} = 0; \quad w|_{t=\tau} = 0, \quad w_t|_{t=\tau} = f(\tau, x);$$

$$(w \text{ или } w_x)|_{x=0} = 0.$$

Тогда $u = \int\limits_0^t w(t, x, \tau) d\tau$ даст решение (6) или (7) соответственно. Доказательство аналогично п. 8 — главное, что краевое условие не зависит от t.

[в т. ч. сама граница вертикальна, т. е. не движется при изменении t, и краевое условие однородное.]

21. [*на дом*] Решить задачу

$$u_{tt} - u_{xx} = 2 \quad (t > 0, x > 0);$$

$$u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = 1; \quad u_x|_{x=0} = 3.$$

Замечание. Как раз такие задачи будут на контрольной.

22. Для практического решения краевых задач для УКС полезно следующее эквивалентное представление общего решения (4) — решить М.—М. 8.20.

23. Решить М.—М. 8.21 для (6) (пусть $a = 1$).

24. [*на дом*] Доделать М.—М. 8.21 (только $(0, L)$ заменим на (A, B)) — т. е. сделать задачу в стакане:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (t > 0, A < x < B);$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x);$$

$$u|_{x=A} = \mu(t), \quad u|_{x=B} = \nu(t).$$

Найти решение явно в двух треугольниках — характеристическом, построенном на начальном отрезке, и примыкающем к нему слева сверху. Убедиться, что условие при $x = A$ выполнено. Найти $[u]_{t=x-A}$.
Ответ. $[u]_{t=x-A} = \varphi(A) - \mu(0)$.
Сделать вывод о согласовании μ, φ и ν для $u \in C$.

25. **Замечание.** Задачу в стакане мы позже подробнее изучим другим методом (Фурье).

26. [дать время на местах подумать, а потом вызвать желающего] Решить М.—М. 8.25. В случае $\alpha > 3\pi/4$ указать, как поправить задачу, чтобы она стала корректной.

План занятий по теме № 9:

Метод Фурье: наивный подход.

4 занятия

[Это фактически М.—М. § 4 — он вошел весь, кроме пп. 4.6–4.8, 4.32–4.42]

1. Рассмотрим двумерное уравнение Лапласа в полярной СК:
$$0 = \Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)u.$$
Решить М.—М. 4.9.

2. М.—М. 4.10.

3. М.—М. 4.11.

4. Сказать замечание в конце текста М.—М. 4.11.

5. М.—М. 4.12.

6. (∗) [*на дом можно*] М.—М. 4.13.

7. М.—М. 4.14.

8. М.—М. 4.15.

занятие 1

. . . .

занятие 2

9. **Замечание**: во внешних задачах (Дирихле и Неймана в частности) требуется задавать дополнительные условия на ∞. Рассмотрим этот вопрос:

10. М.—М. 4.16.

11. М.—М. 4.17,4.18.

12. [*на дом можно*] М.—М. 4.19.

13. (примерно соответствует М.—М. 4.1–4.5) Рассмотрим задачи в некруговых областях:

$$\Delta_{x,y} u = 0 \quad ((x,y) \in (0,\pi)^2);$$

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u|_{x=\pi} = \varphi_2(y),$$

$$u|_{y=0} = \varphi_3(x), \quad u|_{y=\pi} = \varphi_4(x).$$

Снова строим набор базовых функций, но процесс «стопорится» из-за неоднородности всех условий.
Вывод: надо разбить задачу на две: $u = v + w$, где для v будут нули вместо $\varphi_{3,4}$, а для w будут нули вместо $\varphi_{1,2}$. Далее доделать до конца.

14. Перейдем к другим уравнениям: М.—М. 4.20.

15. $(*)$ М.—М. 4.21.

16. Текст перед М.—М. 4.22 и сама задача.

17. Текст перед М.—М. 4.23.

17.5. [*на дом*] М.—М. 4.23.

18. Текст перед М.—М. 4.24, сам М.—М. 4.24, текст перед М.—М. 4.25, возможно слегка начать М.—М. 4.25.

18.5. [*на дом*] М.—М. 4.25.

19. Потренируемся отклоняться от стандарта[25]:

    (a) [*на дом можно*] , но в следующий раз подробно разобрать — т. е. это как бы к занятию 3 относится: М.—М. 4.26 а).

[25]Стандарт: $x \in (0,\pi)$ или $R = 1$; D_t^1; стационарный оператор есть D_x^2.

(b) [*на дом можно*] , но в следующий раз подробно разобрать — т. е. это как бы к занятию 3 относится: М.—М. 4.26 b).

занятие 2

занятие 3

(c) М.—М. 4.26 c).

(d) (∗) [*на дом*] М.—М. 4.26 d).

20. «Итоговые задачи» (максимальная общность, хотя достаточно стандартно, но громоздко, поэтому лучше на дом или вообще пропустить):

    (a) (∗) М.—М. 4.26 e).

    (b) (∗) М.—М. 4.26 f).

21. [*на дом можно*] , но в следующий раз подробно разобрать — т. е. это как бы к занятию 4 относится: Теперь полезно разобрать задачи, в которых возникает нетривиальная задача ШЛ. Сначала подготовимся, решив саму задачу ШЛ: М.—М. 4.27.

занятие 3

занятие 4

22. Важна ортогональность СФ задачи ШЛ (чтобы был ортогональный базис). Это следует и из общей теории, но лучше сделать заново: М.—М. 4.28.

23. Теперь можно решать соответствующую задачу для Δ: М.—М. 4.29 a). Сделать принципиальную часть, можно доделать [*на дом*] .

24. [*на дом*] М.—М. 4.29 b).

25. Многомерная задача (но по-прежнему «наивный подход» — полное разделение переменных): М.—М. 4.30.

26. (∗) М.—М. 4.31.

План занятий по теме № 11:

Корректность по Адамару.

1–1.5 занятия

[Это М.—М. § 2. Он задействован весь, кроме пп. 2.10, 2.12, 2.13]

[Если эта тема идет с начала пары, то можно пройти ее за 1 занятие, и указанная в тексте граница разделяет половинки. Только тогда надо не задерживаться на разборе прошлых д. з. А если тема началась с середины пары (например, она идет после темы «УКС»), то указанная граница разделяет пары, а оставшуюся часть темы надо проходить за 1 занятие (т. е. всего будет 1.5 занятия), что удается за счет разбора д. з. (сразу по 2-м темам!) в начале 2-го занятия, а также за счет приемов, указанных в пп. 10,13.]

1. Напомнить, что понятие корректности может быть введено для любых задач вида $Au = f$, где A — некое отображение, u — искомая величина, а f — входные данные. В частности, это годится для краевых задач для ДУ. Мы хотим решить задачу, т. е. найти A^{-1}, обладающее свойством $u = A^{-1}f$, т. е. $A^{-1} : f \mapsto u$. Таким образом, для исследования корректности надо четко сформулировать, что́ из себя представляют: отображение $A : u \mapsto f$, величины u и f, а также подобрать классы $\mathcal{U} = \{u\}$ и $\mathcal{F} = \{f\}$ так, чтобы $A : \mathcal{U}$(или часть $\mathcal{U}$)$\to \mathcal{F}$, и тогда проверять 3 пункта определения Адамара:

   (a) $\forall f \in \mathcal{F}\ \exists u \in \mathcal{U}$ [т. е. A^{-1} определен на *всем* $\mathcal{F}$ (но пока, вообще говоря, неоднозначно) и действует в $\mathcal{U}$];

(b) $\forall f \in \mathcal{F}$ $u \in \mathcal{U}$ единствен [т. е. $A^{-1} : \mathcal{F} \to \mathcal{U}$ *однозначно*];

(c) $\forall f_n \xrightarrow{\mathcal{F}} f$ соответствующие $u_n \xrightarrow{\mathcal{U}} u$ [т. е. A^{-1} *непрерывно*].

Для этого следует ввести на $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ топологии. Чаще всего они порождаются нормами. Если при этом A линейно, то п. 3 сводится к ограниченности A^{-1}, т. е. оценке вида $\|u\|_{\mathcal{U}} \leqslant C\|f\|_{\mathcal{F}}$ (пояснить почему).

2. Рассмотрим пример: исследуем на корректность задачу

$$y'(t) = f(t), \quad t \in (0, B), \quad B < +\infty; \qquad y(0) = \alpha.$$

На ней отработаем идеологию исследования корректности пошагово (т. е. кого-то вызвать, но направлять по следующей схеме):

Этап I. Решение — это функция y; входные данные — это пара (f, α). Оператор A — это $A : \ y \mapsto (y', y(0))$, т. е. $A = (d/dt, (\cdot)|_{t=0})$.

Этап II. Подбираем классы: естественно взять $\mathcal{U} = C^1(0, B)$, тогда $\forall y \in C^1$ $Ay = (y', y(0)) \in C(0, B) \times \mathbb{R}$, т. е. естественно взять $\mathcal{F} = C(0, B) \times \mathbb{R}$.

Замечание. Мы только пробуем, в общем случае может не получиться с первого раза (тогда надо брать другие $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$) или не получиться вообще (тогда надо пытаться доказать некорректность в любых $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ — об этом см. далее).

Этап III. Проверяем пункты определения Адамара:

(a) $\forall (f, \alpha) \in C(0, B) \times \mathbb{R}$ $\exists y \in C^1(0, B)$ — верно.

(b) $\forall (f, \alpha) \in C(0, B) \times \mathbb{R}$ только один $y \in C^1(0, B)$ — верно.

(c) $\|y\|_{\mathcal{U}} \leqslant C\|(f, \alpha)\|_{\mathcal{F}}$ — верно.

Вывод. Наша задача корректна в указанной паре $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$.

Замечание. При $B = +\infty$ корректность тоже имеет место, но в топологических пространствах с системой полунорм на компактах.

3. Напомним (в лекциях было), что задача Коши для УКС:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0; \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = \psi$$

корректна в смысле: $\forall(\varphi, \psi) \in C^2 \times C^1$ $\exists! u \in C^2$, с оценкой также на компактах.

4. Ясно, что вопрос о корректности может зависеть от формулировки классов $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$. Рассмотрим пример:

$$y' = 1; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \tag{1}$$

Исследовать эту задачу на корректность.

Вывод. Надо разумно (обычно — как диктуется приложениями) выбирать, что́ можно варьировать (т. е. что́ является входными данными), и какие классы брать. Конкретно в ситуациях типа (1) принято говорить о некорректности, т. к. дополнительное условие (т. е. многообразие) в пространстве входных данных трактуется как переопределенность задачи (т. е. некорректность) — надо убрать часть условий.

5. [*на дом*] М.—М. 2.11.

6. Итак, возможны следующие причины некорректности:

   (a) Задача переопределена или недоопределена — решение не существует (или существует лишь в силу случайно подошедших данных) или неединственно соответственно; и это можно преодолеть только выбором «неестественных» классов $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ — пример: п. 4. Тогда надо поправить условия задачи.

(b) Классы $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ подобраны неудачно, и решение не существует или неединственно из-за этого — пример: начальная задача (задача Коши—Дирихле) для уравнения теплопроводности (см. лекции) — пришлось уточнить класс $\mathcal{U}$.

(c) Классы $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ подобраны неудачно, и нарушается п. 3 определения Адамара — пример: п. 2 при $B = +\infty$. Тогда надо поправить $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ (например, в п. 2 надо $B < +\infty$ или топологические пространства).

(d) При любых разумных $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ нарушается п. 3 определения Адамара — например: [напомнить пример Адамара для Δ — было в лекциях]. Тогда задачу следует «забраковать». Сказать о понятии «примеры типа Адамара»: $u(x, y, \dots) = \gamma_n \exp(\alpha_n x + \beta_n y + \dots)$.

7. [*на дом*] Построить пример типа Адамара для задачи Коши для системы Коши—Римана

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x; \qquad u|_{y=0} = \varphi(x), \quad v|_{y=0} = \psi(x).$$

Вывод. Задача Коши для эллиптических уравнений и систем некорректна из-за п. 3 определения Адамара.

$\boxed{\text{1 час — первый или второй}}$

. . . .

$\boxed{\text{2-й час или целое 2-е занятие}}$

8. [это почти без доказательства упоминалось на лекции — там и см. комментарии чтó здесь к чему] М.—М. 2.1 a,c.

9. [*на дом*] М.—М. 2.1 b,d. Почему примеры получились? [т. е. почему эти задачи некорректны в соответствующих областях параметров — ср. М.—М. 8.11 c) из темы «УКС»]

Указание. В «d» обратить внимание, что $x > 0$, так что не обязательно мнимые α_n!

10. [если еще много времени остается, то дать время подумать на местах, а потом вызвать — но оставить время для пп. 14,15!] Потренируемся в более сложных примерах (и сделаем заготовку для дальнейшего): М.—М. 2.2 b) в случае $a = 0$.

11. [*на дом*] М.—М. 2.2 b) при любых a.

12. [*на дом*] М.—М. 2.2 a). В частности, рассмотреть случай $a, b, c \in \mathbb{R}$ и объяснить, почему именно в этой области параметров имеет место некорректность.

13. [если еще много времени остается, то дать время подумать на местах, а потом вызвать — но оставить время для пп. 14,15!] Рассмотрим задачу Коши

$$u_{tt} - u_{xx} = 0; \quad u|_{x=0} = \varphi, \quad u_x|_{x=0} = \psi.$$

Она корректна, т. к. можно $t \leftrightarrow x$. А что будет для (многомерного) волнового уравнения? Решить М.—М. 2.5.

14. (∗) [*на дом*] Можно обобщить п. 13 — сделать М.—М. 2.6–2.9 (см. также вводные слова перед этими задачами).

    Вывод. Для волнового уравнения при $n > 1$ задача Коши корректна только на пространственно-подобных поверхностях (ср. лекции).

15. [*на дом*] М.—М. 2.4.

    Ответ. Пример Адамара получается при всех (a, b), кроме случая $a = -b$.

    Вывод. Случай кратных корней — неустойчивый в следующем смысле: в нем
    [корректность задачи Коши имеет место] $\Longleftrightarrow$
    [уравнение сводится к системе I порядка со СДО] $\Longleftrightarrow$

[младшие члены (т. е. их операторы) суть делители старших], т. е. в этом случае важны младшие члены.

Примеры. В М.—М. 2.2 a) все определялось типом уравнения, т. к. младшие члены нулевые, т. е. они всегда делители старших, а значит [корректность] $\iff$ [гиперболичность, или параболичность=«кратная гиперболичность»] $\iff$ [не эллиптичность].

В М.—М. 2.2 b) кратный корень, поэтому [корректность] $\iff$ [младшие члены суть делители старших, т. е. $b = 0$], что мы и видели там.

План занятий по теме № 12:

Обобщенные производные и соболевские пространства[26].

5 занятий

$\left[\text{Это фактически М.—М. § 13. Он вошел весь, кроме пп. 13.29–13.50}\right]$

1. Определение ОП, его происхождение; мультииндексы. Основные свойства ОП:
   (a) единственность, линейность.
   (b) $u \in C^{|\alpha|} \Rightarrow \exists$ ОП $D^\alpha u$ и она равна классической.
   (c) глобальность понятия ОП (напомнить, что L_1 состоит из классов функций) — полезно обозначать производную D^α в Ω символом D^α_Ω.
   (d) сужаемость ОП на более узкие области: $\forall \Omega_1 \subset \Omega$ $\exists D^\alpha_{\Omega_1} u = (D^\alpha_\Omega u)|_{\Omega_1}$.

[26] В основном идет по Г.—З. § 9. При этом совсем не задействованы следующие задачи: 323,326,328–330,347,348,350–360. См. также комментарий в Предисловии (об авторстве).

(e) $\exists D^\alpha, D^\beta, D^\alpha D^\beta, D^\beta D^\alpha \Rightarrow \exists D^{\alpha+\beta} = D^\alpha D^\beta = D^\beta D^\alpha$.

2. [это М.—М. 13.1] (есть в билетах) Нахождение ОП при $n = 1$ на примере $|\cdot|$ и sgn; общая задача:
$u \in C^1(-1,0) \cap C^1(0,1) \cap C(-1,0] \cap C[0,1)$ — выяснить существование ОП Du на $(-1,1)$
(ответ: Du существует $\Leftrightarrow u(-0) = u(+0)$).

3. [это М.—М. 13.2] [*на дом*] Объяснить «противоречие» между 3 фактами:

   (a) классические производные являются обобщенными.

   (b) классические производные не всегда коммутируют (вспомнить пример).

   (c) ОП всегда коммутируют.

   Указание: причина в неточности формулировок этих свойств. Нужно дать точные формулировки и указать соотношения между этими свойствами строго.

4. [это М.—М. 13.3,13.4] (320)[27] Понятие W_p^l. Подсчитать $\| \, |\cdot| \, \|_{W_p^1(-1,1)}$, найти $\lim\limits_{p\to+\infty}$ — трактовка ($\|\cdot\|_{W^1_\infty}$). Каким $W_p^l(-1,1)$ принадлежит $u(x) = x^3 \mathrm{sgn} x$? Найти ее норму в этих пространствах.

5. [это М.—М. 13.5] (есть в билетах) (324,325) Примеры ОП при $n > 1$ (вырезание особенностей).

   (a) Найти первые ОП от $u(x) = |x|^\gamma$: при каких γ это возможно? Каким $W_p^1(B(0,1))$ принадлежит u?

   (b) Сформулировать и доказать утверждение о существовании ОП от функции $f \in C^1(\Omega \setminus \{a\})$, где $a \in \Omega$ (т. е. какие требования о поведении в окрестности

[27] Здесь и далее в данной теме номера в скобках означают номера задач из Г.—З., которые покрываются соответствующими пунктами.

точки a достаточно наложить — как можно ближе к необходимым условиям).

6. [это М.—М. 13.6] (334) Понятие ядра усреднения (см. текст перед М.—М. 13.6 и 13.8) — общие соображения (определение, основные свойства).

   (a) Найти $c(n)$ для ядра Пуассона.

   (b) [это М.—М. 13.8] Выписать явно усреднения по Стеклову для абстрактной функции из $L_1(\mathbb{R}^n)$: случаи $n = 1$ и $n > 1$.

   (c) [это М.—М. 13.9] Выписать явно $\omega_{2\sqrt{t}}(x)$ для ядра Пуассона ω ($n \in \mathbb{N}$); подсчитать $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right)\omega_{2\sqrt{t}}(x)$. Рассмотрим функцию: $u(t, x) = (\varphi * \omega_{2\sqrt{t}})(x)$ для произвольной φ. Сделать выводы о: гладкости u, значении $u_t - \Delta_x u$ и поведении u при $t \to 0$. Выписать явно $u(t, x)$.

7. [это М.—М. 13.7] (есть в лекциях) (331) Построить пример ядра Соболева.

8. [это М.—М. 13.10] (321,322,335, частично 337) Пример на усреднения: рассмотрим $u(x) = |x|$ на $(-1, 1)$.

   (a) Найти u_h по Стеклову.

   (b) Найти u_h', u_h'', $(u')_h$ (заметить что $u_h' = (u')_h$).

   (c) Подсчитать $\beta(h, p) = \|u - u_h\|_{W_p^1(-1,1)}$ ($p < +\infty$, $h > 0$).

   (d) Доказать, что $\beta(h, p) \to 0$ при $h \to 0$ (и любых $p < +\infty$), причем скорость сходимости тем хуже, чем больше p.

   (e) Найти $\beta(h, +\infty)$. Объяснить, почему эта величина ужé не стремится к 0 при $h \to 0$.

(f) Заметить, что поведение функции u не замечается усреднением вне радиуса h (свойство финитного ядра).

9. [это М.—М. 13.11] Пусть $u \in C^k(\mathbb{R})$. Найти явно $(u_h)'$ по Стеклову. Какому пространству принадлежит u_h? Вывод: стекловское усреднение повышает гладкость на 1 у «классических функций», т. е. $(\cdot)_h \in \mathcal{L}(C^k, C^{k+1})$.

10. [это М.—М. 13.12] (336,337) Еще свойства финитных ядер и вообще усреднений на примере Стеклова: пусть $u \in L_1(0,1)$, продолжим нулем вовне $(0,1)$. Построим стекловское среднее u_h. Доказать:

    (a) $\|u_h\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant \beta(h)\|u\|_{L_1(0,1)}$, выписать $\beta(h)$.

    (b) $u_h \in C(\mathbb{R})$, а значит, можно написать
    $\|u_h\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant \beta(h)\|u\|_{L_1(0,1)}$, т. е.
    $(\cdot)_h \in \mathcal{L}(L_1(0,1), C(\mathbb{R}))$ с нормой $\beta(h)$.

    (c) (следствие) Если $u_k \to u$ в $L_1(0,1)$, то соответствующие $(u_k)_h \to u_h$ в $C(\mathbb{R})$, $\forall h > 0$, причем скорость сходимости ухудшается при $h \to 0$, т. к. $\beta(h)$ растет с уменьшением h.

    (d) u_h финитна (свойство финитных ядер).

11. [это М.—М. 13.13] (327) К вопросу о структуре $W_1^1(0,1)$. Напомним, что АНФ на $(0,1)$ — это $u(x) = A + \int\limits_0^x v(s)ds$, где $v \in L_1(0,1)$. Пусть задана произвольная АНФ u. Доказать, что:

    (a) u непрерывна (т. е. название АНФ оправдано). Но обратное неверно (лестница Кантора).

    (b) Существует ОП Du на $(0,1)$ и она равна v (использовать теорему Фубини).

(c) $u \in W_1^1(0,1)$. Таким образом, $\{\text{АНФ}\} \subset W_1^1$ (на самом деле здесь стоит равенство, но это позже).

12. [это М.—М. 13.14] (338) Усиление п. 10: пусть (как в п. 10) $u \in L_1(0,1)$ продолжена нулем на $\mathbb{R}$. Доказать, что стекловское среднее u_h удовлетворяет:

    (a) Существует ОП $(u_h)'$ на $\mathbb{R}$, выразить ее явно (как в п. 11).

    (b) $u_h \in W_1^1(\mathbb{R})$.

    (c) Оценить $\gamma(h) = \|(\cdot)_h\|_{\mathcal{L}(L_1(0,1),W_1^1(\mathbb{R}))}$ (ответ: $\gamma(h) \leqslant (3+2h)/(2h)$). Указание: $\|f\|_{L_1} \leqslant (\operatorname{diam}\operatorname{supp} f)\|f\|_C$, использовать п. 10.

    Таким образом, стекловское усреднение повышает гладкость на 1 и у функций интегрируемых классов (ср. п. 9). Кроме того, этот пункт есть усиление п. 10 (хотя γ хуже чем β), т. к. $\mathcal{L}(L_1(0,1), W_1^1(0,1)) \hookrightarrow \mathcal{L}(L_1(0,1), C(0,1))$ в силу $W_1^1(0,1) \hookrightarrow C(0,1)$ [с нормой 1] (см. п. 15).

13. [это из М.—М. 13.15] Напомнить свойства соболевских средних:

    (a) Для любой $u \in L_p(\Omega)$ (продолженной нулем вне Ω) верно $u_h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u_h \to u$ в $L_p(\Omega)$.

    (b) Для любой $u \in W_p^l(\Omega)$ (продолженной нулем вне Ω) верно $u_h \to u$ в $W_p^l(\Omega_1)$, где $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$.

    (c) Если существует ОП $D^\alpha u$, то $D^\alpha u_h = (D^\alpha u)_h$ в Ω_1, где $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$.

14. [это из М.—М. 13.15] Напомнить понятие вложения нормированных пространств.

15. [это из М.—М. 13.15] (есть в лекциях) (339–346) Доказать вложение $W_1^1 \hookrightarrow C$ (при $n = 1$):

(a) Пусть $u \in C^1(0,1)$, $\exists x_0 \in [0,1]$: $u(x_0) = 0$. Доказать $\|u\|_{C(0,1)} \leqslant \|u'\|_{L_1(0,1)}$.

(b) Пусть $u \in C(0,1)$, $\overline{u} = \int\limits_0^1 u(x)dx$. Доказать $\exists x_0 \in [0,1]$: $(u - \overline{u})(x_0) = 0$.

(c) Пусть $u \in C^1(0,1)$. Доказать $\|u\|_{C(0,1)} \leqslant \|u\|_{W_1^1(0,1)}$.

(d) Пусть $u \in W_1^1(0,1)$. Приблизив эту функцию ее усреднениями по Соболеву в $W_1^1(\varepsilon, 1-\varepsilon)$, доказать, что $\exists v_\varepsilon \in C(\varepsilon, 1-\varepsilon)$ такая, что $u = v_\varepsilon$ п. в. на $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$. Следствие: u эквивалентна функции $v \in C(0,1)$, т. е. $W_1^1(0,1) \subset C(0,1)$ как множества.

(e) Пусть $u \in W_1^1(0,1)$. Доказать $\|u\|_{C(0,1)} \leqslant \|u\|_{W_1^1(0,1)}$, т. е. $W_1^1(0,1) \hookrightarrow C(0,1)$.

16. [это М.—М. 13.16] (есть в лекциях, но лучше повторить) Пусть $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, существует ОП $D_{x_i}u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\psi \in C^\infty(\Omega)$. Доказать, что существует ОП $D_{x_i}(\psi u) = (D_{x_i}\psi)u + \psi D_{x_i}u$.

17. [это М.—М. 13.17] (есть в лекциях другим способом, при любых n, но лучше повторить) Пусть $u \in W_1^1(0,1)$. Доказать, что $u(1) - u(0) = \int\limits_0^1 (Du)(x)dx$. Указание: приблизить усреднениями по Соболеву на $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$, затем $\lim_h$, затем $\lim_\varepsilon$.

18. [это М.—М. 13.18] (есть в лекциях) (349) Пусть $u, v \in W_1^1(0,1)$. Доказать, что существует ОП $D(uv) = (Du)v + uDv$, причем $uv \in W_1^1(0,1)$. Указание: приблизить u усреднениями по Соболеву на $(\varepsilon, 1-\varepsilon) \supset \mathrm{supp}\varphi$, затем $\lim_h$.

19. [это М.—М. 13.19] Доказать, что $\{\text{АНФ}\} = W_1^1$ при $n = 1$ (в одну сторону доказали в п. 11).

20. [это М.—М. 13.20] Пусть $u \in W_1^1(-1,0) \cap W_1^1(0,1)$. Когда $u \in W_1^1(-1,1)$? (ответ: при $u(-0) = u(+0)$ — необходимость ясна из вложения $W_1^1 \hookrightarrow C$; надо доказать достаточность). Итак,
$W_1^1(-1,0) \cap W_1^1(0,1) \cap C(-1,1) = W_1^1(-1,1)$.

21. [это из М.—М. 13.21] Напомнить теорему о продолжении $W_p^l(\Omega) \to W_p^l(\Omega')$, где $\Omega' \supset \overline{\Omega}$. Следствие: при подходящем продолжении u за пределы Ω можно добиться $u_h \to u$ в $W_p^l(\Omega)$.

22. [это из М.—М. 13.21] (фактически есть в билетах) Построить оператор продолжения $W_1^1(0,1) \to W_1^1(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ и найти его норму в $\mathcal{L}(W_1^1(0,1), W_1^1(-\varepsilon, 1+\varepsilon))$ (т. е. оценить ее сверху величиной $(1+2\varepsilon)$ и доказать, что она достигается).

23. [это из М.—М. 13.22] Напомнить определение
$\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega) = \mathrm{cl}_{W_p^l(\Omega)} C_0^\infty(\Omega)$. Таким образом, $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$ — это полное пространство, являющееся (замкнутым) подпространством в $W_p^l(\Omega)$.

24. [это из М.—М. 13.22] (есть в лекциях) Доказать, что если $u \in W_p^l(\Omega)$ финитна в Ω, то $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$ (указание: рассмотреть усреднения u_h по Соболеву). Это несложно с использованием следствия в п. 21. Упражнение: проделать то же без использования этого следствия, т. е. без ссылки на теорему о продолжении.

25. [это М.—М. 13.23] (есть в билетах) (332,333) Изучим структуру $\overset{\circ}{W}{}_p^l$ на примере $n = 1$. Доказать, что

$\overset{\circ}{W}{}_1^1\ (0,1) = \{\ u \in W_1^1(0,1) \mid u(0) = u(1) = 0\ \}$ (запись имеет смысл в силу п. 15). Указание для «$\supset$»: срезать функцию u непрерывным образом вблизи концов и воспользоваться п. 24.

26. [это из М.—М. 13.24] Напомнить теорему о продолжении $W_p^l(\Omega) \to \overset{\circ}{W}{}_p^l\ (\Omega')$, где $\Omega' \supset \overline{\Omega}$. Таким образом, п. 21 можно усилить, хотя норма оператора от этого пострадает — см. п. 27.

27. [это из М.—М. 13.24] (есть в билетах) Построить оператор продолжения $W_1^1(0,1) \to \overset{\circ}{W}{}_1^1\ (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ и найти его норму в $\mathcal{L}(W_1^1(0,1), W_1^1(-\varepsilon, 1+\varepsilon))$ (т. е. оценить ее сверху величиной $(3+\varepsilon)$ и доказать, что она достигается). Указание: использовать п. 25 и действовать аналогично ему.

28. [это М.—М. 13.25–13.28] Дополнительные задачи по всей теме:

    (a) Пусть $u(x) = \exp(-x^4 \sin^2 x)$. Доказать $u \in L_2(\mathbb{R}) \setminus W_2^1(\mathbb{R})$.

    (b) (324) Рассмотрим $u(x) = \ln|\ln|x||$ в шаре $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$. Доказать, что существуют ОП $D_{x_i}u$ в Ω. При каких p верно $u \in W_p^1(\Omega)$?

    (c) Пусть $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ имеет все ОП первого порядка $Du \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Доказать, что $Du = 0 \Longrightarrow u = \mathrm{const}$.

    (d) Пусть $u(x) = \sin x$. Доказать, что $u \in \overset{\circ}{W}{}_1^1\ (0,\pi) \setminus \overset{\circ}{W}{}_1^2\ (0,\pi)$.

План занятий по теме № 14:
Одномерное уравнение теплопроводности.
2.5–3 занятия

[Это М.—М. § 5. Он задействован весь, кроме пп. 5.22,5.23, и почти все из Г.—З. § 7]

[Границы между занятиями не жесткие. В нынешнем виде они соответствуют бодрому темпу почти без разбора д. з., тогда всего 2.5 занятия (если на 3-м занятии не разбирать особо ничего), или 3 (если все-таки на 3-м занятии подробно все разобрать из д. з. и порешать пп. 24,25 в аудитории). А можно идти помедленнее, тогда 3 занятия естественно получатся. Учесть, что п. 24 все-таки неплохо бы разобрать как венец темы (применение в физике).]

1. Рассмотрим уравнение теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$ и задачу Коши—Дирихле для него $u|_{t=0} = \varphi(x)$. В лекциях было показано, что решение этой задачи единственно в классе не слишком быстро растущих по x решений, и дается формулой Пуассона

$$u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(\xi) d\xi, \qquad (1)$$

причем $u \to \varphi$ при $t \to 0$ во всех точках непрерывности функции φ, и решение с разрывными φ тоже существует и единственно (но в точках разрыва нет предела у u).

2. Заменой $z = \dfrac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$ привести формулу (1) к новому виду.
Ответ.

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x + 2a\sqrt{t} \cdot z) e^{-z^2} dz. \qquad (2)$$

3. Посмотрим, какие свойства решений можно извлечь непосредственно из формул (1)=(2). Решить М.—М. 5.1. Какие условия на φ требуются?

4. Рассмотрим подробнее ситуацию с разрывными φ: решить М.—М. 5.2. Использовать обозначение

$$E(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{-z^2} dz \tag{3}$$

(интеграл вероятностей). Это спец. функция, некоторые ее свойства видны сразу: $E \nearrow$, $E(-\infty) = 0$, $E(0) = 1/2$, $E(+\infty) = 1$. Выписать вид решения и ответить на вопросы задачи.

5. [*на дом*] Г.—З. 268. В каком смысле принимаются данные $u|_{t=0} = \varphi(x)$ в точке $x = 0$?

6. Полезный способ явного нахождения решения начальной задачи в обход формул (1),(2) — М.—М. 5.3. Решить пп. a,b.

7. [*на дом*] М.—М. 5.3 c.
Указание. Использовать идеи из фрагмента лекций [20] об аналитическом решении задачи Коши для уравнения Лапласа (в духе теоремы Коши—Ковалевской). Сравнить с примером Ковалевской (см. лекции).

8. М.—М. 5.4 — прямо на местах понять.

9. М.—М. 5.5.

10. [*на дом*] М.—М. 5.6.

11. Еще один способ явного нахождения решений (причем не только начальной задачи!) — автомодельные решения. Рассмотрим М.—М. 5.7.

(a) Показать, что $\beta = 1/2$, а α любое, т. е. общий вид автомодельных решений: $u(t,x) = t^\alpha f(x/\sqrt{t})$, где

$$a^2 f''(z) + \frac{1}{2} z f'(z) - \alpha f(z) = 0. \tag{4}$$

(b) Найти все решения (4) при $\alpha = 0$.

(c) В случае $\alpha = -1/2$ ищем решения в виде $f = e^g$ — написать уравнение для g; искать g в виде квадратичного полинома. Получить частное решение $f(z) = \exp(-z^2/(4a^2))$.

(d) В силу формулы Остроградского—Лиувилля для всех пар решений f, h уравнения (4) вывести формулу $\det \begin{bmatrix} f & h \\ f' & h' \end{bmatrix} = C \exp(-z^2/(4a^2))$, и если f известна, то можно получить

$$h(z) = f(z) \left(C_1 + C_2 \int\limits_0^z \frac{\exp(-s^2/(4a^2))}{f^2(s)} ds \right). \tag{5}$$

(e) Ввиду пп. c,d выписать общее решение (4) при $\alpha = -1/2$. Какова асимптотика решений на $\pm\infty$?

занятие 1

. . . .

занятие 2

12. М.—М. 5.8. Рассмотреть случай $Q = 1$. Отметим, что (1) есть свертка найденного ФР с функцией φ.

13. [*на дом*] Г.—З. 271.

    (a) *Способ I* — через формулу (2).

    (b) *Способ II* — использовать частное решение из п. 12 (т. е. ФР).

14. Перейдем к решению краевых задач с помощью автомодельных решений. Рассмотрим простейшую: решить М.—М. 5.9.

    (a) *Способ I* — использовать решения из п. 11.

    (b) [*на дом*] *Способ II.* Пусть $a = 1$. Подобрать $\alpha = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$ так, что решение задачи $u_t = u_{xx}$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \alpha\theta(-x)$ (θ — функция Хевисайда), удовлетворяет условию $u|_{x=0} = A$ — использовать п. 5 (т. е. Г.—З. 268). Сравнить ответ с п. a.
    Замечание. Подобный прием использовался в лекциях для решения задачи в стакане.

15. При решении таких же задач с непостоянным краевым данным используется метод Дюамеля — решить М.—М. 5.10.
    Замечание. Нужно интегрировать по частям при проверке условия $Bu|_{x=0} = \mu(t)$ (иначе формальная подстановка сразу $x \to 0$ дает $Bu|_{x=0} = 0$) — сначала рассматриваем $x > 0$, интегрируем по частям, а затем $x \to 0$. Эта ситуация аналогична неравномерной сходимости рядов Фурье (см. в соответствующей теме о решении неоднородных краевых задач разложением по базису однородной задачи).

16. Если, наоборот, краевое условие однородное, а начальное данное — нет, то можно (как и для УКС) продолжить φ на все $\mathbb{R}$ в виде функции $\overline{\varphi}$, подобрав ее так, что решение соответствующей начальной задачи удовлетворяет краевому условию. Решить М.—М. 5.11.

    (a) *Способ I.* Рассмотреть начальную задачу с данными $\psi(x) = \overline{\varphi}(-x)$ и сравнить два решения; сделать выводы о поведении u при $x = 0$ при разных типах продолжений.

(b) [*на дом*] *Способ II* — непосредственно из (1).

17. [*на дом*] Г.—З. 276.
Указание. Лучше не писать явный вид, а действовать как в п. 16а.

18. [*на дом*] (обобщение Г.—З. 282). Пусть

$$u_t = u_{xx} \quad (x > 0,\ t > 0), \qquad u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u|_{x=0} = 0,$$

причем существует $\gamma = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$. Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,x)$ при фиксированном $x > 0$.

19. [*на дом*] Г.—З. 274.

20. Выясним, какие еще α (помимо изученных в п. 11 $\alpha = 0$ и $\alpha = -1/2$) допускают явное решение уравнения (4).
   (a) Решить М.—М. 5.12. Заметить что получаются полиномиальные решения $u(t,x)$. Выписать их явно для $\alpha = 0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2,\ 2$.
   (b) Выписать общее решение (4) при $2\alpha \in \mathbb{N}_0$ (использовать (5)).

21. [*на дом*] Чтобы рассмотреть также случай $\alpha < 0$, надо сделать специальную замену:
   (a) Решить М.—М. 5.13.
   (b) Решить М.—М. 5.14.
   (c) Выписать общее решение (4) при $(-2\alpha - 1) \in \mathbb{N}_0$ (снова использовать (5)).

22. [*на дом*] М.—М. 5.15 (пропустить «исследование единственности»).

(a) *Способ I.* Найти автомодельное решение с полиномиальной f, удовлетворяющее условию при $x = 0$, а для удовлетворения условия при $t = 0$ найти добавок как решение задачи вида

$$w_t = w_{xx} \quad (x > 0,\, t > 0), \quad w|_{t=0} = \varphi(x), \quad w|_{x=0} = 0$$

с подходящей φ.

(b) *Способ II* — использовать М.—М. 5.9, 5.10.

(c) *Способ III* — использовать автомодельные решения с f — сразу общим решением уравнения (4), и использовать п. 20b.

(d) (∗) С помощью программ символьных вычислений сравнить ответы всех 3 способов и убедиться, что они совпадают.

занятие 2
. . . .
занятие 3

23. Применение автомодельных решений для нетривиальных задач: рассмотрим М.—М. 5.16.

    (a) Искать автомодельные решения; на полуцелых α понять, что годится только $\alpha = 0$ (другие $\alpha \in \mathbb{R}$ отсеивать не будем).

    (b) Сделать основную часть — выписать все уравнения для неизвестных постоянных.

    (c) [*на дом*] Досчитать до конца, выписать ответ, используя обозначение (3).

24. [*на дом*] (можно и в ауд., если надо дотянуть до полных 3-х занятий) М.—М. 5.17 — отметить ошибку в условии: $u_1|_{x=0} = c^-$ вместо $u_1|_{t=0} = c^-$.

25. [*на дом*] (можно и в ауд., если надо дотянуть до полных 3-х занятий) М.—М. 5.19.

26. $(*)$ [*на дом*] Используя метод Фурье и изученное в той теме, решить:

    (a) М.—М. 5.18 (аналог М.—М. 4.21 — действовать аналогично).

    (b) М.—М. 5.20.

    (c) М.—М. 5.21.
    Указание. Для догадки, чему равен $\lim_{t\to\infty} u$, рассмотреть «предельную задачу», в которой убрано u_t.

План занятий по теме № 15:
Волновое уравнение.
2.5–3 занятия

[Это фактически М.—М. § 9 — он вошел весь, кроме пп. 9.21,9.23]

1. Напомним: волновое уравнение — это

$$u_{tt} = \Delta u \tag{1}$$

($\Delta = \Delta_x$, $x \in \mathbb{R}^n$; пусть $f = 0$), а задача Коши для него:

$$(u, u_t)|_{t=0} = (\varphi, \psi). \tag{2}$$

Известно, что при $\varphi \in C^{[\frac{n}{2}]+2}$, $\psi \in C^{[\frac{n}{2}]+1}$ решение существует и единственно в классе C^2. Имеют место формулы Кирхгофа, Пуассона и Даламбера (напомнить) для $n = 3, 2, 1$ соответственно, причем последние две можно вывести из первой методом спуска.

2. [это М.—М. 9.1] Сферические волны при $n = 3$: пусть $u = u(r, t)$, где $r = |x|$, т. е. при всех t решение постоянно на сферах. Вывести уравнение для функции

$v(r,t) = ru(r,t)$, учитывая, что в данном случае $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$. Найти общее решение. Не все решения имеют хороший смысл, т. е. надо отобрать РСВ, т. к. только они годятся для корректных краевых задач. Сначала рассмотрим смежный вопрос:

3. [это из М.—М. 9.2] Переписать задачу Коши (1),(2) в терминах v — обратить внимание, что область здесь это $\{\, r > 0,\ t > 0 \,\}$, поэтому нужно дополнительное условие при $r = 0$ (следствие факта $u \in C$). Другими словами, задача о РСВ имеет вид

$$u_{tt} = \Delta u, \quad u = u(t,r), \quad u \in C. \tag{3}$$

4. [это из М.—М. 9.2] Переписать задачу (3) о РСВ в терминах v. Ответ:

$$v_{tt} = v_{rr}, \quad v|_{r=0} = 0, \quad t > 0. \tag{4}$$

5. [это М.—М. 9.3] Найти общее решение (4), т. е. общий вид РСВ. Ответ:

$$v(r,t) = \begin{cases} A(r+t) + B(r-t), & r > t, \\ A(r+t) - A(t-r), & r < t, \end{cases} \tag{5}$$

где $A(0) + B(0) = 0$.

6. [это М.—М. 9.4] Найти решение задачи (1),(2) с

$$\varphi = 0, \quad \psi = \psi(r) \tag{6}$$

(можно из (5), подставив в общий вид данные (6), а можно поставить заново задачу (3)).

7. [это М.—М. 9.5] Найти решение предыдущей задачи с $\psi = \chi_{[0,R]}$, где $R \in (0, +\infty)$. Нарисовать график $u(t, r_0)$ при $r_0 = \mathrm{const}$.
Подсказка. Будет 3 случая: $r_0 \leqslant R/2$; $R/2 \leqslant r_0 \leqslant R$; и $r_0 \geqslant R$.

8. [это М.—М. 9.6] Пусть функция v есть решение задачи

$$v_{tt} = \Delta_x v, \quad v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = \varphi(x).$$

Доказать, что $u = v_t$ есть решение задачи

$$u_{tt} = \Delta_x u, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

9. [это М.—М. 9.7] Решить задачу

$$u_{tt} = \Delta_x u, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0; \quad u|_{t=0} = \chi_{B(0,R)},\ u_t|_{t=0} = 0$$

(на основе пп. 7,8). Нарисовать график $u(t, r_0)$ при $r_0 = \text{const}$. Обратить внимание на «эффект N-волны»: $-|\diagdown|-$. Физический смысл (цунами).

10. [это М.—М. 9.8] Плоские волны: рассмотрим функцию $u(x, y, z, t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t)$. При каких α, β, γ, ω она удовлетворяет уравнению $u_{tt} = \Delta_{x,y,z} u$?
Ответ. $\omega^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ (плоская волна, т. к. при любом t решение постоянно на плоскостях).

11. [это М.—М. 9.9] Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = \Delta_{x,y,z} u, \quad u|_{t=0} = \varphi(x + y), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

Указание. Искать решение в виде суммы двух плоских волн (ясно, что u не зависит от z, так что можно сразу рассматривать $u = u(t, x, y)$).
Ответ. $u = \dfrac{\varphi(x + y - \sqrt{2}\,t) + \varphi(x + y + \sqrt{2}\,t)}{2}$.

12. [это М.—М. 9.10] Пусть в предыдущей задаче $\operatorname{supp}\varphi = [0, h]$. В какой области (при $t > 0$) решение может отличаться от 0?

13. [это М.—М. 9.11] Пусть в п. 11 φ известна только на $[0, h]$. Где решение можно однозначно найти при $t > 0$?

14. [это из М.—М. 9.12] Доказать, что Δ выдерживает поворот, т. е. если матрица A ортогональна (в $\mathbb{R}^n$), $Ax = \xi$, $u(x) = v(Ax) = v(\xi)$, то $\Delta_\xi v = \Delta_x u$.

15. [это из М.—М. 9.12] В частности, если $n = 3$,
$A = \begin{bmatrix} A_2 & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, где A_2 — ортогональная матрица в $\mathbb{R}^2$, т. е. $A_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$, то получаем, что Δ в $\mathbb{R}^2$ выдерживает поворот матрицей A_2. Прокомментировать возможность разложения любого поворота в $\mathbb{R}^3$ по элементарным поворотам указанного вида.

16. [это М.—М. 9.13] Рассмотрим плоскую волну $u(x, y, z, t) = f(\alpha x + \beta y - \omega t) = u(x, y, t)$ (т. е. для простоты считаем, что по z уже повернули). Найти поворот плоскости (x, y) матрицей A_2 (т. е. угол φ), при котором в новой плоскости (ξ, η) (после замены $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$) волна примет вид $v = v(\xi, t)$ и найти ее общий вид (изначально пусть $\beta \neq 0$, иначе тривиально).
Следствие. Плоские волны, с точностью до поворота, суть решения УКС.

17. [это М.—М. 9.14] Рассмотрим некоторые общие факты для волнового уравнения (другие способы решения). Начнем со вспомогательной задачи для ОДУ:

$$u_{tt} = Au, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = \psi$$

(где $A < 0$, φ и ψ — числа). Решить задачу.
(∗) Записать ответ, сведя оба члена к sin (член с φ есть d/dt от выражения, аналогичного члену с ψ).
Ответ. $u(t) = \dfrac{\sin(\sqrt{-A}\,t)}{\sqrt{-A}}\psi + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\sin(\sqrt{-A}\,t)}{\sqrt{-A}}\varphi$ (можно и

не расписывать второй член через sin, но так лучше, т. к. соответствует формуле Кирхгофа).

18. [это М.—М. 9.15] Записать те же 2 формулы в виде ряда по степеням A с коэффициентами, зависящими от t.
Ответ.
$$u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A^k \psi + \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A^k \varphi =$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A^k \psi + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k \varphi.$$

19. [это М.—М. 9.16] Записать формально решение задачи Коши (1),(2) на основе предыдущей задачи. Какие требования на φ и ψ возникают?
Ответ.
$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k \psi(x) + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k \varphi(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k \psi(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \Delta^k \varphi(x). \qquad (7)$$
Требуется по крайней мере (для осмысленности каждого слагаемого ряда) $\varphi, \psi \in C^\infty$.

20. [это М.—М. 9.17] Но $\varphi, \psi \in C^\infty$ недостаточно для того, чтобы ряд (7) сходился и давал решение задачи (1),(2). Рассмотрим случай, когда этого все же хватает:
Доказать, что если φ и ψ — полиномы, то формула (7) корректна и дает решение (1),(2), причем u — тоже полином. Какова его степень?
Ответ. $\deg u = \max\{\deg\varphi, \deg\psi + 1\}$.

21. [это М.—М. 9.18] Найти решение уравнения (1) во всем $\mathbb{R}^{n+1}$ в виде $u(t,x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} t^k U_k(x)$ (т. е. найти связи между U_k). Построить формально решение задачи (1), (2). Показать, что получается та же формула (7).

    Ответ. $U_{k+2} = \dfrac{\Delta U_k}{(k+1)(k+2)}$ — общее решение; при решении задачи Коши получится $U_0 = \varphi$, $U_1 = \psi$, что даст ту же формулу (7).

22. ($*$) [это М.—М. 9.19] Укажем еще пример, когда формула (7) имеет смысл (сделаем для $\psi = 0$, иначе аналогично). Пусть[28] $n = 1$, а φ голоморфна в круге $B(x_0, R)$: $\varphi(x) = \sum\limits_{\alpha} \dfrac{D^\alpha \varphi|_{x_0}}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha$. Доказать, что ряд (7) сходится при $x = x_0$ в области не у́же чем $t \in [0, R)$.

    Указания.

    (a) Достаточно показать, что ряд формально ограничен по модулю (т. к. тогда он абсолютно сходится);

    (b) использовать формулу для R: $\dfrac{1}{R} = \overline{\lim}\left(\dfrac{D^\alpha \varphi|_{x_0}}{\alpha!}\right)^{1/|\alpha|}$ (она дает оценку для $D^\alpha \varphi|_{x_0}$, т. к. R задано);

    (c) (нужно только при $n = 2$) воспользоваться разложением $\Delta^k = \sum\limits_{s=0}^{k} C_k^s D_{x_1}^{2s} D_{x_2}^{2k-2s}$ и оценкой $\sum\limits_{s=0}^{k} \dfrac{C_k^s}{C_{2k}^{2s}} \leqslant d(k)$, где $2 < d(k) \to 2$, т. е. $d(k) \leqslant d_* = \mathrm{const} < \infty$.

23. ($*$) [это М.—М. 9.20] Доказать, что ряд (7) (в условиях

[28]Можно и $n = 2$, но тогда некоторые факты из теории функций неочевидны, так что лучше этот случай пока не трогать.

предыдущей задачи) сходится в области не у́же конуса $0 \leqslant t < R - |x - x_0|$.

Указание. Разложить φ в новый ряд в любой точке $x_1 \in B(x_0, R)$ и заметив, что его радиус сходимости не меньше чем $R - |x_1 - x_0|$, сослаться на п. 22.

Замечание. Сразу было ясно, что область сходимости ряда не больше конуса, т. к. мы задали φ рядом в круге, значит решение можно найти в характеристическом конусе. Суть в том, чтобы доказать, что область сходимости не меньше этого конуса.

24. (∗) Доказать, что ряд (7) в общем случае не может сходиться в области шире указанного в п. 23 конуса.
Указание. Воспользоваться понятием области единственности[29].

Дополнительный материал (проект).

1. Из М.—М. и вообще из задумок (по теме «волновое уравнение»): [3 задачи по цилиндрическим волнам (задачи 5–7 в теме) — не вошло в задачник], а также задача — [конкретный вариант п. 6 из данного текста (задача 3 в теме) — М.—М. 9.22].

2. Метод спуска $3 \to 2$, $2 \to 1$ (вывод).

3. Области влияния и единственности для $n = 2, 3$ из формул Кирхгофа и Пуассона, принцип Гюйгенса.

4. Решение задачи Коши для конкретных данных на основе формул Кирхгофа и Пуассона (кроме плоских и сферических волн, которые итак сделаны выше).

[29] Формулировку этой задачи надо еще получше обдумать.

План занятий по теме № 16:
Эллиптические уравнения (разное).
2.5–3 занятия

[Из М.—М. § 3 задействовано все, кроме пп. 3.8, 3.11–3.14, и 1 задача из Г.—З. § 6, и М.—М. § 11]

1. (долго, но это нормально). В лекциях об уравнении Лапласа изучался ряд свойств гармонических функций:

   (a) принцип максимума;

   (b) усиленный принцип максимума;

   (c) бесконечная гладкость;

   (d) теоремы о среднем (прямая и обратная);

   (e) неравенство Гарнака:
   $$\frac{(R-|x|)R^{n-2}}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{(R+|x|)R^{n-2}}{(R-|x|)^{n-1}}u(0),$$
   если $u \geqslant 0$ (!);

   (f) теорема Лиувилля;

   (g) теорема об устранимой особенности — здесь нужно вспомнить, что ФР имеет вид
   $$\mathcal{E}_n(z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|z|}, & n = 2, \\ -\dfrac{1}{\sigma_n(n-2)}|z|^{2-n}, & n \geqslant 3; \end{cases}$$

   (h) асимптотика на ∞: если $u \to 0$ или (при $n = 2$) $u(x)/\ln|x| \to 0$ на ∞, то $(D^\alpha u)(x) = O(|x|^{2-n-|\alpha|})$ равномерно по сферам, а при $n = 2$ даже $u \to \mathrm{const}$.

   Вспомнить формулировку всех этих свойств ((d) обратная — это М.—М. 3.15, так что решать это уже́ не надо). Сказать, что:

(a) Логические связи между этими свойствами следующие: (d) $\Leftrightarrow$ гармоничность; (d) $\Rightarrow$ (b),(a); также (d) $\Rightarrow$ (c), если использовать М.—М. 13.50 (об этом в другой теме); (e) $\Rightarrow$ (f); (g) $\Rightarrow$ (h).

(b) Свойство (b) означает, что из $\Delta u = \Delta v = 0$, $(u \geqslant v)|_{\partial\Omega}$ следует $(u \geqslant v)|_{\Omega}$, причем это верно и в случае, когда u и v имеют конечное число особенностей (разрывов), и *ограничены* — это так наз. теорема о разрывной мажоранте (на лекции ее не было, но мы будем использовать сейчас).

2. Проиллюстрируем теорему о среднем еще 1 способом:

   (a) Решить М.—М. 3.1, 3.2.

   (b) М.—М. 3.3.
   Указание. Представить уравнение Дарбу в «дивергентном» виде $(R^2 v_R)_R = R^2 \Delta v$.

   (c) М.—М. 3.4.
   Указание. Исследовать второе (независимое от подсказанного в задаче) решение уравнения Дарбу с помощью теоремы Остроградского—Лиувилля.

3. В разных вопросах (в частности, в методе Фурье в многомерном случае) полезно понятие СФ для уравнения Лапласа. Рассмотрим сначала случай параметра в краевом условии:

   (a) Решить М.—М. 3.5 a).

   $\boxed{\text{занятие 1}}$
   ....
   $\boxed{\text{занятие 2}}$

   (b) Доказать, что СФ u_λ с разными λ ортогональны в $L_2(\partial\Omega)$ (т. е. это поправленный М.—М. 3.5 b).

   (c) Доказать ортогональность ∇u_λ в $L_2(\Omega)$.

(d) В случае $\Omega = B(0,R) \subset \mathbb{R}^2$ найти явно эти СФ (выразить их в декартовой СК для порядков 0–2). Показать их ортогональность в $L_2(\Omega)$ (т. е. это М.—М. 3.5 b) в случае круга).

4. (вместе с п. 3 это обобщение М.—М. 11.9).
Рассмотрим СФ:

$$\Delta u = \lambda u \quad \text{в } \Omega \subset \mathbb{R}^n; \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \ \text{ или } \ \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $\beta \geqslant 0$ — вообще говоря, функция.

(a) Доказать, что все СЧ $\lambda \leqslant 0$.

(b) Выяснить, является ли $\lambda = 0$ СЧ-ом для I, II краевых условий.

(c) Что можно сказать о том, является ли $\lambda = 0$ СЧ-ом для III краевого условия при разных β?

(d) Доказать, что СФ u_λ с разными λ ортогональны в $L_2(\Omega)$.

4.5 [*на дом*]

(a) М.—М. 11.8.

(b) М.—М. 11.12 (сделать сразу для любого n).
Указание. Рассмотреть векторы $\mathbf{w} = (\Delta u)\nabla u$, $\mathbf{v}$ — с компонентами $v_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, и вычислить их дивергенции.

5. Найдем СФ для Δ в круге (с I краевым условием):

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad r < R; \qquad u|_{r=R} = 0; \qquad n = 2.$$

(a) Ищем разложение u по 1, $\cos k\varphi$, $\sin k\varphi$. Выписать условия для коэффициентов $a(r)$:

$$a'' + \frac{1}{r}a' + \left(\lambda - \frac{k^2}{r^2}\right)a = 0, \qquad a(R) = 0.$$

(b) С помощью замены $a(r) = f(\beta r)$ свести задачу к

$$f''(\xi) + \frac{f'(\xi)}{\xi} + \left(1 - \frac{k^2}{\xi^2}\right)f(\xi) = 0, \qquad f(\sqrt{\lambda}R) = 0. \tag{1}$$

Таким образом, надо решить написанное ОДУ и получить решение f_k, а тогда $\beta_{km} = \mu_{km}/R$, $\lambda_{km} = (\mu_{km}/R)^2$, где μ_{km} — нули f_k.

(c) Найти частное решение уравнения $(1)_1$ в виде ряда $f(\xi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n\xi^n$ и нормировать его так, что $f(\xi) = \dfrac{\xi^k}{(2k)!!} + \dots$.

Ответ. $f(\xi) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^s}{s!(s+k)!}\left(\dfrac{\xi}{2}\right)^{2s+k} \equiv J_k(\xi)$ — функция Бесселя порядка k (1-го рода)[30].

Указание. Рассмотреть отдельно случаи $k = 0$, $k = 1$ и $k \geqslant 2$.

(d) Найти асимптотику в 0 другого элемента ФСР уравнения $(1)_1$.

Ответ. $f(\xi) \sim \begin{cases} \xi^{-k}, & k \geqslant 1, \\ \ln\xi, & k = 0 \end{cases}$ — функция Бесселя[31] порядка k (2-го рода) $K_k(\xi)$. Итак, уравнение $(1)_1$ имеет только 1 (с точностью до растяжения) решение без особенностей в 0 (а именно такие нам нужны

[30] В пакете Mathematica обозначается BesselJ(k, ξ).

[31] В пакете Mathematica обозначается BesselK(k, ξ).

по смыслу задачи), так что получаем окончательный

Ответ. СФ оператора Δ в круге $B(0,R)$ имеют вид

$$J_k\left(\frac{\mu_{km}r}{R}\right)\cos k\varphi,\quad J_k\left(\frac{\mu_{km}r}{R}\right)\sin k\varphi\quad (k\in\mathbb{N}),$$

$$J_0\left(\frac{\mu_{0m}r}{R}\right),$$

где μ_{km} — нули J_k, при этом соответствующие $\lambda_{km}=(\mu_{km}/R)^2$.

6. [*на дом*] Доказать ортогональность J_k в смысле:

$$\int\limits_0^1 \xi J_k(\mu_{km}\xi)J_k(\mu_{ks}\xi)d\xi=0,\qquad m\neq s.$$

Способ I. Использовать пп. 4(d), 5.

Способ II. Преобразовать выражение $\dfrac{d}{d\xi}\left[\xi\Big(\beta J'(\beta\xi)J(\alpha\xi)-\alpha J'(\alpha\xi)J(\beta\xi)\Big)\right]$, где $J=J_k$, $\alpha=\mu_{km}$, $\beta=\mu_{ks}$, и взять $\int\limits_0^1 d\xi$.

7. [*на дом*] Найти СФ для Δ (с I краевым условием) в прямоугольнике — т. е. М.—М. 4.42.

занятие 2

. . . .

занятие 3

[Перед началом 3-го занятия надо решить, будет 2.5 или 3 занятия. В первом случае надо очень быстро разобрать д. з., и п. 12 весь на дом задать. Во втором случае надо поразбирать д. з., п. 12 подробно пройти в аудитории, причем на местах, и даже возможно п. 10 тоже в аудитории пройти.]

8. Задача на неравенство Гарнака: М.—М. 3.6.

   (a) Взять последовательность точек простейшую: $(1,1)$, $(3/2,1)$, $(2,1)$, $\ldots$, $(9,1)$.
   (b) [*на дом*] Попытаться оптимизировать оценку, выбрав более плотную последовательность точек.
   (c) [*на дом*] Показать, что полученная оценка не очень грубая, построив пример вида $a(x)b(y)$.

9. М.—М. 3.7.
   Указания. Построить вспомогательную задачу Дирихле, решение которой оценивает u снизу. Для анализа свойств решения этой задачи построить еще 3 вспомогательные функции (поворотом на $\pi/2$, π и $3\pi/2$), изучить сумму этих 4 функций. Использовать теорему о разрывной мажоранте.

10. [*на дом*] (или, возможно, в аудитории, если планируется 3 занятия по теме — необходимость решения в аудитории становится ясной, если в текущий момент только началась II половина занятия) — М.—М. 3.9.
    Указание. Использовать теорему об устранимой особенности, замену неизвестной функции (для зануления части краевых условий), и усиленный принцип максимума.

11. Г.—З. 233. Нужно воспроизвести доказательство для Δ из лекций.

12. [*на дом*] (возможно, начать в аудитории, или вовсе сделать полностью, если надо дотянуть до 3 занятий) — М.—М. 3.10.

    (a) Построить вспомогательную функцию v, как это делалось и для Δ (и в п. 11), изучить действие на нее дифференциального оператора L уравнения.

(b) С помощью КВ *в точке* максимума v получить обратное неравенство для того же выражения (при этом нужно работать только с главной частью L_0, т. к. первые производные пропадают в точке максимума).

(c) Сравнить неравенства из пп. (a),(b) и сформулировать условия на коэффициенты младшей части, при которых получается противоречие.

Вывод. Принцип максимума верен, если $\|A\|_C$, $\|B\|_C$ и/или $\mathrm{diam}\Omega$ достаточно малы (при этом для ненулевых A и B требуется что-то вроде равномерной эллиптичности уравнения).

План занятий по теме № 17,18:

Функция Грина для уравнения Пуассона.

1.5 занятия

[Это М.—М. § 11. Он «почти весь» задействован: пп. 11.1–11.5 (т. к. из оставшегося бо́льшая часть вошла в другие темы), и немного из Г.—З. § 6]

1. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = f \quad \text{в } \Omega; \qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi, \tag{1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область; если Ω неограничена (в т. ч. $\Omega = \mathbb{R}^n$), то надо добавлять условие на ∞. Последний вопрос очень запутан: различаются случаи ограниченной $\partial\Omega$ (т. е. Ω есть внешность ограниченной области) — тогда условие на ∞ имеет вид

$$u \to 0 \quad \text{на } \infty, \quad n \geqslant 3; \qquad u(\infty) < \infty, \quad n = 2$$

(что на самом деле означает более сильную асимптотику на ∞ — об этом было в лекциях), и случай неограниченной $\partial\Omega$ (и все $\mathbb{R}^n$) — тогда условия ставятся по-разному в разных источниках[32]. Рассмотрим сначала случай ограниченной Ω. Тогда (как было доказано в лекциях) решение задачи (1) при дополнительных предположениях о гладкости решения представляется в виде

$$u(x) = -\int\limits_{\Omega} g(x,y)f(y)dy - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial g(x,y)}{\partial \nu_y}\varphi(y)dS_y, \qquad (2)$$

где g — так наз. *функция Грина* задачи (1), т. е. $g(x,y) = h(x,y) - \mathcal{E}_n(x-y)$, где

$$\mathcal{E}_n(z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|z|}, & n = 2, \\ -\dfrac{1}{\sigma_n(n-2)}|z|^{2-n}, & n \geqslant 3 \end{cases}$$

— ФР оператора Лапласа, а h определяется из условий:

(a) соответствующая область определения ($\overline{\Omega} \times \Omega$ или $\Omega \times \overline{\Omega}$), гладкость;

(b) гармоничность по x или y;

(c) $g = 0$ при $x \in \partial\Omega$ или $y \in \partial\Omega$.

При этом оказывается, что $g(x,y) = g(y,x)$, так что в этих 3 пунктах можно выбирать любой из 2 вариантов.

В случае, если Ω неограничена, формула (2) сохраняет силу (при подходящем уточнении поведения u и g на ∞ — на этом мы не будем останавливаться из-за запутанности этого вопроса в зависимости от n и конечности $\partial\Omega$). Научимся строить функцию Грина задачи Дирихле (1) для разных областей Ω. Для этого можно указать 2 основных метода:

[32]см. [7] стр. 185; [6] стр. 223,384; [1] стр. 428.

I. метод отражения (любое n, но специальные Ω);

II. метод конформных отображений (потенциально любые Ω, но $n=2$).

2. Рассмотрим метод I. Он базируется на знании функции Грина для $\Omega=\mathbb{R}^n$ — это $g(x,y)=-\mathcal{E}_n(x-y)$ (т. е. тогда $h=0$). В лекциях было показано, как функция Грина для шара $\Omega=B(0,R)$ получается из функции Грина всего пространства отражением:

$$g(x,y)=-\mathcal{E}_n(x-y)+\alpha(x)\mathcal{E}_n(\varphi_R(x)-y)+\beta(x),$$

где $\varphi_R(x)=R^2|x|^{-2}x$, а α и β подходящим образом подобраны. Будем обозначать $x^*=\varphi_R(x)$ ($*$ — симметрия относительно сферы $S(0,R)$). В случае $f=0$ формула (2) тогда превращается в формулу Пуассона.

3. [*на дом*] Вспомнить это и выписать (2) для шара с $f\neq 0$.

4. (обобщение М.—М. 11.1 и Г.—З. 251 на случай любых n). Аналогично найдем функцию Грина для полупространства $\Omega=\{\,x_n>0\,\}$ — здесь даже проще (очевидная симметрия и равная величина зарядов). Выписать формулу (2) в данном случае.

4.5. [*на дом*] В случае $f=0$ представить решение в виде $u(x',x_n)=(\varphi*\omega_{x_n})(x')$, где $x=(x',x_n)$, $\dim x'=n-1$, а ω_h — некоторое ядро усреднения в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ (хотя и не финитное и достаточно плохо убывающее — хуже ядра Пуассона в аналогичной формуле Пуассона для теплопроводности).
Вывод. Особенности φ разглаживаются.

5. [*на дом*] Г.—З. 252 (без сравнения с 237).

6. (обобщение М.—М. 11.2). Сделав еще 1 отражение, построить функцию Грина для четверти пространства: $\Omega=\{\,x_n>0,\ x_{n-1}>0\,\}$.

7. [*на дом*] (обобщение Г.—З. 255а). Построить функцию Грина для полушара $\Omega = B(0,R) \cap \{x_n > 0\}$ (базируясь на шаре или полупространстве, сделать еще 1 отражение).

8. (*) [*на дом*]

   (a) Г.—З. 253а (при любом $n \geqslant 3$ — при $n = 2$ не получится из-за расходимости ряда), т. е. $\Omega = \{\, 0 < x_n < h \,\}$.

   (b) Г.—З. 255б — но для $n \geqslant 3$ ($n = 2$ аналогично — не будем).

   Указания.

   - к пп. (a),(b): базируясь на полупространстве или шаре соответственно, сделать счетное число отражений.
   - к п. (b): использовать обозначения φ_a, φ_b для преобразования Кельвина (см. лекции).

   (c) (для удобства только $n = 2, 3$, хотя можно и любое n) — найти функцию Грина для угла раствором π/n, т. е. М.—М. 11.3 и Г.—З. 253б.

   Указание. Сразу строить «систему зарядов» (а не последовательно, как делалось до сих пор).

9. Перейдем к методу II. Если $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — произвольная область, то определение функции Грина можно переписать так:

(a),(b): $g(x,y) = \operatorname{Re} G(z_1, z_2)$, где $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = y_1 + iy_2$, а $G(z_1, \cdot)$ аналитична в $\Omega \subset \mathbb{C}$ с особенностью, соответствующей $(-\mathcal{E}_n)$:

$$G(z_1, z_2) \underset{z_2 \to z_1}{\sim} -\frac{1}{2\pi} \ln |z_1 - z_2|,$$

т. е. $G = -\dfrac{1}{2\pi} \ln H$, где $H(z_1, \cdot)$ аналитична в Ω (для всех $z_1 \in \Omega$), и $H(z_1, z_1) = 0$.

(c): $0 = g(x,y)|_{y\in\partial\Omega} = \left(-\frac{1}{2\pi}\ln|H(z_1,z_2)|\right)\Big|_{z_2\in\partial\Omega}$, т. е. $H(z_1,\cdot)$ переводит $\partial\Omega$ в $S(0,1)$, а значит Ω — в $B(0,1)$ (т. к. это конформное отображение).

Итак, $g = -\frac{1}{2\pi}\ln|H(z_1,z_2)|$, где $H(z_1,\cdot)$ — конформное отображение Ω на единичный круг, переводящее $z_2 = z_1$ в 0.

10. М.—М. 11.4a (еще раз повторим методом II). Использовать формулу для отображений круга на себя в тексте перед задачей.

11. [*на дом*] М.—М. 11.4b (еще раз повторим методом II). **Указание.** Использовать отображение верхней полуплоскости на круг:

$$f(z) = \frac{z-a}{z-\overline{a}}, \qquad \mathrm{Im}a > 0.$$

$\boxed{\text{занятие 1}}$
$\boxed{\text{занятие 2}}$

12. М.—М. 11.4c — т. е. п. 8(a) в случае $n = 2$ (который не получался методом I) — начать, а [*на дом*] досчитать.

13. [*на дом*] М.—М. 11.4d — угол раствора π/γ, $\gamma > 1$. **Указание.** Использовать тригонометрическую запись $z_1 = |x|e^{i\varphi}$, $z_2 = |y|e^{i\psi}$.

14. (если плохо идет, то [*на дом*]) М.—М. 11.5 (имеется в виду $g_1 > g_2$ в Ω_2^2).

15. [*на дом*] Найти методом II функцию Грина для полукруга $\{\, |x| < R,\ x_2 > 0 \,\}$. Сравнить с п. 7.

Замечание. Еще в этой теме можно было бы изучить:

1. Функцию Грина задачи Неймана (хотя здесь не получатся метод отражения и комплексный метод так же просто) — хотя бы элементы.

2. Схема функции Грина для других уравнений — особенно задача Коши—Дирихле для неоднородного уравнения теплопроводности[33].

План занятий по теме №19:

Теория потенциала.

2–2.5 занятия

[Это М.—М. § 12 в точности]

1. Пусть

$$\Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{— ограниченная область, } \rho \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}). \quad (1)$$

Считаем ρ продолженной нулем вовне Ω. Рассмотрим ньютоновский потенциал

$$V(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\mathbf{y}. \quad (2)$$

Он дает потенциал поля с плотностью массы (заряда) ρ, при этом само поле

$$\mathbf{F} = \nabla V. \quad (3)$$

Обозначим $M = \int\limits_{\Omega} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ — полная масса (заряд). Известно, что в условиях (1) потенциал (2) обладает свойствами: $V \in C(\mathbb{R}^3) \cap C^2(\Omega) \cap C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$, а также

$$\Delta V = -4\pi\rho \quad \text{в } \Omega; \qquad \Delta V = 0 \quad \text{вне } \Omega \quad (4)$$

(т. е. $\mathrm{div}\mathbf{F} = -4\pi\rho$).

[33] см. [6] стр. 217–221.

2. [12.1][34] Доказать, что $V(\mathbf{x}) \to 0$ при $\mathbf{x} \to \infty$, найти главный член асимптотики и оценить следующий член (в терминах M).
   Указание. Обозначим $\theta =$ угол$(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Тогда $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \cos\theta$, и можно разложить $\dfrac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ по степеням $\dfrac{|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|}$. Считать для удобства, что $0 \in \Omega$.
   Ответ. $V(\mathbf{x}) = \dfrac{M}{|\mathbf{x}|} + V_2 + \ldots$, где $|V_2| \leqslant \dfrac{M \mathrm{diam}\Omega}{|\mathbf{x}|^2}$.

3. [12.2] Найти V в терминах M в случае, когда $\rho \equiv \rho_0 = \mathrm{const}$, а $\Omega = B(0, R)$, непосредственно подсчитав интеграл (2), найти поле (3). Убедиться, что $V \in C$.
   Указание. При интегрировании по шару достаточно рассматривать только $|\mathbf{x}| = r$, $|\mathbf{y}| = \xi$, и ввести сферические координаты:

$$\mathbf{y}' = (\xi \sin\theta \cos\varphi, \xi \sin\theta \sin\varphi, \xi \cos\theta),$$

$$\theta \in (0, \pi), \quad \varphi \in (0, 2\pi),$$

   где $|\mathbf{y}'| = |\mathbf{y}|$, т. е. СК $\{\mathbf{y}'\}$ повернута так, что $\theta =$ угол$(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$. При этом $d\mathbf{y}' = (\xi^2 \sin\theta) d\theta d\varphi d\xi$, $|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|^2 = r^2 + \xi^2 - 2r\xi\cos\theta$, а в $\displaystyle\int d\theta$ удобно сделать замену $\theta \to \lambda = \sqrt{r^2 + \xi^2 - 2r\xi\cos\theta}$.

   [12.3] Убедиться, что в центре шара поле нулевое, а максимум достигается на сфере. Начертить график $|\mathbf{F}|$ как функции от r.
   Заметить, что вне шара поле ведет себя как поле точечной массы M, находящейся в центре шара, а внутри его

[34]здесь и далее в этой теме таким образом помечен номер в М.—М.

— как поле шара радиусом r той же плотности, т. к.[35]

$$\frac{Mr}{R^3} = \frac{4}{3}\pi r \rho_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 \frac{1}{r^2} = \frac{M(r)}{r^2},$$

а внешние слои как бы пропадают (ср. п. 5, где это сделано в более общей ситуации $\rho = \rho(r)$).

4. [12.4] Найти V в случае, когда $\rho = \rho(|\mathbf{x}|) = \rho(r)$, $\Omega = B(0, R)$, опираясь на свойство (4) и асимптотику на ∞.

   Указание. Тогда $V = V(r)$, и $\Delta V = V'' + \dfrac{2}{r}V'$. Двойной интеграл превратится в одинарный, если сменить порядок интегрирования.

   Найти поле. Заметить, что поле непрерывно. Убедиться, что в случае $\rho \equiv \rho_0 = \mathrm{const}$ получаются те же потенциал и поле, что и в п. 3.

5. [12.5] Пусть шар полый: $\rho(r) \neq 0$ только при $r \in (z, R)$, где $z > 0$. Найти потенциал и поле внутри полости (ясно, что вне шара и внутри слоя будет как и раньше).

6. [12.6] Пусть теперь $z \to R$, причем общая масса $M = 4\pi \int\limits_z^R \xi^2 \rho(\xi) d\xi$ остается постоянной. Найти предельные потенциал и поле внутри и вне получившейся массивной сферы в терминах M.

   Ответ. Внутри потенциал равен $\dfrac{M}{R}$, поле нулевое; а вне как у точечного заряда (как и следовало ожидать), т. е. потенциал равен $\dfrac{M}{r}$, а поле равно $\left(-\dfrac{M}{r^2} \cdot \dfrac{\mathbf{r}}{r}\right)$.

[35] Далее будем обозначать $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0$ — масса подшара радиуса r той же плотности, т. е. в частности $M(R) = M$.

7. [12.7] Рассмотрим теперь потенциал простого слоя на поверхности $S = \partial\Omega$:

$$V^{(0)}(\mathbf{x}) = \int\limits_S \frac{\mu(\mathbf{y})dS_y}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}.$$

Он дает поле заряда (массы) с плотностью μ, сосредоточенной на S. Обозначим $M = \int\limits_S \mu(\mathbf{y})dS_y$ — полная масса (заряд). По-прежнему верно (3). Это предел соответствующих ньютоновских потенциалов и полей (см. п. 6). Известно, что если $\mu \in C(S)$, то: $V^{(0)} \to 0$ на ∞ (см. п. 2); $V^{(0)} \in C(\mathbb{R}^3) \cap C^2(\Omega) \cap C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ (см. п. 1); $\Delta V^{(0)} = 0$ вне S (см. (4));

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_+ - \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_- = -4\pi\mu,$$

где «$+$» значит «снаружи», а «$-$» значит «изнутри».

8. [12.7] Найти $V^{(0)}$ для $\Omega = B(0,R)$, $\mu \equiv \mu_0 = \mathrm{const}$, используя свойства $V^{(0)}$, указанные в п. 7. Найти поле $\mathbf{F}$. Убедиться, что результат совпадает с ответом к п. 6 (не считая самой сферы, но на ней по непрерывности).
Вывод. Асимптотика на ∞ как у ньютоновского потенциала, что и следовало ожидать.
Указание. Использовать тот факт, что $V^{(0)} = V^{(0)}(r)$, где $r = |\mathbf{x}|$ (см. п. 4).

9. [12.8] Пусть теперь $S = \{\, x_3 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant R^2 \,\}$ — диск, т. е. предельный случай схлопнувшейся области Ω. Сделав цилиндрическую замену

$$\mathbf{x} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, x_3), \quad \mathbf{y} = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 0),$$

переписать вид $V^{(0)}$. Для случая $\mu \equiv \mu_0 = \mathrm{const}$ найти явно $V^{(0)}$ в терминах M на оси $x_1 = x_2 = 0$ (т. е. $r = 0$).

Убедиться, что на этой оси $V^{(0)} \to 0$ как $\dfrac{1}{x_3}$ при $x_3 \to \infty$, причем главный член как у массивной точки.

10. [12.9] Рассмотрим потенциал двойного слоя на поверхности S:
$$V^{(1)}(\mathbf{x}) = \int\limits_S \nu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} dS_y \equiv \int\limits_S \nu(\mathbf{y}) \frac{\cos\varphi_{xy}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} dS_y, \tag{5}$$
где $\varphi_{xy} =$ угол$(\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{n}_y)$. Это поле диполей с плотностью ν на поверхности S (это ужé не получить так быстро из (2), но можно — см. п. 12). Снова верно (3). Известно, что если $\nu \in C(S)$, то:
$$\Delta V^{(1)} = 0 \quad \text{вне } S; \quad |V^{(1)}(\mathbf{x})| \leqslant \frac{C}{|\mathbf{x}|^2} \quad \text{при } |\mathbf{x}| \to \infty;$$
$$V_+^{(1)} - V_-^{(1)} = 4\pi\nu; \qquad V^{(1)} \in C^2(\Omega) \cap C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}). \tag{6}$$

11. [12.9] Найти $V^{(1)}$ в случае $S = S(0,R)$, $\nu \equiv \nu_0 = \text{const}$, опираясь на его свойства (6), всюду, кроме самой сферы. Найти поле (тоже всюду, кроме самой сферы).

12. [12.10] Рассмотрим две концентрические сферы: $S_1(\varepsilon)$ радиуса $(R+\varepsilon)$ с плотностью зарядов $\mu_1(\varepsilon) = \nu_0\left(\dfrac{R}{R+\varepsilon}\right)^2 \dfrac{1}{2\varepsilon}$ и $S_2(\varepsilon)$ радиуса $(R-\varepsilon)$ с плотностью зарядов $\mu_2(\varepsilon) = -\nu_0\left(\dfrac{R}{R-\varepsilon}\right)^2 \dfrac{1}{2\varepsilon}$. Тогда полный заряд каждой сферы:
$$M_1(\varepsilon) = 4\pi(R+\varepsilon)^2 \mu_1(\varepsilon) = 4\pi\nu_0 R^2 \frac{1}{2\varepsilon},$$
$$M_2(\varepsilon) = -4\pi\nu_0 R^2 \frac{1}{2\varepsilon},$$

так что суммарный заряд $M_1 + M_2 = 0$, а модуль момента (скалярный момент)

$$(M_1(\varepsilon) - M_2(\varepsilon)) \cdot ((R+\varepsilon) - (R-\varepsilon)) = 8\pi\nu_0 R^2 = \mathrm{const}.$$

При этом для плотности моментов очевидно имеем $(\mu_1(\varepsilon) - \mu_2(\varepsilon))\varepsilon \to \nu_0$. Поэтому естественно ожидать, что суммарное поле этих сфер даст в пределе поле диполей (5). Доказать это (зная потенциал $V^{(0)}$ с постоянной плотностью μ_0 на сфере из п. 8), получив потенциал $V^{(1)}$ из п. 11. Кроме того, найти предельное поле на сфере (т. е. значения $V^{(1)}$ на сфере, которые в п. 11 не нашли, а можно только непосредственно из (5) найти).

13. [12.11] Пусть $\Omega = \Omega_1 \times (-R, R)$, где $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ — область, а $\rho = \rho(\overline{\mathbf{y}})$, где $\mathbf{y} = (\overline{\mathbf{y}}, y_3)$. Рассмотрим поле в точке $\mathbf{x}$ на плоскости $x_3 = 0$, т. е. $\mathbf{x} = (\overline{\mathbf{x}}, 0)$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_R = \int\limits_{\Omega} \rho(\mathbf{y}) \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} d\mathbf{y} =$$

$$= \int\limits_{\Omega_1} \rho(\overline{\mathbf{y}}) d\overline{\mathbf{y}} \int\limits_{-R}^{R} dy_3 \frac{(\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}, -y_3)}{(|\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}|^2 + y_3^2)^{3/2}}.$$

Ясно, что $(\mathbf{F}_R)_3 = 0$ в силу нечетности, т. е. $\mathbf{F}_R|_{x_3=0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, а именно $\mathbf{F}_R = (\overline{\mathbf{F}}_R, 0)$, где

$$\overline{\mathbf{F}}_R(\overline{\mathbf{x}}) = \int\limits_{\Omega_1} \rho(\overline{\mathbf{y}})(\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}) d\overline{\mathbf{y}} \int\limits_{-R}^{R} \frac{dy_3}{(|\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}|^2 + y_3^2)^{3/2}}.$$

Устремим теперь $R \to +\infty$. Получится поле бесконечного цилиндра с основанием Ω_1: $\overline{\mathbf{F}}_R \to \mathbf{F}_2$, где $\mathbf{F}_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — поле «на плоскости», т. е. в сечениях плоскостями $x_3 = \mathrm{const}$.

14. [12.11] Доказать, что

$$\mathbf{F}_2(\overline{\mathbf{x}}) = 2\int\limits_{\Omega} \frac{\rho(\overline{\mathbf{y}})(\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}})}{|\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}|^2} d\overline{\mathbf{y}},$$

причем потенциалом этого поля является функция

$$V_2(\overline{\mathbf{x}}) = 2\int\limits_{\Omega} \rho(\overline{\mathbf{y}}) \ln \frac{1}{|\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}|} d\overline{\mathbf{y}}.$$

Указание. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{3/2}} = 1.$

15. [12.12] Таким образом, убрав «2», можно ввести плоский ньютоновский потенциал (как потенциал поля в случае, когда ничто не зависит от x_3, т. е. область цилиндрическая и $\rho = \rho(x_1, x_2)$):

$$V(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} \rho(\mathbf{y}) \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Он имеет те же свойства (перечисленные в п. 1), что и трехмерный, только

$$\Delta V = -2\pi\rho. \tag{7}$$

16. [12.12] Найти асимптотику V на ∞: выразить главный член и оценить второй. Найти поле, создаваемое 1-м и 2-м членами асимптотики.

Указание. Аналогично $n = 3$, разложить $\ln \dfrac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$ по степеням $\dfrac{|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|}$.

17. [12.13] Найти V с случае $\rho = \rho(|\mathbf{x}|) = \rho(r)$, $\Omega = B(0, R)$, используя свойства V (уравнение (7) и др.), асимптотику на ∞ (см. предыдущую задачу), а также то, что в нашем случае $V = V(r)$. В частности, рассмотреть случай $\rho \equiv \rho_0 = \text{const}$. Найти поле.

18. [12.14] Аналогично можно придти к потенциалу простого слоя при $n = 2$:

$$V^{(0)}(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\mathbf{y}) \ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} dS_y, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2. \tag{8}$$

Он имеет те же свойства, что и при $n = 3$ (см. п. 7), но со следующими отличиями: другое значение (см. ниже какое) будет у величины

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_+ - \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_-;$$

на ∞ асимптотика $V^{(0)}(\mathbf{x}) = M \ln \dfrac{1}{|\mathbf{x}|} + \ldots$, где

$M = \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\mathbf{y}) dS_y$ — это потому, что такая же асимптотика у ньютоновского двумерного потенциала, а он стремится к $V^{(0)}$ при $n = 2$ так же как и при $n = 3$ (см. пп. 6,8).

19. [12.14] Найти $V^{(0)}$ для $\Omega = B(0, R)$, $\mu = \text{const}$, опираясь на его свойства. Найти поле. Найти

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_+ - \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_-.$$

20. [12.15] Найти потенциал простого слоя отрезка (схлопнувшийся овал) $\{y_2 = 0, y_1 \in [-a, a]\}$ в случае $\mu \equiv \mu_0 = \text{const}$, непосредственно подсчитав интеграл (8).
Указание. Взять интеграл по частям.

Убедиться, что если взять $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ с фиксированным $\varphi \in (0, \pi)$, то асимптотика
$V^{(0)}(r) = -2a\mu_0 \ln r + \dots$

21. [12.16] Аналогично вводится двумерный потенциал двойного слоя:

$$V^{(1)}(\mathbf{x}) = \int\limits_S \nu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} dS_y = \int\limits_S \nu(\mathbf{y}) \frac{\cos\varphi_{xy}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} dS_y.$$

Свойства те же, что и при $n = 3$, только со следующими отличиями:

$$V_+^{(1)} - V_-^{(1)} = 2\pi\nu; \qquad V^{(1)} \quad \text{ограничен на } \infty.$$

22. [12.16] Пусть $\Omega = B(0, R)$, $\nu \equiv \nu_0 = \text{const}$. Найти по определению $V^{(1)}(0)$. Опираясь на свойства $V^{(1)}$, найти $V^{(1)} = V^{(1)}(r)$ при всех r.

Обзорный годовой план практических занятий

При изложении планов занятий предполагалась следующая сквозная нумерация тем (в скобках указаны разделы в М.—М., соответствующие каждой теме, если таковые имеются):

1. УЧП I порядка — линейные и квазилинейные (Приложение);
2. УЧП I порядка — системы со СДО, нелинейные уравнения, уравнение ГЯ (—);
3. ХМ: абстрактное понятие, нахождение по определению (§ 1);
4. классификация, ХК и КВ линейных УЧП II порядка на плоскости (§ 1);
5. КВ линейных УЧП II порядка в многомерном пространстве с постоянными коэффициентами (—);
6. КВ и ХК гиперболических систем I порядка на плоскости, инварианты Римана, краевые задачи (—);
7. УКС (§ 8);
8. метод Римана (—);
9. метод Фурье: наивный подход ($n = 1$) (§ 4);
10. метод Фурье через СФ, соответствующие спец. функции; уравнение Лапласа при $n = 3$, полиномы (§ 6,7);
11. корректность по Адамару (§ 2);
12. ОП: все, кроме приложений (§ 13);
13. ОП: приложения к ДУ (§ 14);

14. уравнение теплопроводности ($n = 1$), автомодельные решения (§ 5);

15. многомерное волновое уравнение (§ 9);

16. эллиптические уравнения (разное) (§ 3);

17. функция Грина (любое n), вещественный метод (§ 11);

18. функция Грина ($n = 2$): комплексный метод (§ 11);

19. теория потенциала (§ 12);

20. метод Фурье в смешанных задачах для гиперболических систем (§ 10);

21. нелинейные уравнения (§ 15).

Общие замечания:

- При начале очередного учебного года желательно заранее выбрать темы из списка для изучения и порядок их прохождения, из расчета: 16 занятий (за вычетом 2 контрольных — 14) в I семестре, и 14 (за вычетом 1 контрольной — 13) во II семестре. Ниже приведены дополнительные соображения о том, как это лучше делать.

- При разработке темы 10 учесть, что нахождение СФ оператора Лапласа в прямоугольнике и круге помещено в тему 16, т. е. в теме 10 надо сразу применять готовые СФ.

Приведенный сквозной список, конечно, не претендует на полноту описания теории УЧП, но есть надежда, что по большей части он покрывает тот минимум знаний, который соответствует подготовке студента-математика 3-го курса. Как видно, в приведенных планах тем (составляющих основной материал пособия) представлены не все темы из списка (часть номеров пропущена, а по части номеров планы покрывают не все задуманное в заголовке темы). Это объясняется несколькими причинами. Часть тем итак неплохо представлена в классических задачниках и не нуждается в какой-либо методической разработке — например, по теме 5 достаточно воспользоваться задачником [25]. По остальным темам имеются разработки в М.—М., хотя, возможно, и недостаточно проработанные методически.

В заключение раздела приведем рекомендации по распределению практических занятий в течение учебного года, действовавшие в то время, когда лекции читались по приведенной (в следующем разделе) программе (текст лекций опубликован в [20–22]).

Элементы (всего 22 занятия), обязательно включаемые в годовую программу (всего 30 занятий):

1. 3 контрольные работы.
2. УЧП первого порядка (2 занятия):
   (a) линейные однородные, метод ПИ;
   (b) линейные неоднородные и квазилинейные, метод ПИ и метод характеристик;
   (c) квазилинейные системы с общей главной частью;
   (d) нелинейные уравнения; уравнение ГЯ.
3. ХМ и смежные вопросы (5 занятий):
   (a) общее понятие ХМ в связи с задачей Коши и теоремой Коши—Ковалевской; его особенности для квазилинейных систем и линейных уравнений, примеры нахождения в обоих случаях;
   (b) соотношения на ХМ, примеры их вывода для линейных систем первого порядка и уравнений второго порядка на плоскости, применение к решению задачи Коши для систем первого порядка;

   (c) КВ линейных уравнений второго порядка и их классификация:
      i. на плоскости, с переменными коэффициентами;
      ii. в многомерном пространстве, с постоянными коэффициентами.
   (d) гиперболические системы первого порядка на плоскости: инварианты Римана, решение смешанных краевых задач.

4. Уравнение колебаний струны (2 занятия):
   (a) общее решение, задача Коши, формула Даламбера;
   (b) принцип Дюамеля;
   (c) области влияния и единственности;
   (d) начально-краевые задачи в четверти плоскости и в «стакане», их однозначная разрешимость.

5. Метод разделения переменных для простейших линейных уравнений с постоянными коэффициентами (на плоскости или полное разделение переменных) (4 занятия):
   (a) уравнение Лапласа в круге, внешности круга, секторе, кольце — задачи Дирихле, Неймана, смешанные задачи;
   (b) уравнение теплопроводности и волновое уравнение в «стакане» с однородными краевыми условиями;
   (c) неоднородные краевые задачи; представление решения в виде ряда по СФ соответствующей однородной задачи.

6. Понятие корректности по Адамару (1 занятие):
   (a) примеры корректных задач (задача Коши для ОДУ, задача Коши для УКС, и др.);

   (b) примеры некорректных задач для простейших УЧП, построение примеров Адамара.

7. Обобщенные производные, регуляризация, пространства Соболева и обобщенные решения (5 занятий):

   (a) случай одной независимой переменной — возможность дифференцирования особенностей;
   (b) простейшие многомерные примеры, обобщенное дифференцирование вырезанием особенностей;
   (c) принадлежность функций пространствам Соболева: одномерный и многомерный случаи;
   (d) отработка некоторых понятий на одномерном случае:

      i. вывод простейших теорем вложения, следы;
      ii. продолжение функций из W_p^1 вовне отрезка с сохранением класса (оператор продолжения, его норма);
      iii. приближение функций усреднениями, разные ядра усреднения;
      iv. связь с понятием классической производной;

   (e) примеры применения обобщенных производных (задачи с разрывными данными).

Факультативные темы, из которых составляются недостающие 8 занятий:

1. Метод Римана в задаче Коши для гиперболических уравнений на плоскости, задача Гурса (1 занятие).

2. Свойства решений уравнений Лапласа, Гельмгольца, Коши—Римана (3 занятия):

   (a) теорема о среднем и уравнение Дарбу;

   (b) свойства СФ оператора Лапласа, формулы Грина;
   (c) принцип максимума;
   (d) неравенство Гарнака;
   (e) теоремы о разрывной мажоранте, устранимой особенности;
   (f) задача Гильберта.

3. Функции Грина краевых задач для уравнения Пуассона (2 занятия):
   (a) случай многих переменных (метод отражения);
   (b) на плоскости (метод конформных отображений на круг).

4. Теория потенциала (2 занятия):
   (a) поведение и вид потенциалов при наличии симметрий;
   (b) взаимосвязь потенциалов разных типов и размерностей (предельные переходы).

5. Одномерное уравнение теплопроводности (3 занятия):
   (a) автомодельные решения, примеры применения (задача Стефана);
   (b) задача Коши, формула Пуассона;
   (c) принцип Дюамеля;
   (d) принцип максимума, связь с корректностью;
   (e) поведение решений при больших временах.

6. Многомерное волновое уравнение (3 занятия):
   (a) анализ качественных свойств решений на основе формул Кирхгофа и Пуассона: области влияния и единственности, принцип Гюйгенса;

(b) специальные решения: сферические, цилиндрические и плоские волны; метод спуска.

7. Метод разделения переменных как разложение по СФ стационарного оператора (2 занятия):

   (a) краевые и начально-краевые задачи для уравнений теплопроводности, Пуассона и волнового уравнения в параллелепипеде, цилиндре и шаре;

   (b) СФ оператора Лапласа в круге, цилиндре, шаре; сферические функции; однородные гармонические полиномы;

   (c) функции Бесселя и Лежандра, их основные свойства.

8. Метод разделения переменных в смешанных задачах для гиперболических систем (2 занятия).

9. Элементы теории нелинейных УЧП (1 занятие).

Программа теоретического курса

Данный курс изложен в [20–22]. Ниже для удобства приводится его конспект (развернутый план).

Часть I. Элементы общей теории УЧП (7.5 лекций)

1. Введение.
   (a) Предмет УЧП и УМФ, мультииндексы, программа действий.
   (b) Напоминание об «УЧП типа ОДУ», т. е. квазилинейные системы I порядка со СДО и сводящиеся к ним (нелинейные УЧП I порядка). Примеры роли характеристик.
   (c) Обобщение и расширение на гиперболические по Петровскому системы I порядка на плоскости (римановы инварианты), пример одномерных уравнений акустики.
2. Задача Коши и ХМ для УЧП.
   (a) Наводящие соображения: аналитические решения задачи Коши для ОДУ (теорема Коши).
   (b) Постановка задачи Коши для УЧП, пример: аналитическое решение задачи Коши для двумерного уравнения Лапласа.
   (c) Понятие ХМ, теорема Коши—Ковалевской (формулировка), комментарии.
   (d) Частные случаи ХМ:
      i. Квазилинейная система I порядка на плоскости. Соотношения на ХМ. Связь с п. 1(c).
      ii. Квазилинейная система I порядка в 3-мерном пространстве, пример двумерных уравнений акустики.

iii. Квазилинейное уравнение II порядка и выше, понятие символа дифференциального оператора. Поведение ХМ при сведении УЧП друг к другу (исключением или введением неизвестных).

3. Элементы классификации УЧП. Свойства гиперболических уравнений на примере УКС.

   (a) Линейное уравнение II порядка: КВ в точке. Возможность приведения к КВ сразу в окрестности (области).

   (b) То же на плоскости: классификация, КВ в окрестности точки (строго для гиперболических и идея для остальных типов). Три канонических уравнения II порядка на плоскости: Лапласа, теплопроводности и УКС.

   (c) УКС: задача Коши при $t = 0$, формула Даламбера, гладкость, области единственности и влияния, конечная скорость распространения возмущений, понятие начально-краевых задач в стакане, метод Дюамеля, интеграл энергии и единственность решения разных задач.

   (d) Идея классификации более общих УЧП:

      i. Основные идеи — свойства 3 типов УЧП,

      ii. уравнения из п. 3(a),

      iii. квазилинейные системы I порядка,

      iv. понятия эллиптичности, параболичности, гиперболичности;

      v. гиперболичность по Фридрихсу: вещественность ХМ, интеграл энергии.

4. Понятие корректности.

   (a) Понятие краевой задачи, примеры, связь с задачей Коши.

(b) «Наивное» понятие корректности (2 пункта), пример Адамара для уравнения Лапласа.
(c) Корректность по Адамару, пример задачи Коши для УКС.
(d) Примеры типа Адамара: задача Коши и начальная задача при $t < 0$ для уравнения теплопроводности.
(e) Дополнительные соображения: отсутствие аналитических решений (пример Ковалевской) и пример неединственности в начальной задаче для уравнения теплопроводности.

Часть II. Классические решения УМФ (11 лекций)

1. Уравнение Лапласа: общие свойства; постановка краевых задач; задача Дирихле в круге и метод Фурье.
   (a) Понятие решения задачи Дирихле, принцип максимума.
   (b) Задача Дирихле в круге: попытка решения методом Фурье, сходимость ряда по Пуассону, эквивалентность формуле Пуассона, завершение обоснования обоих путей. Многомерный аналог формулы Пуассона (как данность) и его обоснование.
   (c) Свойства гармонических функций (на основе формулы Пуассона):
      i. бесконечная гладкость,
      ii. теоремы о среднем (прямая и обратная) — свойство средних как критерий гармоничности,
      iii. усиленный принцип максимума,
      iv. неравенство Гарнака,
      v. теорема Лиувилля,
      vi. понятие ФР, интеграл Гаусса и теорема об устранимой особенности,

vii. преобразование Кельвина и асимптотика на бесконечности.

(d) Постановка внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана, связь между ними, смысл условий на ∞, смежные определения классов функций (правильная нормальная производная и т. д.) и областей (ляпуновская граница и т. д.).

(e) Формулы Грина и их обобщение на менее гладкие функции, класс границ G («достаточно гладкие»).

(f) Единственность решений задач из п. 1(d).

2. Уравнение Лапласа: решение краевых задач методом потенциалов.

    (a) Интегральная формула Грина, уточненный интеграл Гаусса.

    (b) Идея функции Грина как способа условного представления решений, подробно для внутренней задачи Дирихле, применение к шару и получение как следствие формулы Пуассона.

    (c) Потенциалы как слагаемые в интегральной формуле Грина, переход к случаю $n = 3$.

    (d) Дифференциальные свойства ляпуновских поверхностей (в локальной СК).

    (e) Основные свойства потенциалов простого и двойного слоя на ляпуновских поверхностях:

        i. представление через специальные углы и оценки углов,

        ii. оценка абсолютной ограниченности потенциала двойного слоя,

        iii. асимптотика на бесконечности,

        iv. непрерывность и прямое значение на поверхности,

v. формулы для скачков.

(f) Напоминание некоторых результатов из анализа: свойства фредгольмовых операторов в гильбертовом пространстве, следствия для интегральных операторов с ядром Гильберта—Шмидта и в частности для потенциалов, обобщения на полярные ядра в пространстве C.

(g) Существование решений задач из п. 1(d). Переформулировка внутренней задачи Неймана для ее однозначной безусловной разрешимости.

(h) Замечания об отличиях при других n.

(i) Непрерывная зависимость в задаче Неймана.

3. Уравнение теплопроводности.

   (a) Постановка задачи Коши—Дирихле и первой смешанной задачи, условия согласования, условия на рост.

   (b) Принцип максимума, единственность для смешанной задачи и начальной задачи.

   (c) Формальный вывод формулы Пуассона через преобразование Фурье, понятие ФР.

   (d) Свойства интеграла Пуассона при произвольных ограниченных начальных данных. Существование решения начальной задачи с непрерывными данными как следствие.

   (e) Свойства решений: бесконечная гладкость, бесконечная скорость распространения возмущений.

   (f) Начальная задача с разрывными данными — единственность.

   (g) Разрешимость первой смешанной задачи при $n = 1$:

      i. подготовка условий согласования, разбиение на 3 задачи,

   ii. решение первой из задач с помощью начальной задачи со ступенчатым (неограниченным) данным, замечание о таком классе,
   iii. решение второй задачи интегралом Дюамеля для краевого условия.
(h) Принцип Дюамеля для неоднородного уравнения.

4. Волновое уравнение.

   (a) Постановка задачи Коши, переход к $n = 3$, нестрогое указание искомого вида интеграла для решения, изучение его свойств и обоснование формулы Кирхгофа.
   (b) Метод спуска и формула Пуассона, замечание о других n (переход обратно к общему случаю).
   (c) Принцип Дюамеля для неоднородного уравнения.
   (d) Заготовка интегралов энергии (энергетические неравенство и равенство), единственность решения задачи Коши.
   (e) Наличие переднего (при всех n) и заднего (при $n = 3$) фронтов, сохранение энергии.
   (f) О задаче Коши на других многообразиях и о смешанных задачах.
   (g) Проблема с гладкостью данных Коши, сферические волны, пример каустики, необходимость перехода к обобщенным решениям.
   (h) Окончательный вывод интеграла энергии.
   (i) Сферические волны как средство распространить эффекты при $n = 2, 3$ на любые четные и нечетные n соответственно.

Часть III. Обобщенные решения УМФ (12.5 лекций)

1. Свойства интегрируемых функций и обобщенные производные.

   (a) Вспомогательные сведения из анализа: классы эквивалентных функций, непрерывные и компактные вложения пространств, пространства Лебега L_p.

   (b) Операция усреднения и ее свойства: гладкость, формула дифференцирования, коммутация с классическим дифференцированием, аппроксимация в пространствах гладких функций, невозрастание нормы в L_p, аппроксимация в L_p.

   (c) Лемма ДюБуа—Реймона, эквивалентное представление классических производных интегральными тождествами.

   (d) Определение ОП через интегральное тождество и их элементарные свойства: единственность, связь с классическими производными, глобальность, локализация, суперпозиции (и их необратимость), линейность; примеры.

   (e) Нетривиальные свойства ОП:

      i. слабая и сильная замкнутость оператора дифференцирования,

      ii. коммутация с усреднениями внутри области,

      iii. сходимость производных от усреднений внутри области,

      iv. определение ОП через замыкание и его эквивалентность первому определению,

      v. дифференцирование произведения,

      vi. описание функций с нулевыми ОП определенного порядка,

      vii. поведение ОП при замене СК,

viii. связь с абсолютной непрерывностью.

2. Изотропные пространства Соболева.

   (a) Определение пространств W_p^l и их тривиальные свойства: очевидные эквивалентные нормы, полнота, умножение на гладкие функции, локализация, сходимость усреднений на компактах, тривиальное продолжение финитных функций, поведение при замене СК.

   (b) Пространство $\overset{\circ}{W}{}_p^l$ и его простые свойства: тривиальное продолжение, случай всего пространства, сходимость усреднений.

   (c) Плотность гладких функций в W_p^l для звездных областей.

   (d) Теорема о продолжении: основные моменты доказательства и одномерная иллюстрация. Плотность гладких функций в общем случае.

   (e) Сепарабельность и рефлексивность W_p^l. Описание слабой сходимости.

   (f) Неравенство Фридрихса (Стеклова), эквивалентная норма в $\overset{\circ}{W}{}_p^l$. Замечание об интерполяционных неравенствах и эквивалентной норме в W_p^l (без промежуточных производных).

   (g) Интегральное представление гладких функций через градиент, оценки для гладких функций и теоремы вложения W_p^1 в L_r или C; вложения для W_p^l (при $n > 1$). Случай $n = 1$, вложения в пространства Гельдера.

   (h) Теорема Реллиха; замечание о компактности вложений в общем случае. Общая конструкция эквивалентных норм в W_p^l (через систему полунорм); неравенства Пуанкаре, Фридрихса и их аналоги.

(i) Конструкция следа на многообразиях размерности $(n-1)$. Свойства оператора следа (без доказательства): компактность, непрерывность по отношению к сдвигу многообразия, случай многообразий меньшей размерности, общие теоремы вложения, критерий принадлежности $\overset{\circ}{W}{}^l_p$.

(j) Формулы Гаусса—Остроградского и интегрирования по частям.

3. Эллиптические уравнения в ограниченных областях.

   (a) Мотивация поиска обобщенных решений.

   (b) Классическая постановка задачи: эквивалентные формы, условия эллиптичности и равномерной эллиптичности, сведение к случаю нулевых краевых условий.

   (c) Постановка первой краевой задачи с негладкими данными; сильное и слабое обобщенные решения, связь между ними.

   (d) Энергетическое неравенство, теорема единственности.

   (e) Существование решения.

      i. Абстрактная постановка задачи в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_2$.

      ii. Формально сопряженные дифференциальные операторы и краевая задача, и соответствующая абстрактная задача.

      iii. Теорема существования как следствие теории Фредгольма. Структура множества решений и спектра.

   (f) Замечание о повышении гладкости: внутренней и глобальной.

(g) Мотивация постановки III краевой задачи и определения сопряженных краевых задач III типа.

(h) Теорема существования обобщенного слабого решения III краевой задачи и замечание о структуре спектра.

(i) Случай неоднородных краевых условий.

4. Смешанная задача для уравнения теплопроводности.

   (a) Постановка первой начально-краевой задачи. Замечания о случаях общего эллиптического оператора, неограниченных областях, других краевых условиях; сведение к нулевому данному на боковой поверхности.

   (b) Интегральное тождество для классического решения, необходимость изучения анизотропных пространств Соболева.

   (c) Определение анизотропного пространства Соболева и его простые свойства: полнота, продолжения, плотность гладких функций, следы. Определение обобщенного решения задачи.

   (d) Нетривиальные свойства анизотропного пространства Соболева: интегрирование по частям при ненулевом следе, свойства интеграла с переменным пределом.

   (e) Априорные оценки (гладких) решений задачи, их роль в построении решения в соответствующих классах. Лемма Гронуолла для негладких функций.

   (f) Теорема единственности.

   (g) Теорема существования.

      i. Метод Галеркина, плотность функций специального вида, вспомогательная система ОДУ.

ii. Разрешимость вспомогательной системы ОДУ.

iii. Оценки приближенных решений по аналогии с априорными оценками, переход к пределу.

(h) Дополнительные замечания: повышение гладкости, аналогичная задача для гиперболических уравнений — сходства и различия.

Список литературы

*Обязательная литература,
на которой в основном построен теоретический курс*

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988.
2. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979.
3. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
4. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1983.

*Обязательная литература,
содержащая небольшие фрагменты теоретического курса*

5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2006.
6. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. — СПб: Лань, 2002.
7. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
8. *Фаддеев Д. К., Вулих Б. З., Уральцева Н. Н. и др.* Избранные главы анализа и высшей алгебры. — Л.: ЛГУ, 1981.

Дополнительная литература

9. *Демиденко Г. В.* Введение в теорию соболевских пространств. — Новосибирск: Изд. НГУ, 1995.

10. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высшая школа, 1977.

11. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970.

12. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Физматлит, 1961.

13. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: МГУ Наука, 2004.

Дополнительная литература для углубленного изучения

14. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1966.

15. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.

16. *Мамонтов Е. В.* О корректности задач математической физики. — Новосибирск: Изд. НГУ, 1980.

17. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1977.

18. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Бином, 2005.

19. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. — Новосибирск: Тамара Рожковская (Университетская серия; Т. 7), 2003.

Изданный текст лекций по приведенной программе[36]

20. *Мамонтов А. Е.* Лекции по уравнениям математической физики: учеб. пособие. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2013. — Ч. 1: Элементы общей теории уравнений в частных производных.

21. *Мамонтов А. Е.* Лекции по уравнениям математической физики: учеб. пособие. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2014. — Ч. 2: Классические решения.

22. *Мамонтов А. Е.* Лекции по уравнениям математической физики: учеб. пособие. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2015. — Ч. 3: Обобщенные решения.

Задачники

23. *Белов В. В., Воробьев Е. М.* Сборник задач по дополнительным главам математической физики. — М.: Высшая школа, 1978.

24. *Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1985.

25. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. — М.: Физматлит, 2003.

26. *Владимиров В. С., Вашарин А. А., Каримова Х. Х. и др.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Физматлит, 2001.

27. *Годунов С. К., Золотарева Е. В.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — Новосибирск: Изд. НГУ, 1987.

[36]См. стр. 96–106.

28. *Мамонтов А. Е., Мамонтов Е. В.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — Новосибирск: Изд. НГУ, 2006.

29. *Смирнов М. М.* Задачи по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1975.

30. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.; Ижевск: РХД, 2000.

31. *Шамаев А. С., Вентцель Т. Д., Горицкий А. Ю. и др.* Сборник задач по уравнениям с частными производными. — М.: Бином, 2005.

Предшествующее аналогичное учебное пособие

32. *Мамонтов А. Е.* Практикум по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Новосибирск: Изд. Института математики, 2016.

Текст лекций по УМФ с прикладным уклоном

33. *Мамонтов А. Е.* Методы математической физики: учеб. пособие. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2016.

Список аббревиатур

АНФ	—	абсолютно непрерывная функция
ГЯ	—	(уравнение) Гамильтона—Якоби
ДУ	—	дифференциальное уравнение
КВ	—	канонический вид
ОДУ	—	обыкновенное дифференциальное уравнение
ОП	—	обобщенная производная
ПИ	—	первый интеграл
РСВ	—	регулярные сферические волны
СДО	—	скалярный дифференциальный оператор
СК	—	система координат
СФ	—	собственная функция
СЧ	—	собственное число
УКС	—	уравнение колебаний струны
УМФ	—	уравнения математической физики
УЧП	—	уравнение в частных производных
ФР	—	фундаментальное решение
ФСР	—	фундаментальная система решений
ХК	—	характеристическая кривая
ХМ	—	характеристическое многообразие
ХП	—	характеристическая поверхность
ШЛ	—	(задача) Штурма—Лиувилля

Оглавление

Практикум по уравнениям в частных производных

Мамонтов Александр Евгеньевич

Подписано в печать 28.06.2016. Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 6.6. Уч.-изд. л. 6.6.
Тираж 50 экз. Заказ № 48.

Лицензия ЛР № 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.