А.Е.Мамонтов

Практикум по обыкновенным дифференциальным уравнениям

Новосибирск 2016

А.Е.Мамонтов

Практикум по обыкновенным дифференциальным уравнениям

Новосибирск
2016

УДК 517.91
ББК В161.61
М226

Мамонтов А. Е.

Практикум по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А. Е. Мамонтов. — Новосибирск: Издательство Института математики, 2016. — 108 с.

ISBN 978–5–91907–033–7

Конспект семинарских (практических) занятий по курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения», проводившихся автором на 2 курсе механико-математического факультета Новосибирского государственного университета в течение 2000-х годов.

Для студентов математических специальностей и их преподавателей.

УДК 517.91
ББК В161.61
М226

ISBN 978–5–91907–033–7

Предисловие

Пользуюсь случаем дать краткие пояснения о целях издания предлагаемого учебного пособия.

Мой путь как преподавателя начался осенью 1997 г., когда мне было поручено вести практические занятия по курсу «Уравнения математической физики» (т. е. уравнения в частных производных) на механико-математическом факультете (ММФ) Новосибирского государственного университета (НГУ), для студентов 3-го курса. Лектором на этом потоке был в это время профессор Г.В. Демиденко, у которого еще несколько лет назад соответствующий курс прослушал я сам. На следующий учебный год к названной миссии добавились практические занятия по курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения» на том же факультете того же ВУЗа, с тем же лектором, но для студентов 2-го курса. Спустя почти десятилетие читать лекции по обоим курсам было поручено мне. Результат этой моей работы как лектора был зафиксирован в виде текста лекций по обоим курсам: по курсу ОДУ это [21–23][1] (в конце пособия приведена подробная программа этого курса), а по курсу УМФ я планирую дать ссылки и комментарии в аналогичном пособии по практическим занятиям (по УЧП), которое будет издано в ближайшее время.

Но до чтения лекций надо было еще дожить (и по срокам, и по квалификации), в то время как задача в упомянутом 1997 году была поставлена нелегкая. Дело в том, что курс УМФ (УЧП) сам по себе непростой, и эта сложность усугубляется явным недостатком учебных пособий и тем более методических разработок. По моему субъективному впечатлению, эта картина является следствием своего рода пренебрежительного отношения (не буду уточнять — у кого и где) к изданию учебных пособий (покрывающих весь курс, а не какие-то фрагменты),

[1]Здесь и далее в квадратных скобках приведены ссылки на литературу, список которой находится в конце пособия.

а особенно «методичек». С одной стороны, такая атмосфера плодотворно сказывается на возможностях для преподавателей проявить свою квалификацию и яркую индивидуальность, но с другой стороны негативно влияет на уровень преподавания в случае, если квалификация недостаточна и/или индивидуальность проявляет себя не совсем в нужном ключе (с годами ситуация в этом плане только ухудшается). И наконец, это банально затрудняет процесс вовлечения новых кадров.

Что касается сопровождения теоретического курса, я считаю свою миссию выполненной после издания упомянутых 6 учебных пособий, полностью покрывающих двухгодичный курс дифференциальных уравнений для студентов ММФ НГУ или аналогичных по уровню и специализации. Кроме того, не могу не упомянуть пособия [24–26], соответствующие лекциям по ОДУ для студентов экономического факультета НГУ. Это полугодовой курс, в котором, естественно, опущены многие подробности и детали, интересные только математикам, но с другой стороны присутствуют некоторые моменты, не вошедшие даже в курс для ММФ. Подробнее этот курс описан в предисловиях к [24–26].

Что касается практических занятий, то здесь остается определенный вакуум. Существующие задачники не избавляют преподавателя от большой работы по отбору задач и составления сбалансированного плана занятий, с помощью которого он бы смог уместить в жесткие временны́е рамки достаточно большой материал, составляющий минимум квалификации студента-математика. Особенно это касается курса УЧП (УМФ), по которого к тому же налицо явный недостаток задачников (в том смысле, что имеются целые области теории УЧП, плохо «покрытые» этими задачниками, и/или требующие для своего «покрытия» большой дополнительной работы). Как уже упоминалось, результат своей работы по практическому курсу УЧП я планирую издать в ближайшее время. Но логика требует, чтобы сперва было издано соответствующее пособие по курсу ОДУ, что и делается в предлагаемой книжке.

По курсу ОДУ ситуация много лучше, чем по УЧП, поэтому соответствующая работа носит достаточно рутинно-методический характер и, пожалуй, ее результат не отличается большой оригинальностью (что, впрочем, и не требуется). Как и курс УЧП (УМФ), практический курс ОДУ представляет собой набор тем, но при этом:

- важен четкий порядок тем;
- все темы должны быть пройдены за год (кроме, возможно, фрагментов некоторых из них — тогда это, как правило, явно оговаривается прямо в планах).

Таким образом, необходим достаточно жесткий годовой план, в котором каждой теме выделено свое место. В конце пособия приведен обзорный годовой план занятий с перечислением тем, указанием числа часов на каждую из них, и с некоторыми дополнительными комментариями. По опыту, число занятий в учебном году (если не совсем неудачно расположились праздники) таково:
I семестр: 14 занятий + 2 контрольные;
II семестр: 13 занятий + 1 контрольная;
Итого: 27 занятий + 3 контрольных.

Источники задач:

- Филиппов[2] — основной. Собственно, курс строится по нему (даже порядок тем почти как в нем), и весь он (за исключением нескольких небольших кусков параграфов) должен быть пройден.
- Годунов[3], но не весь, а только:

[2]Здесь и далее это: Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., РХД, 2000 (см. [28] в списке литературы), или любое другое издание.

[3]Здесь и далее это: Сборник задач по обыкновенным дифференциаль-

1. немного по линейным системам и уравнениям (из § 1),
2. по краевым задачам (§ 2 — основательно),
3. немного по устойчивости (из § 3).

Кроме того, имеется немалое количество заново составленных задач (т. е. не заимствованных из имеющихся задачников), часть из которых я узнал при общении с Г.В. Демиденко.

Наиболее употребительные (ключевые) термины используются в виде условных сокращений (аббревиатур), список которых для удобства приведен в конце пособия.

После многих задач (пунктов плана) имеются пометки, рекомендующие их к тому или иному применению, из которых неочевидна лишь пометка (∗) , означающая (впрочем, вполне традиционно) необязательный (дополнительный) характер и/или повышенную трудность.

Поскольку я сначала разработал план практических занятий, а потом уже́ приступил к чтению лекций по теоретическому курсу, то приведенный план значительно нагружен теоретическим материалом, изучаемым «в виде задач». Впоследствии бо́льшая часть этого материала вошла в текст лекций [21–23]. Если лекции читаются по программе, приведенной в конце пособия, то упомянутые «теоретические» пункты можно сократить, т. е. ограничиться ссылкой на лекции. В случае если лекции читаются иначе, то эти пункты послужат хорошим дополнением к работе лектора.

В завершение не могу удержаться еще от одной реплики. Замечено, что курс ОДУ обычно воспринимается и студентами, и преподавателями как «более легкий», чем курс УМФ (УЧП), что (якобы) предъявляет более низкие требования к квалифи-

---

ным уравнениям. Под ред. С.К.Годунова. Новосибирск, НГУ, 1986 (см. [27] в списке литературы). Справедливости ради следует отметить, что этот задачник имеет много авторов, но в обиходе именуется для краткости по имени редактора.

кации преподавателя и тщательности подбора материала и способов его изложения. Это заблуждение того же порядка, как и то, что дифференциальные уравнения — это наука (а точнее, даже технология) «построения решения разных диффуров по имеющимся формулам и алгоритмам». Такой опошленный взгляд на теорию ДУ еще как-то можно было бы простить не очень хорошо успевающим студентам (математикам, с нематематиков изначально спрос в этом отношении невелик), но для преподавателей-математиков он совершенно недопустим. К сожалению, этот феномен наблюдается даже у многих из тех преподавателей, кто берется вести курсы ДУ, не говоря уже об остальных; в то время как описанное заблуждение наносит неокрепшим умам тяжелые травмы, остающиеся порой на всю жизнь, и тем самым передающиеся по (научно-преподавательскому) наследству. Считаю своим долгом с таким поверхностным и вредным взглядом на теорию ДУ бороться путем соответствующей расстановки акцентов как в теоретическом, так и в практическом курсе. В последнем это сложнее, т. к. практические занятия (семинары) больше чем лекции посвящены изучению технологии «решать то что решается». Сложнее, но все равно возможно. Этим объясняется некоторый, возможно, избыток теоретических задач в предлагаемом курсе. В этом, и в остальном, оставляю свой труд на суд читателя (если таковой найдется), и, главное, на суд времени.

Мамонтов А.Е.,
Новосибирск,
июнь 2016 г.

План занятия по теме 0:

Знакомство с ОДУ

(вводное, Филиппов § 1)

1. Вводные слова:
   (a) Что такое ДУ, ОДУ, УЧП;
   (b) Что такое теория ОДУ (решение «в явном виде», понижение порядка, 0-й порядок: функциональное уравнение, квадратуры; качественная теория);
   (c) Общий вид ОДУ; ОДУ, разрешенные относительно старших производных;
   (d) ОДУ I порядка: $y' = f(x, y)$ — исследование свойств решений из вида f.

2. Метод изоклин как естественный (но «наивный») метод (из определения ОДУ) решения задачи 1(d). Имеем плоскость (x, y), в ней через любую (!) точку (где определена f) можно провести кривую — график решения. Получаем семейство линий (решений) (известно, что уравнение I порядка имеет 1-параметрическое семейство решений). Решим пару задач на этот метод.

3. Филиппов 1. Начертить изоклины и графики решений. Сравнить с точным решением (как его находить — будем изучать позже):

$$y(x) = (x+1)^2 + 1 + Ce^x, \quad \forall C = \text{const}.$$

   Замечание. Смысл в том, что если уравнение было бы сложнее и в явном виде его не решить, изоклины все равно работают.

4. Филиппов 11. Начертить изоклины и решения.
   [*на дом можно*] Сравнить с точным решением

$(y^2+x^2)\exp\left(\dfrac{2}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right) = C$ (из которого только уже строго можно заключить, что кривые гомотетически подобны).

5. [*на дом можно*] **Филиппов** 8 (пример, когда решить явно не удается, а изоклины работают).

6. Еще примеры качественной теории ОДУ:

   (a) **Филиппов** 15;

   (b) **Филиппов** 16г), затем в) [сослаться на г) или лучше сразу d/dx как есть — полезно для тренировки качественной теории].

7. [*на дом можно*] **Филиппов** 16а),б).

8. Качественная теория ОДУ развита достаточно хорошо, так что не только нет необходимости «решать явно» (понижать порядок) ОДУ, чтобы исследовать свойства решений, а даже наоборот часто удобно записать ОДУ для заданных функций, чтобы лучше их изучить, даже если они сразу заданы в алгебраическом виде (повышение порядка). Поэтому (в частности, это полезно для пп. 16–19 — пример применения этого), а также чтобы потренироваться иметь дело с ДУ (знакомиться), рассмотрим задачу о составлении ДУ для семейств линий. Пусть есть семейство линий (n-параметрическое)

$$\varphi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0.$$

Как записать его в виде ОДУ, но без C_k? Возьмем $d/dx, \ldots, d^{n-1}/dx^{n-1}$. Получим (считаем $y = y(x)$) n уравнений порядка $0, 1, \ldots, (n-1)$ на n неизвестных $C_1, \ldots, C_n$. Но если выражения $C_k = C_k(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ подставить в исходное уравнение, то получим тождество. Значит, надо взять еще и d^n/dx^n и подставить C_k туда. Получим ОДУ n-го порядка.

Замечание. Итак, при исключении 1 постоянной порядок повышается на 1, т. е. чтобы исключить n постоянных, надо повысить порядок на n. И наоборот, понижение порядка приводит к добавлению соответствующего количества постоянных. Так, общее решение ОДУ порядка n зависит от n постоянных (как мы увидим далее). Порешаем примеры.

9. Филиппов 17,[18 — лучше не надо, а то мало времени] (ОДУ I порядка).

10. Филиппов 28 (ОДУ III порядка, надо умело обращаться с полученной системой на (a, b, c) — проще всего взять линейную комбинацию уравнений с неизвестными коэффициентами).

11. [*на дом можно*] Филиппов 22,27.

12. Геометрические задачи: сначала надо составить параметрическое уравнение кривых, а далее действовать как и ранее: Филиппов 30 (I порядок), 33 (II порядок).

13. [*на дом можно*] Филиппов 31.

14. (∗) Кривые в пространстве — будет система из 2-х ОДУ, а так все аналогично: Филиппов 35.

15. (∗) [*на дом можно*] Филиппов 36.

16. Задачи на изогональные траектории — вершина темы, где все применяется. Пусть имеется семейство линий (1-параметрическое) $\chi(x, y, C) = 0$. Надо найти другое семейство $\psi(x, y, C) = 0$, пересекающее исходное под данным углом φ. Решение:

    I. Запишем ОДУ для исходного семейства (применяется п. 8): $y' = f(x, y)$.

II. Наклон к оси $0x$ обозначим α: тогда $\operatorname{tg}\alpha = f$.

III. Ищем семейство в виде $y' = g(x, y)$ с углом наклона β к оси $0x$. Тогда $\operatorname{tg}\beta = g$; $\beta = \alpha \pm \varphi$, откуда

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f \pm \operatorname{tg}\varphi}{1 \mp f \operatorname{tg}\varphi}, \quad \text{и в итоге } y' = \frac{f \pm \operatorname{tg}\varphi}{1 \mp f \operatorname{tg}\varphi}.$$

IV. Решаем полученное уравнение и находим ψ (это мы пока не умеем, но скоро научимся, а пока остановимся на этапах I–III).

17. Филиппов 37 (м. б. даже решить получившееся ОДУ).

18. [*в аудитории или на дом, в зависимости от наличия времени*] Филиппов 40.

19. $(*)$ Филиппов 46. Сначала надо в общем виде рассмотреть задачу о кривой в полярной СК: $r = r(\theta)$, и найти, как связаны угол наклона к оси $0x$ и ОДУ для $r(\theta)$, а затем применить в нашей ситуации. Здесь получившееся ОДУ даже можно легко решить.
[*на дом*] Сделать это.

20. [*на дом можно*] Филиппов 47.

Замечание. Чтобы успеть все за 1 занятие, надо опустить все $(*)$, п. 9б), и на п. 1 не задерживаться. Но иметь в виду эти задачи полезно.

План занятий по теме 1:

Приемы решения ОДУ в явном виде.I: Уравнения I порядка — УПД: общая конструкция и частные случаи

(Филиппов §§ 2–6)

Раздел I. УРП и сводящиеся к ним (§§ 2–4) — частный случай УПД.

1. Рассказать о решении уравнений с разделяющимися переменными (УРП) — формальный подход, геометрический смысл (кривая с заданным направлением, интегрирование вдоль нее).

2. Отметить важность написания только определенных интегралов, решив задачу Коши (напомнить что такое задача Коши вообще):

$$y' = f, \quad y(0) = 0.$$

3. Решить Филиппов 51–54. Отметить следующее:

   (a) можно писать не интегралы, а сразу $d(\dots) = 0 \Longrightarrow (\dots) = \mathrm{const}$;

   (b) если уравнение сразу в симметричной форме, то $x = \mathrm{const}$ тоже могут быть решениями (надо проверять при делении на $f(x)$), а если в виде $y' = \dots$, то это бессмысленно, и надо только $y = \mathrm{const}$ проверять.

4. [*на дом можно*] Филиппов 59.

5. Сказать об уравнениях вида $y'(x) = f(ax + by)$.

6. Решить Филиппов 62,64.

7. [*на дом можно*] Филиппов 65.

8. Некоторая вариация той же темы: Филиппов 66.

9. [*на дом можно*] Филиппов 67.

10. [*в аудитории или на дом, в зависимости от наличия времени*] Теперь мы можем доводить до конца задачи об изогональных траекториях: Филиппов 68 в).

11. ($*$) [*на дом*] Филиппов 69

$\boxed{\S 2}$
$\boxed{\S 3}$

12. ($*$) Порешаем геометрические и физические задачи на УРП: Филиппов 71,79,83,86,88,96,100.

    [Обычно этот п. 12 пропускаем, что не страшно, т. к. геометрические и физические задачи есть далее в разделе II о линейных уравнениях. Но если быстрее пройти п. 1, то можно что-то успеть; также часть можно затронуть на занятии 2 за счет экономии на п. 17 (если его [*на дом*]).]

    [из этих задач в первую очередь надо решить: 71,79,83. На дом лучше задать: 88,96. Если успеем (а иначе тоже на дом): 86,100]

$\boxed{\S 3|\text{занятие } 1}$
$\boxed{\S 4|\text{занятие } 2}$

13. Рассказать о решении однородных уравнений $y'(x) = f(y/x)$, или $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (M,N — однородные одной степени).
    Упражнение. [*на дом*] Доказать, что $f(y/x)$ — общий вид однородной функции степени 0 от (x, y).
    Рассматриваем отдельно решения $y = kx$, где $f(k) = k$, а остальные ищутся заменой $y \mapsto z = y/x$ (сводятся к УРП).

14. Решить задачи **Филиппов** 101,104.

15. [*на дом можно*] **Филиппов** 109.

16. Рассказ об уравнениях вида $y'(x) = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$.

    (a) Если линейные формы в дроби зависимы, то это фактически п. 5.

    (b) Иначе новые переменные $\xi = a_1x + b_1y + c_1$, $z = a_2x + b_2y + c_2$, в которых получится однородное уравнение.

17. Решить **Филиппов** 113. [можно весь или часть [*на дом*] , если делали п. 12 на этом занятии]

18. [*на дом можно*] **Филиппов** 116.

19. Рассказать о возможности сводить некоторые уравнения (со степенными коэффициентами) к однородным заменой $y = z^m$ с неизвестным m.

20. Решить **Филиппов** 121.

21. [*на дом можно*] **Филиппов** 124,132,133.

§4|занятие 2

§5|занятие 3

Раздел II. Линейные уравнения I порядка и сводящиеся к ним (§ 5) — частный случай УПД.

22. Рассказать о решении линейных уравнений I порядка $y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$:
    Способ I. Однородное уравнение, затем вариация постоянной.
    Способ II. Через ИМ $\mu(x) = \exp\left(\int a(x)dx\right)$ — при умножении на μ получаем $(\mu y)' = \mu f$. [так предпочтительнее]

Отметить что линейность может быть не по y, а по x, что может быть обнаружено при записи уравнения в симметричной форме (через дифференциалы).

[в темпе, чтобы успеть не скомкать пп. 30,31!]

23. Решить **Филиппов** 136,138,139,145,146. [испробовать оба способа, тяготея больше к ИМ]

24. [*на дом можно*] **Филиппов** 144,147.

25. Рассказать о решении уравнения Бернулли

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 1)$$

сведением к линейному заменой $z = y^{1-\alpha}$ (не забыть решение $y = 0$ при $\alpha > 0$).

26. Решить **Филиппов** 151,153.

27. [*на дом можно*] **Филиппов** 154,155.

28. Рассказать самому решение **Филиппов** 163 как пример, где замена неизвестной функции упрощает уравнение.

29. [*на дом можно*] **Филиппов** 164.

30. Решить **Филиппов** 165 — пример интегрального уравнения, легко сводящегося к ОДУ (сразу задача Коши получается).

31. [*на дом можно*] **Филиппов** 166.
[пп. 30,31 часто надо пропустить, чтобы успеть пп. 22–34 за 1 занятие, или можно оба на дом как (∗)]

32. Рассказать об уравнении Риккати
$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$ — при известном частном решении $y = y_1$ замена $y = y_1 + z$ дает уравнение Бернулли для z с $\alpha = 2$.

33. Решить **Филиппов** 167,171.

34. [*на дом можно*] **Филиппов** 168,169.

$\boxed{\text{занятие 3}}$
. . . .
$\boxed{\text{занятие 4}}$

35. Еще порешаем прикладные задачи: **Филиппов** 173,175. [быстро ($\leqslant$15 минут), или вовсе можно опустить (если решали п. 12)]

36. [*на дом можно*] **Филиппов** 172,174,176.

37. Порешаем задачу на качественную теорию линейных ОДУ (основная масса материала об этом будет далее в теме специально о линейных уравнениях): **Филиппов** 178,181 (можно пропустить 181, если плохо успеваем).

38. [*на дом можно*] **Филиппов** 179,182.

$\boxed{\S 5}$
. . . .
$\boxed{\S 6}$

Раздел III. УПД — общая конструкция.

39. Рассказать о понятии УПД, сведе́нии к ним с помощью ИМ, путях поиска его. Отметить что все предыдущее в этой теме было частным случаем этой конструкции.

40. Решить УПД: **Филиппов** 186,188.

41. [*на дом можно*] **Филиппов** 189,194.

42. **Филиппов** 205 (здесь ИМ удобно искать из УЧП для него).

43. **Филиппов** 195,197.

44. [*на дом можно*] **Филиппов** 207,212.

45. [*на дом*] Прочитать введение к **Филиппов** § 6, подготовиться к контрольной работе.

План занятий по теме 2:
Существование, единственность и качественное поведение решений ОДУ
(Филиппов § 7 с добавлениями)[4]

1. Напомнить теорему Коши—Пикара: формулировка, идея доказательства (метод последовательных приближений), в т. ч. для систем и ОДУ высшего порядка.

2. Иллюстрация т. Пикара — метод последовательных приближений — решить Филиппов 221а),б); 222а),в). Заметить что в 222в)
[приближения для производных]≠[производные от приближений].

3. [*на дом можно*] Филиппов 221в),г); 222б),г).

4. Иллюстрация т. Пикара — интервал существования решения (гарантированный) — решить Филиппов 223а),в) (кроме поиска точного максимального интервала).

5. [*на дом можно*] Филиппов 223б),г); а также оптимизация интервала в Филиппов 223а),в).

6. Итак, т. Пикара — это общая основа. Однако следует уточнить, насколько она хорошо описывает конкретные ситуации. В частности, нужно:

   (a) уточнить условия единственности (или убедиться в их неулучшаемости);

   (b) разобраться с локальностью/глобальностью существования решений (продолжение решений).

7. Начнем с п. (а), т. к. если решений много, то вообще некорректно говорить о «поведении решения». Будем при

[4]О количестве занятий на эту тему см. замечание в годовом плане.

этом действовать в рамках т. Пеано (напомнить ее), так что $f \in C$ будет всегда, и можно говорить о каких-то решениях. Для выяснения нужных нам условий достаточно рассмотреть случай $n = 1$, ОДУ — автономное: $y' = f(y)$. Выясним свойства таких ОДУ:

8. Доказать, что если y — решение ОДУ $y' = f(y)$, то $y(\cdot + C)$ — тоже, т. е. семейство $y_{\text{fix}}(\cdot + \alpha)$ и есть семейство y_α решений уравнения.

9. [*на дом, но сейчас будем пользоваться*] Все решения уравнения $y' = f(y)$ (при $f \in C$) монотонны. Тем самым, плоскость $\{t, y\}$ распадается на полосы $\{\text{sgn} f = \text{const}\}$, где ясно как идут графики, стремясь к границам полос. Но пока неясна судьба кривых вблизи этих границ. Об этом далее.

.... занятие 1 ....
занятие 2

10. Теперь мы можем исследовать свойства решений задач Коши вида $\{y' = f(y),\ y(t_0) = y_0\}$. Пусть $f(y_0) = 0$. Тогда ясно, что имеется решение $y \equiv y_0$. А есть ли другие решения? Рассмотрим пример: $\{y' = 2\sqrt{|y|},\ y(0) = 0\}$ — есть ли решения кроме $y \equiv 0$?

    (a) Найти решение y такое, что $\text{sgn} y = \text{sgn} t$.

    (b) Найти все решения з.Коши, используя склейку двух решений, найденных выше и свойство из п. 8.

    (c) Какое свойство правой части вызвало неединственность на оси $\{y = 0\}$?

11. [*на дом можно*] Более общий пример: $\{y' = |y|^\alpha,\ y(0) = 0\}$. Ясно, что $\alpha \geqslant 0$, иначе з.Коши некорректно поставлена. При каких α имеет место единственность решения $y \equiv 0$? Указать все другие решения

при тех α, когда единственность нарушается (это **Филиппов** 226).

12. [*на дом*] *т. Осгуда.* Рассмотрим задачу $\{y' = f(y),\ y(0) = 0\}$, где $f \in C(\text{окр. } 0)$; $\operatorname{sgn} f(y) = \operatorname{sgn} y$ (например; или можно $\operatorname{sgn} f(y) = \operatorname{sgn}|y|$, важно чтобы $f(0) = 0$, $f(> 0) > 0$, а при < 0 неважно). Ясно, что есть решение $y \equiv 0$. Доказать, что
[это решение единственно]$\Longleftrightarrow \int\limits_0 \dfrac{dz}{f(z)} = \infty$.

13. **Филиппов** 235 (как пример того, когда единственность доказывается «в обход критерия Осгуда» в силу специфики f, хотя и только при $t \geqslant t_0$) — решить в аудитории с подсказкой: умножить уравнение для $(y_1 - y_2)$ на $(y_1 - y_2)$.
Замечание. Эту задачу не решить непосредственным сравнением решений в силу уравнения, т. к. оно лишь говорит, что в точке расхождения двух решений $y_1 = y_2$, $y_1' = y_2'$, и противоречия не получится. А этот прием: $\times(y_1 - y_2)$ надо запомнить, т. к. он далее будет еще нужен.
[Еще есть прием: составить уравнение для $|y_1 - y_2|$ без $(y_1 - y_2)^2$, что полезно в случае опасности того, что $(y_1 - y_2) \notin L_2$.]

14. Тем самым мы «частично доказали», что в т. Пикара можно заменить условие $f_y \in C$ (или Липшиц) на условие «почти Липшица» $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant \varphi(|y_1 - y_2|)$, где $\int\limits_0 \dfrac{dz}{\varphi(z)} = \infty$, а ослабить это условие (для общих f, т. е. не считая частных случаев типа п. 13) нельзя.
Замечание для преподавателя. В самом деле, мы это доказали для $f = f(y)$, и решений $y = \text{const}$ (ясно что в п. 12 можно взять $\forall y_0$: $f(y_0) = 0$), но «поверим на слово», что это касается

и других решений, в т. ч. и для $f = f(x, y)$, т. к. поведение по x несущественно для единственности (только $f \in C$ для т. Пеано). Идея сведéния к $y = \mathrm{const}$: замена $y \mapsto (y - y(x))$ (как будет в теме об устойчивости делаться), хотя при этом может появиться зависимость от x, если ее не было изначально.
Итак, окончательная формулировка (неулучшаемая) условий в т. Пикара:

$$\left[f \in C;\ \text{модуль непр-сти } \varphi \text{ ф-и } f \text{ по } y \text{ удовл. } \int\limits_0 \frac{dz}{\varphi(z)} = \infty \right]$$

Это касается и систем (что совсем неочевидно ужé, но тоже верно). Идея: сведéние всего к скалярному уравнению для $|y_1 - y_2|^2$, как это будет делаться в Филиппов 240 в связи с существованием.

15. [*на дом можно*] Привести примеры функций φ, удовлетворяющих условию $\int\limits_0 \dfrac{dz}{\varphi(z)} = \infty$, но стремящихся к 0 медленнее чем $\varphi(s) = Cs$ (т. е. $\varphi(s)/s \to \infty$ при $s \to 0$). Сравнить с п. 11.

16. **Замечание.** Если сложно проверять условие на модуль непрерывности, то можно пользоваться достаточным условием $f_y \in C$ — тем более что оно не сильно загрубляет. Если же оно нарушается, то лучше проверять критерием (модуль непрерывности).

17. Потренируемся определять «области Пикара» для уравнений $y' = f(x, y)$: Филиппов 225а),б),в) (пользоваться достаточным условием $f_y \in C$, а то итак сложно). Что происходит вне этих областей (какие эффекты: несуществование, неединственность, и т. д.)?

18. [*на дом можно*] Филиппов 225г),д),е).

19. Та же задача по существу: Филиппов 228а),г),д) (тоже смотреть $f_y \in C$), т. е. поставить з.Коши и указать «обла-

сти корректности» для параметров з.Коши. Описать происходящее вне этих областей.

20. [*на дом можно*] Филиппов 228б),в),е).

$\boxed{\text{занятие 2}}$
. . . .
$\boxed{\text{занятие 3}}$

21. Задача Коши и ее однозначная разрешимость как средство конструктивного построения решений с заданными свойствами в точке (одного или многих):

    (a) Филиппов 231, сказать о логике поиска решений з.Коши в виде ряда (аналитическая функция);

    (b) Филиппов 229; если графики могут пересекаться, то как предъявить 2 таких графика (указание: использовать подходящие з.Коши) — это уже́ легко догадаться в свете Филиппов 231;

    (c) Филиппов 234 — если да, то предъявить пример ОДУ.

22. [*на дом можно*] Филиппов 230,232,233, при этом предъявить в 230 «явно» несколько графиков, если они существуют, а в 233 — пример ОДУ; по поводу 232 см. еще п. 23.

23. **Мораль.** Задача Коши — средство параметризации решений ОДУ, т. к. между решениями и их з.Коши имеется взаимно однозначное соответствие
[если есть единственность, иначе з.Коши некорректна — пояснить это понятие, в т. ч. на примере Филиппов 229а) и 232 при $\operatorname{tg}\alpha = f(x_0, y_0)$].

24. Теперь перейдем к вопросу из п. 6(b). В т. Пикара дается гарантированный интервал существования, но:

    (a) реальный интервал больше;

(b) хотя он часто все же конечный (меньше допустимого теоретически).

Рассмотрим пример: $\{y' = y^2,\ y(0) = y_0\}$. Найти решение и построить его график. Указать интервал существования решения.
Указания.

(a) Рассмотреть отдельно случаи $y_0 < 0$, $y_0 = 0$ и $y_0 > 0$.

(b) Отметить, что другая ветвь гиперболы не относится к решению з.Коши (она вообще посторонняя, т. к. после разрыва можно[5] брать любое из решений, а не обязательно «с той же постоянной»).

Таким образом, локальность существования в т. Пикара, вообще говоря, по существу (хотя реальный интервал существования может быть больше, чем гарантирован в т. Пикара), т. е. недостаточно «найти формулу решения» (если она вообще есть), а надо еще оговорить (единственность и) интервал, на котором она имеет место.
[в свете этого надо посмотреть на все изученное в теме «явное решение ОДУ.I ...» — на примере уравнений: $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y' = y^2$; не говоря уже о ситуациях, где «нет формул», а надо исходить из общих теорем]

24.5. [*на дом*] Сравнить интервал существования (максимальный) с интервалом Пикара в задаче $\{y' = y^2,\ y(0) = y_0\}$ из п. 24.

25. Т. к. т. Пикара дает интервал меньше истинного, то возникает задача о продолжении решения. Таким образом, нужно уметь исследовать интервал существования решения, а не довольствоваться интервалом из т. Пикара.

[5] Если бы мы дали (как мы сразу видим, бессмысленное) определение решения ОДУ как функции, у которой могут быть разрывы.

Здесь следует использовать 3 фундаментальных понятия/факта:

(a) Непродолжаемое решение (НР — именно оно $\exists!$ в т. Пикара и имеет какой-то интервал существования).

(b) Теорема о покидании компакта (ТПК).

(c) Априорные оценки (АО) — сказать что это значит: АО — это оценки предполагаемого решения, получаемые без исследования его реального существования.

Из ТПК следует, что НР либо существует во всем допустимом (уравнением) интервале по t, либо выходит на границу по y (разрушается).

[Например, так:
Утверждение. $y' = f(t, y)$; $f \in C(\Omega)$; $\Omega = (a, b) \times \mathbb{R}^n$; $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Пусть есть АО: $|y| \leqslant R < +\infty$. Тогда НР существует на всем (a, b).
Доказательство. $K = [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \times B(0, R)$ — компакт в Ω. По ТПК график $\{(t, y(t)\}$ выходит из K. В силу АО он не может выйти через боковую поверхность, значит, он выйдет через основание, ч. и т. д.]

Оба случая были видны в п. 24 (при разных y_0). Поэтому разрушение (или неразрушение, т. е. продолжимость на все допустимые t) может быть показано априорными оценками решения (без нахождения его «явно»). Они получаются, например, из теорем сравнения, т. е. сравнением с решениями других, более простых, уравнений. Оно основано на следующем утверждении:

26. (неравенство Чаплыгина, простейший вариант — со строгим неравенством). Пусть

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = \alpha; \qquad z' = g(t, z), \quad z(t_0) = \alpha;$$

где f, g удовлетворяют условиям т. Пеано при $t \geqslant t_0$. Пусть $f > g$ в области $\{ t \geqslant t_0,\ y \in \mathbb{R} \}$. Доказать, что $y(t) \geqslant z(t)$ при $t \geqslant t_0$.
Лучше так: в аудитории случай $T = t_0$ (см. решение), а [*на дом*] общий случай.

27. Доказать, что решение з.Коши $\{y' = 1+t^2+y^2; y(0) = y_0\}$ разрушается при $t > 0$ для всех $y_0 > 0$.

28. [*на дом можно*] Тот же вопрос для:

    (a) $y_0 \leqslant 0$;

    (b) все то же для уравнения $y' = t^2 + y^2$ $(\forall y_0)$;

    (c) все то же для $t < 0$ (оба уравнения, $\forall y_0$).

    Указания. Сначала отметить, что $y' > t^2$ и добиться $y > 0$ в некоторой точке $t_* > 0$. Для $t < 0$ сделать замену $t \mapsto -t$.

занятие 3

занятие 4

29. $(*)$ (улучшение п. 26 в смысле $f \geqslant g$, но f линейна по y). Пусть $\{ z' \leqslant a(t)z + b(t),\ z(t_0) = z_0 \}$, где $a, b \in C[t_0, +\infty)$. Доказать, что при $t \geqslant t_0$ верно $z \leqslant y$, где $\{ y' = a(t)y + b(t),\ y(t_0) = z_0 \}$.
Отметить, что y существует до $+\infty$ (глобальное существование). [можно пропустить, если плохо успеваем]

30. Итак, ввиду того, что решения линейных ОДУ (потенциально, т. е. если само ОДУ определено) продолжаются на $\mathbb{R}$, можно пытаться доказывать продолжение решений оценкой через линейные уравнения:
Пусть z есть решение уравнения $z' = f(t, z)$, где $f \in C$, существующее на своем интервале $[\alpha, \beta)$. Пусть при всех $(t, y) \in \{ t > \alpha,\ y \in \mathbb{R} \}$ верна оценка $|f(t, y)| \leqslant a(t)y + b(t)$, где $a, b \in C$. Доказать, что z существует до $t = +\infty$.

31. Аналогичное утверждение в более общем виде (с модулем и сразу для систем): рассмотрим систему ОДУ $y' = f(t, y)$, где $|f(t, y)| \leqslant a(t)|y| + b(t)$, где $a, b \in C(\mathbb{R})$. Пусть y — любое решение системы.

    (a) Получить для $Y = |y|^2$ дифференциальное неравенство вида $Y' \leqslant c(t)Y + d(t)$ (на интервале, где существует y), где $c, d \in C(\mathbb{R}^+)$;
    (b) Получить оценку $Y \leqslant Y_1$, где $Y_1 \in C(\mathbb{R}^+)$;
    (c) Доказать, что y существует до $+\infty$;
    (d) Доказать, что y существует до $-\infty$ (заменой $t \mapsto -t$).

32. Итак, для продолжимости решения до ∞ достаточно роста f по y не более чем линейного. Насколько это условие близко к необходимому? Выясним это (как и в вопросах единственности — см. выше) на примере одного автономного уравнения. Пусть $y' = f(y)$, $y(t_0) = y_0$, где для определенности $f > 0$ при $y \geqslant y_0$, $f \in C(\mathbb{R})$.

    (a) Доказать, что решение при $t > 0$ положительно и возрастает [можно пропустить].
    (b) Выписать решение в квадратурах.
    (c) Найти критерий (в терминах f) существования y до $+\infty$.

33. [*на дом*] Филиппов 240,239. (Указание: действовать как в п. 31).

34. [*на дом*] Филиппов 237,238 (использовать предыдущий пункт, в 237 не доказывать необходимость условий на a).

35. Итак, для глобального существования решения нужен (необходимо и достаточно, не считая частных случаев вроде Филиппов 238–240, где односторонняя оценка на f) рост f по y не более чем $\varphi(y)$, где $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{dz}{\varphi(z)} = +\infty$.

занятие 4 (обяз. часть)

все для остатка зан. 4

[Далее идет то, что можем вообще не успеть, но если осталось время, то можно затронуть что-то — например, из пп. 36–38. Или (если в I семестре больше занятий) пройти полноценное занятие 5 по пп. 36–42.]

36. Теперь мы готовы перейти к элементам качественной теории ОДУ: рисовать картину интегральных кривых, не решая ОДУ явно. Рассмотрим сначала автономные ОДУ I порядка: $y' = f(y)$, $y \in \mathbb{R}$.

    Замечание для преподавателя. По итогам пп. 9,12,32 мы можем описать все возможные варианты поведения решений, учитывая дополнительные соображения типа выпуклости.

37. Решить Филиппов 227а),б),е); в том числе исследовать выпуклость и точки перегиба.

38. [*на дом можно*] То же для Филиппов 227в),г),д). Отметить д), где единственность не проверяется условием $f_y \in C$.

39. Аналогично можно рассмотреть качественное поведение решений однородных ОДУ: $y' = f(y/x)$. Рассматривая отдельно $x > 0$ и $x < 0$, получим для $z = y/x$ уравнение $\dfrac{dz}{d\ln x} = (f(z) - z)$, т. е. автономное уравнение. Исследуя его как выше и возвращаясь обратно, получим графики в плоскости (x, y). Указать при этом «алгоритм»:

    (a) Рисование графика функции $f(z) - z$.

    (b) Переход к переменным $(z, \ln x)$, анализ автономного уравнения в этих переменных: точки покоя, участки знакопостоянства, поведение решений при больших $\ln x$ или вблизи постоянных решений (на основе критериев глобального существования и единственности, полученных в пп. 12,32).

(c) Чертеж картинки в плоскости $(z, \ln x)$.

(d) Чертеж в плоскости (x, y): достаточно рассмотреть $x > 0$, т. к. картина симметрична относительно $(0, 0)$. При этом особого внимания требует лишь поведение y при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{\ln x \to -\infty} xz(\ln x)$ может быть любым.

(e) Анализ выпуклости и других тонких свойств.

40. Начертить интегральные кривые уравнения $y' = \dfrac{y^2 - 3xy}{x^2}$ (не решая его).

41. [*на дом можно*] Начертить интегральные кривые уравнений, не решая их:

    (a) Филиппов 108,118;

    (b) $y' = \operatorname{tg}(y/x)$;

    (c) $y' = e^{x/y}$;

    (d) Филиппов 135

42. [*на дом можно*] Филиппов 134.

Итоговые замечания.

1. Остался незатронутым вопрос о продолжении на основе функции Ляпунова (см. лекции);

2. не решены из Филиппов § 7 задачи 224,236, хотя они в принципе интересны (не хватает времени на них).

План занятия по теме 3:
Приемы решения ОДУ в явном виде.II: Не разрешенные относительно производной (I порядка) и понижение порядка

(Филиппов §§ 8,10)

1. Итак, любое ОДУ можно привести к виду $y' = f(t, y)$. При этом [Шаг 1: сведение к $F(t, y, y') = 0$], [Шаг 2: сведение к нормальному виду $y' = f(t, y)$]. Но на шаге 1 число уравнений увеличивается (а под понижением порядка понимается таковое без увеличения числа уравнений), а на шаге 2 есть всякие нюансы. В этой теме рассмотрим оба вопроса. Рассмотрим уравнение $F(x, y, y') = 0$. Самый естественный путь — выразить y' (как это говорилось в теме «Приемы решения ОДУ в явном виде.I» — но здесь возникают специфические явления) и решить как и раньше (если это легко сделать): решить Филиппов 241,243. На чертежах сразу можно пояснить, что такое особое решение (ОР). Отметить неединственность решения з.Коши (даже не считая ОР).

2. [*на дом можно*] Филиппов 246,249; выделить ОР, если есть.

3. Сказать об ОР уравнения $F(x, y, y') = 0$ (см. Филиппов введение к § 8). Необходимое условие ОР — $F_{y'}(x, y, y') = 0$.
   Обоснование для преподавателя. $F(x, y_k(x), y_k'(x)) = 0$, $k = 1, 2$. Касаются в точке x_0, т. е. общая точка $(x_0, y_k(x_0), y_k'(x_0))$ в пространстве $\{(x, y, y')\}$. Тогда

   $$0 = F(x, y_1, y_1') - F(x, y_2, y_2') = F_y(\theta)(y_1 - y_2) + F_{y'}(\theta)(y_1' - y_2'),$$

   где

   $$\theta = (x, y_2 + \gamma(y_1 - y_2), y_2' + \gamma(y_1' - y_2')) \stackrel{x \to x_0}{\longrightarrow} (x_0, y_k(x_0), y_k'(x_0)),$$

где $\gamma \in [0,1]$. Итак, $F_{y'}(\theta) = -F_y(\theta)\dfrac{y_1 - y_2}{y_1' - y_2'}$. Т. к. при $x \to x_0$: $\ln(y_1 - y_2) \to \infty \Longrightarrow \dfrac{y_1' - y_2'}{y_1 - y_2} = (\ln(y_1 - y_2))' \to \infty$, то при $x \to x_0$ получим $F_{y'}(x_0, y_k(x_0), y_k'(x_0)) = -F_y(x_0, y_k(x_0), y_k'(x_0)) \cdot 0 = 0$, ч. и т. д.

Исключая y' из системы $\{F(x,y,y') = 0,\ F_{y'}(x,y,y') = 0\}$, получим кривую $\varphi(x,y) = 0$ — кандидата на ОР. Но надо еще проверить что это *решение*, причем особое (по определению) (это не следует из логики вывода $\varphi(x,y) = 0$, т. к. здесь y' рассматривалась как независимая переменная).

4. Решить Филиппов 259.

5. [*на дом можно*] Филиппов 264.

6. Отметить, что возникновение ОР (т. е. неединственность) — следствие особенностей при попытке свести ОДУ к нормальному виду $y' = f(x,y)$.

7. Сказать о решении уравнений вида $y = f(x,y')$ и $x = g(y,y')$ введением параметра (см. Филиппов введение к § 8): $y' = p$. Например, для первого:

$$pdx[= dy] = f_x dx + f_p dp, \quad (-p + f_x(x,p))dx + f_p(x,p)dp = 0$$
$$\Longrightarrow \quad x = \varphi(p).$$

   Получаем решение в параметрической записи $\{x = \varphi(p),\ y = f(x,p)\}$, которое можно записать и в неявном виде $\psi(x,y) = 0$, если исключить p.

8. Решить Филиппов 284.

9. [*на дом можно*] Филиппов 267.

10. Отметить, что для *уравнения Клеро*: $y = xy' + \psi(y')$ и *уравнения Лагранжа*: $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ метод введения

параметра всегда приводит к явному (или почти явному) решению в силу специфики их.

Замечание для преподавателя. Это можно сделать даже в общем виде, особенно для Клеро — там получается уравнение $(x + \psi'(p))dp = 0$, откуда имеем решения:
$dp = 0 \Longrightarrow y = p_0x + \psi(p_0)$, $\forall p_0$;
и ОР (судя по его «одинокости», но надо проверить что это ОР)
$x + \psi'(p) = 0 \Longrightarrow y = x{\psi'}^{-1}(-x) + \psi \circ {\psi'}^{-1}(-x)$.

11. Решить Филиппов 287, убедиться, что отдельное решение есть ОР.
[можно это тоже на дом, чтобы успеть все за 1 пару, если в начале долго разбирали д. з.]

12. [*на дом можно*] Филиппов 289.

[Филиппов п. 3 введения к § 8 и соответствующую задачу 297, а также 298–300 пропускаем, т. к. там ничего нового (в смысле ОДУ) нет. Также пропускаем § 9, т. к. его роль («узнавание» типа ОДУ) сыграла контрольная №1.]

$\boxed{\S 8}$
. . . .
$\boxed{\S 10}$

13. Отметим некоторые способы понижения порядка ОДУ.
Способ I. Порядок автономного уравнения $f(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ понижается на 1 заменой $y' = h(y)$ (т. е. для h будет ОДУ порядка $(n-1)$) — [легко видеть в общем виде]

14. Решить Филиппов 426 (можно оставить на дом досчитать, при этом сказать о роли ch, sh как аналогов cos, sin).

15. [*на дом можно*] Филиппов 443.

16. *Способ II.* Если функция f в уравнении $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ однородна по $(y, y', \ldots, y^{(n)})$, то порядок понижается заменой $y' = yz$ (т. е. для z будет ОДУ порядка $(n-1)$).

17. Решить **Филиппов** 464.

18. [*на дом можно*] **Филиппов** 467,501.

19. [*на дом*] Самостоятельно прочитать **Филиппов** п. 4 введения к § 10.
    Способ III. Обобщение однородного уравнения — $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, где f однородна по $(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ в обобщенном смысле; и решить **Филиппов** 477.

20. *Способ IV.* Группировка и поиск ИМ $\mu(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ такого, что после $\times\mu$ получится полная производная: $\dfrac{d}{dx}F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$ — это общая ситуация (все к ней сводится).

21. Решить **Филиппов** 455,459. [в 455 можно оставить на дом досчитать, если не успеваем]

22. [*на дом можно*] **Филиппов** 460,461,457.

Замечание. Всю эту тему можно успеть за 1 занятие, если в начале занятия разбирать д. з. не более 10–15 минут, иначе можно задать п. 11 тоже на дом.

План занятий по теме 4:

Линейные уравнения и системы

(Филиппов §§ 11,12,14, Годунов § 1 с добавлениями)[6]

1. Начнем с линейных систем I порядка: $y' = f(t,y)$, f линейна по $y \Longrightarrow y' = A(t)y + f(t)$. Сначала однородные: $y' = A(t)y$. Рассказать о структуре множества решений; ФСР, ФМР. Таким образом, достаточно найти одну из ФМР.

2. В случае $A = A(t)$ это сделать редко удается, но бывает: решить систему $y' = A(t)y$, где $A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}$.

   Замечание для преподавателя. В Петровском есть еще задачи для $A = A(t)$.

3. В случае $A = \mathrm{const}$ можно указать «2 способа»:
   Способ I. $y = Tz$, где $A = TBT^{-1}$, B верхнетреугольная. Тогда $z' = Bz$, и z легко найти. Например, $B = J$ (жорданова). Напомнить что такое J и как находить T. [из столбцов!]

4. Найти разложение $A = TJT^{-1}$ для $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. [*на дом*] Найти решение задачи $x' = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} x$;

   $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ способом I.

6. *Способ II.* Найти ФМР, т. е. решение уравнения $Y' = AY$. Обобщая случай $n = 1$, когда $Y(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k a^k}{k!}$, прихо-

[6] О количестве занятий на эту тему см. замечание в годовом плане.

дим к гипотезе что ряд $e^{tA} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$ является ФМР. Проверить это (не обосновывая сходимость, а действуя формально — почленно).

7. Как находить e^{tA}?

   Способ I. По определению. Найти e^{tA} для $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ этим способом.

8. [*на дом*] Годунов 20,21,25.

9. *Способ II.* Через J. Имеем: $e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}$. Найти e^{tJ} для $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ по определению. Сказать самому как будет для произвольного размера клетки.

10. [*на дом*] Найти e^{tA} через J для A из п. 4.

11. (∗) *Способ III.* По Сильвестеру — рассказать что это значит для любой $f(A)$. У нас $f(s) = e^{ts}$.

12. (∗) [*на дом*] Найти e^{tA} по Сильвестеру для A из п. 4.

занятие 1

занятие 2

[хотя лучше все же успеть п. 13 на занятии 1, чтобы потом не комкать пп. 30,31]

13. *Способ IV.* Через функции ψ. Рассказать об этом.

14. Найти e^{tA} через $\{\psi_k\}$ для A из п. 4.

15. **Замечание.** Если нас интересует любая ФМР (а не обязательно e^{tA}, которая удобна для з.Коши в нуле), и мы ее ищем через J, то проще взять $Y = e^{tA}T = Te^{tJ}$ — не надо считать T^{-1} тогда.

16. [*на дом*] Годунов 52; решить з.Коши $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

17. [*на дом*] Годунов 56.

18. [*на дом*] Используя [Утверждение. $AB = BA \Longrightarrow e^{A+B} = e^A e^B$], найти e^{tA} для $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 3E + B$ по определению (через ряд).

19. ($*$) [*на дом*] Проверить, что e^{tA} в самом деле равна полиному из п. 13, убедившись, что он есть решение з.Коши $Y' = AY$; $Y(0) = E$.

20. [*на дом*] Годунов 67.

21. [*на дом*] Филиппов 874,875; Годунов 34–36.

22. Рассмотрим систему $y' = Ay$ и любую матрицу Y из решений. Вывести ОДУ I порядка для $w \equiv \det Y$ (ф.Остроградского—Лиувилля). Самому сказать о случае $A = A(t)$ (без доказательства).

23. Пусть Y — произвольная матрица, $Y = Y(t)$. Доказать, что

$$\det Y \equiv 0 \begin{bmatrix} \not\Longrightarrow \\ \Longleftarrow \end{bmatrix} \text{столбцы } Y \text{ — лин. завис. функции от } t.$$

[пример: $Y = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{bmatrix}$, $\det Y \equiv 0$, но столбцы линейно независимы]

24. Отметим, что может быть $\det Y(t) \begin{bmatrix} = 0 \\ \neq 0 \end{bmatrix}$ в разных точках — пример: $Y_1(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{bmatrix}$. Кроме того, может быть такое,

что линейная независимость «зависит от интервала»: Выяснить, являются ли линейно независимыми столбцы матрицы $Y_2(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t|t| \\ 2t & 2|t| \end{bmatrix}$, найти $\det Y$. [ясно, что он вообще не улавливает ничего, если тождественно нулевой]

25. Сказать, что если Y есть матрица из решений системы $Y' = A(t)Y$, где $\underline{A \in C}$, то

$$\det Y \equiv 0 \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \exists t_0 : \det Y(t_0) = 0 \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \text{столбцы } Y \text{ лин. зав.} \tag{1}$$

[Доказательство. $\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$ — в силу т. Остроградского—Лиувилля; $\overset{(2)}{\Longleftarrow}$ итак ясно; $\overset{(2)}{\Longrightarrow}$: $\exists c_k$: $y(t_0) = 0$, где $y = \sum c_k Y^k$. Но т. к. $y' = A(t)y$, то в силу единственности имеем $y \equiv 0$, ч. и т. д.]

26. Пусть дана $Y = Y(t)$. Найти $A(t)$ такую, что $Y' = A(t)Y$.
Случай а) $\det Y \neq 0$ всюду (кроме, м. б., нескольких точек) — тогда ясно, что $A = Y'Y^{-1}$. Сделать это для матрицы Y_1 из п. 24.
Случай б) $\det Y \equiv 0$.
[*на дом*] как тогда быть (какие есть варианты)? Разобрать пример Y_2 из п. 24: показать, что годится та же система, что и для Y_1. Объяснить ответ.

27. [*на дом*] Возникает «противоречие» между пп. 23,24 и пп. 25,26:

$\forall Y$	$\exists t_0$: $\det Y(t_0) = 0$ $\begin{bmatrix} \not\Longrightarrow \\ \Longleftarrow \end{bmatrix}$ $\det Y \equiv 0$ $\begin{bmatrix} \not\Longrightarrow \\ \Longleftarrow \end{bmatrix}$ столбцы Y линейно зависимы
$Y' = A(t)Y$	верно (1), т. е. то же, что и в предыдущей строке, но со всеми $\Longleftrightarrow$
хотя «$\forall Y\ \exists A$: $Y' = AY$»	

Как это «противоречие» разрешить? Убедиться, что в примерах п. 26 сохраняется ф. Остроградского—Лиувилля. В каких точках она имеет место?

$\left[\text{Ответ. ф.Остроградского—Лиувилля сохраняется вне 0; } A \in C \text{ вне 0, этим объясняется «противоречие», т. к. 0 — ключевая точка, где } \det Y_1 = 0 \text{ (и где «переключаются» коэффициенты линейной зависимости для } Y_2\text{).}\right]$

28. [*на дом*] Годунов 60,62–65.

29. ($*$) [*на дом*] Годунов 68,12.

30. Рассмотрим теперь неоднородные системы: $y' = A(t)y + f(t)$. Рассказать о структуре множества решений и «2 способа» решения:

    (a) вариация постоянной: пусть Y — ФМР однородной системы $y' = A(t)y$. Ищем решение неоднородной системы в виде $y = Y(t)c(t)$. Вывести формулу общего решения.

    (b) (по сути то же самое) — через ИМ. Здесь ИМ есть некая матрица — какая? Имеем: $y' - A(t)y = f$. Применим $Z(t) \cdot (\dots)$. Вывести уравнение для $Z(t)$, чтобы слева получилась полная производная. Доказать, что в качестве Z можно взять Y^{-1}.
    Указание. Взять d/dt от тождества $YY^{-1} = E$.
    В итоге получилось то же уравнение $(Y^{-1}y)' = Y^{-1}f$, т. е. $Y^{-1}y = c$, где c из п. (a).

31. [*в аудитории или на дом, в зависимости от наличия времени*] В случае $A = \text{const}$ будет $Y(t) = e^{tA}$, и все можно доделать явно. Решить Филиппов 828. Отметить, что $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$, и что получилось линейное многообразие, как и следовало ожидать.

32. [*на дом*] Филиппов 827.
Указание. Можно взять $\cos = \operatorname{Re}\exp(i(\cdot))$.

занятие 2

занятие 3

33. Уравнения и системы высшего порядка сводятся к системам I порядка, но все же случай 1 уравнения высшего порядка играет особую роль. Рассказать о записи через полином (символ дифференциального оператора) $P(t, \lambda)$, $\lambda = d/dt$: $P(t, d/dt)y = f$. Начнем снова со случая $f = 0$. Рассказать о ФСР, матрице Вронского, связь с системой I порядка, ассоциированной с этим уравнением.

34. Рассмотрим особо случай $P = P(\lambda)$. Здесь 3 основные идеи:

    (a) Нам надо найти n линейно независимых решений, т. е. ФСР.

    (b) Можно написать $P(\lambda) = \prod(\lambda - \lambda_i)$.

    (c) И кроме того, очевидно, что если $P = QR$, то $Q(d/dt)y = 0 \Longrightarrow P(d/dt)y = 0$, т. е. для построения ФСР достаточно решать уравнения низшего порядка.

35. Построить ФСР и общее решение уравнения $P(d/dt)y = 0$ для случая, когда все корни λ_i различны.

36. Построить ФСР и общее решение уравнения $(d/dt - \lambda)^n y = 0$ (т. е. все λ_i совпадают).
Указание. Строить по цепочке: $(d/dt - \lambda)^k y_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$, учитывая что $(d/dt - \lambda)y_{k+1} = y_k$.

37. Построить ФСР и общее решение произвольного уравнения $P(d/dt)y = 0$, если известны все корни λ_i.
Указание. Использовать пп. 35,36.

38. [*на дом*] Сведя уравнение $P(t, d/dt)y = 0$ к системе I порядка, получить т. Остроградского—Лиувилля для вронскиана. Сформулировать аналог отношений (1) из п. 25 для уравнений $P(t, d/dt)y = 0$.

[что очевидно, т. к. легко видеть, что [$(y_1, \dots, y_n)$ линейно зависимы]$\Longleftrightarrow$[столбцы матрицы Вронского линейно зависимы]]

39. [*на дом*] Записать для $\psi_k(t, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ отдельную з.Коши для ОДУ порядка k. Вычислить $w(\psi_1, \dots, \psi_n)(0)$. Доказать, что $\psi_1, \dots, \psi_n$ образуют ФСР уравнения $P(d/dt)y = 0$, где λ_k — корни P.
Указание. Использовать п. 38.

40. [*на дом*] Филиппов 531.

41. Решить з.Коши

$$y^{IV} + y'' = 0; \quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1;\ y''(0) = -1;\ y'''(0) = 0.$$

42. Как решать неоднородные уравнения $P(t, d/dt)y = f$? Общий метод — вариация постоянной:

    (a) [*на дом*] Зная все решения однородного уравнения, можно найти решение неоднородного по специальной технике — читать Филиппов введение к § 11 (п.3), и решить Филиппов 575.

    (b) если известно только 1 решение y_1 однородного уравнения, то можно понизить порядок заменой $y = y_1 z$. В случае $n = 2$ это дает решение.
    [*на дом*] построить этим способом общее решение уравнения

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)y = f(t),$$

опираясь на $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$. Рассмотреть случай $\lambda_1 \neq \lambda_2$, затем изучить случай $\lambda_1 = \lambda_2$ предельным переходом.

43. [*на дом*] Еще есть метод для $P = P(\lambda)$: доказать, что $y(t) = \int\limits_0^t \psi_n(t-s)f(s)ds$ дает частное решение для $P(d/dt)y = f$, и найти данные Коши в нуле. Решить с помощью этого Филиппов 611,612.

44. К проблеме понижения порядка и случаю $P(t,\lambda)$ мы еще вернемся, а пока рассмотрим подробнее случай $P(d/dt)y = f$, если f имеет вид «типа решений уравнения $R(d/dt)f = 0$», т. е. $f(t) = Q_r(t)e^{\alpha t}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\beta t$, где Q_r — полином степени r. Поскольку $\cos = \operatorname{Re}\exp$, $\sin = \operatorname{Im}\exp$, то достаточно рассмотреть $f(t) = Q_r(t)e^{\gamma t}$, где $\gamma = \alpha + i\beta$. Чтобы понять, как искать частное решение, надо идти «от обратного», изучив действие $P(d/dt)$ на такого рода функции.
Замечание. Т. к. уравнение линейно, то к f можно применять линейные операции, в т. ч. Re и Im.

45. Доказать, что $P(d/dt)Q_r(t)e^{\gamma t} = \tilde{Q}_{r-\text{кратность}\gamma}(t)e^{\gamma t}$.
Указание. $P(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$. Применить P почленно.

46. Рассмотреть частный случай $r = 0$, $P(\gamma) \neq 0$ (т. е. (кратностьγ)$= 0$): найти непосредственно $P(d/dt)e^{\gamma t}$ точно и убедиться, что это совпадает с общим результатом п. 45. Найти частное решение уравнения $P(d/dt)y = e^{\gamma t}$, если $P(\gamma) \neq 0$.

47. [*на дом*] Найти все решения уравнения $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$.

48. [*на дом*] Найти решение з.Коши

$$y'' - y = 2\cos t, \quad y(0) = 1;\ y'(0) = 0.$$

Указание. $\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2$ или лучше $\cos t = \operatorname{Re} e^{it}$ (но в данные Коши подставлять после применения Re).

[возможно, эта граница между занятиями будет проходить немного выше, но надо успеть тогда на занятии 4 все равно дойти до его границы!]

занятие 3

. . . .

занятие 4

49. Рассмотреть в п. 45 частный случай $r = 1$, $P(\gamma) = 0$, (кратностьγ)$= 1$. Получим: $P(d/dt)Q_1(t)e^{\gamma t} = \tilde{Q}_0 e^{\gamma t}$ ($\tilde{Q}_0 = \text{const}$). Как выглядит частное решение уравнения $P(d/dt)y = e^{\gamma t}$?
Ответ. $Q_1(t)e^{\gamma t}$.
Найти все решения уравнения $y'' - 3y' + 2y = e^t$.

50. ($*$) [*на дом*] При каких k, ω существует периодическое решение уравнения $y'' + k^2 y = \sin \omega t$? При каких k, ω все решения периодичны?

51. Рассмотрев п. 45 в общем случае, получаем, что частное решение уравнения $P(d/dt)y = Q_r(t)e^{\gamma t}$ надо искать в виде $y = \tilde{Q}_{r+\text{кратность}\gamma}(t)e^{\gamma t}$. Найти все решения уравнения $y'' - y' - 2y = (t^2 + t)e^{-t}$.

52. [*на дом*] Филиппов 588,574,585.

53. ($*$) [*на дом, если надо сильно закрепить*] Филиппов 542,577,584.

54. Об уравнении $P(t, d/dt)y = f$ — имеется класс, сводящийся к $P(\lambda)$: уравнения Эйлера — сказать что надо делать замену $t = e^s$.

55. Решить **Филиппов** 589,595.

56. [*на дом*] **Филиппов** 610.

занятие 4

занятие 5

[это занятие 5 можно и не проводить (и для контрольной оно не нужно), но неплохо, если удастся выделить 5 занятий на тему 4 (см. замечания в годовом плане)]

[еще об общих свойствах уравнений $P(t, d/dt)y = f$:]

57. Пусть дано 3 частных решения уравнения $y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = f(t)$. Найти общее решение.

58. То же, если дано 2 частных решения — как быть? [*на дом*] Прочитать о соответствующем приеме через т. Остроградского—Лиувилля (**Филиппов** п. 2 введения к § 12, вспомнить п. 38), и решить эту задачу (выписать общее решение). Таким образом, получается эффективное понижение порядка при $n = 2$ (удобнее чем п. 42(b)).

59. [*на дом*] **Филиппов** 692,703.

[**Филиппов** 704–716 повторяют прошедшее либо не очень важны.
Филиппов 619–629,725–750 пропускаем из-за нехватки ресурсов, хотя они в принципе интересны]

[подбор уравнения под решение — в случае $P(\lambda)$ здесь ясная философия — исходя из п. 37:]

60. **Филиппов** 615.

61. [*на дом*] **Филиппов** 616,618.

62. В случае $P(t, \lambda)$ полезно подробнее остановиться на понятии линейной зависимости — решить **Филиппов**: 641(по определению), 642(ясно), 643(в 2 точках, или 1 и tg, $x \to \pi/2$), 648($s = e^x$ или $x \to \infty$), 649,652(ясно), 653(если 0, то зависимы), 654($\begin{bmatrix}\mathrm{sh}\\ \mathrm{ch}\end{bmatrix} \to e^x$, $\begin{bmatrix}2e^x - 1\\ 3e^x + 5\end{bmatrix} \to e^x$ $\Longrightarrow$ зависимы), 660(важен интервал!).

    Замечание. Можно еще проверить независимость с помощью вронскиана и построения ОДУ для этих функций.

63. Теперь продолжим задачу подбора уравнения под решения, но для $P(t, \lambda)$: решить **Филиппов** 674. Где возникает особенность (вырождение) уравнения? Найти вронскиан заданных функций.

64. Пусть теперь даны $y_1, \ldots, y_n$. Как составить линейное уравнение $P(t, d/dt)y = 0$ минимального порядка, решениями которого они являются? Когда это можно гарантированно сделать? Что делать в других случаях?

65. Аналогично пп. 23–27, надо изучить связь между линейной зависимостью функций, обращением в 0 их вронскиана (всюду и в какой-то точке) и возможностью составления линейного ОДУ для них. Сначала докажем, что для любых $(y_1, \ldots, y_n)$ из линейной зависимости следует $w \equiv 0$. Верно ли обратное? — подсчитать W и w для **Филиппов** 660 [это Y_2 из п. 25]. Кроме того, функции $y_1 = t^2$, $y_2 = t$ имеют $W = Y_1$ из п. 24, что подсказывает, что $w \begin{bmatrix}= 0\\ \neq 0\end{bmatrix}$ в разных точках. Построить ОДУ для функций из **Филиппов** 660.

66. В то же время для решений ОДУ $P(t, d/dt)y = 0$ с непрерывными коэффициентами имеем (аналогично п. 25):

$$w(t_0) = 0 \overset{\text{т. О.—Л.}}{\Longleftrightarrow} w \equiv 0 \overset{\text{из з.Коши}}{\Longleftrightarrow} (y_1, \ldots, y_n) \text{ лин. зависимы.}$$

Как это соотносится с п. 65? (ведь для произвольных $(y_1, \ldots, y_n)$ все «$\Longrightarrow$» неверны).

67. Теперь можно (аналогично п. 26, исключая лишние решения), строить уравнение и в случае зависимых функций (или если $w = 0$):
[*на дом*] Филиппов 667(найти w),678,680(сравнить с 660).

68. [*на дом*] Построить уравнение $P(t, d/dt)y = 0$ минимального порядка для функций $y_1 = t^2$, $y_2 = t$.

69. [*на дом*] Филиппов 664–666. Построить примеры там, где ответ неопределенный.

70. [*на дом*] Филиппов 668.

71. Еще о линейной зависимости: решить Филиппов 669[применение всего пройденного],671, 672[из общих соображений для нелинейных уравнений, что делалось в той теме].

72. [*на дом*] Филиппов 673. Составить пример ОДУ минимального порядка.

73. Разные задачи: Филиппов 718,721,722.

74. [*на дом*] Филиппов 719,723,724.

План занятий по теме 5:

Краевые задачи для линейных ОДУ

(Филиппов § 13 [почти не брал оттуда, т. к. там узко и повторяет Годунов],

Годунов § 2 [отсюда больше] с добавлениями [это основа])

[Если лекции по приложенной программе, то лучше переставить с темой 6]

[не будем делать «обзор вообще», а сразу перейдем к конкретным случаям, и будем поменьше вдаваться в обобщения.]

1. Начнем с краевых задач для линейных систем с постоянной матрицей на $\mathbb{R}$. Итак, рассмотрим задачу:

$$y' = Ay + f(t), \quad \|y\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < \infty. \tag{1}$$

Известно, что если

$$\lambda_j(A) \notin i\mathbb{R}, \tag{2}$$

то для $\forall f \in C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ $\exists!$ решение (1), т. е. $y \in C^1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$. Позже обсудим важность условия (2), вопросы непрерывной зависимости и представления решений.

2. Решить краевую задачу

$$y' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y + f; \quad \|y\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < \infty; \quad f \in C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}),$$

делая замену $y = Tv$, где $A = TJT^{-1}$, J — жорданова форма, и непосредственно подбирая const в общем решении уравнения, чтобы обеспечить ограниченность. Записать получившийся ответ в виде $y(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} H(t-s) f(s) ds$, где $H = H(\xi)$ — некоторая матрица (выписать ее, используя обозначение θ — функция Хевисайда). [упомянуть термин «свертка»]

3. Сказать о матрице Грина: определение, $\exists!$ при условиях (2); представление решений с ее помощью и его роль для непрерывной зависимости решения y задачи (1) от входных данных f.

4. Найти матрицу Грина в задаче п. 2 по определению и сравнить ответ с тем, что получилось в п. 2 в качестве этой матрицы «само собой».

5. Как «культуризовать» действия из п. 4 (неопределенные коэффициенты в матрице Грина), чтобы это работало в многомерном случае? Рассмотрим краевую задачу (1). Пусть $A = TJT^{-1}$, где $J = \begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix}$, $\mathrm{Re}\lambda_j(J_+) > 0$, $\mathrm{Re}\lambda_k(J_-) < 0$ (например, J — жорданова). Сделаем замену $H = TFT^{-1}$, где H — матрица Грина для (1).

   (a) Записать свойства H в терминах F.

   (b) Найти F (записав с помощью θ).

   (c) Выписать окончательно H.

6. [*можно начать, а на дом доделать*] Годунов 107 (но не надо двумя способами, а только через матрицу Грина).

7. [*на дом можно*] Что происходит, если часть (или все) корни $\lambda_i(A) \in i\mathbb{R}$? Рассмотрим пример:

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} y + f, \quad \|y\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < \infty.$$

   (a) Выписать все решения системы.

   (b) Привести пример $f \in C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ такой, что $\neg\exists$ решение задачи.

(c) Указать дополнительные условия на f, при которых существует хотя бы одно решение. Сколько тогда будет решений? Выписать все.

Замечание. И всегда, если имеются мнимые собственные числа, то:

(a) Всегда $\exists f \in C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ такая, что $\neg\exists y \sim$(1).

(b) Если же решение существует, то оно обязательно неединственно (хотя и не все решения системы ограничены, если есть не мнимые корни или мнимые кратные).

7.5. [*на дом*] Доказать оценку $\|y\|_{C^1(\mathbb{R})} \leqslant C\|f\|_{C(\mathbb{R})}$ для (1),(2) с помощью п. 5.

$\boxed{\text{занятие 1}}$
. . . .
$\boxed{\text{занятие 2}}$

8. Сказать о краевых задачах

$$P(d/dt)y = f; \quad \|y\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < \infty \tag{3}$$

как следствие систем ($P(\lambda)$ — полином степени n), причем:

(a) ограниченность всех производных эквивалентна ограниченности только самой y в силу специфики решения (экспоненты, показатели не мнимые — см. (4));

(b) условие (2) принимает вид

$$\lambda_i(P) \notin i\mathbb{R}; \tag{4}$$

(c) представление вектора $(y, y', \ldots, y^{(n-1)})^t$ через матрицу Грина H и вектор $(0, \ldots, 0, f)^t$ дает (с $h = H_{1n}$)

$$y(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} h(t-s)f(s)ds, \tag{5}$$

где h обладает свойствами:

$$P(d/d\xi)h(\xi) = 0,\ \xi \neq 0; \qquad \|h\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < \infty;$$

$$[h]_0 = \dots = [h^{(n-2)}]_0 = 0; \quad [h^{(n-1)}]_0 = 1.$$

Эта h называется функцией Грина задачи (3). Известно, что:

(a) При условии (4) $\exists! h$; $\forall f \in C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ $\exists!$ решение (3) $y \in C^n(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, при этом имеет место запись (5) (а значит, и непрерывная зависимость y от f);

(b) При нарушении (4) решение (3) $\neg\exists$ при некоторых ограниченных f, а при остальных — неединственно.

[рассказывать спокойно и подробно, т. к. времени должно хватить]

9. Найти ф.Грина и решение задачи

$$y'' - 2y' - 3y = f, \quad \|y\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < \infty.$$

10. [*на дом можно*] Найти C в оценке корректности предыдущей задачи

$$\|y\|_{C^2(\mathbb{R})} \leqslant C\|f\|_{C(\mathbb{R})}.$$

[напомнить что такое $\|\cdot\|_{C^k}$ и что такое корректность, почему достаточно оценить решение через правую часть — в силу линейности]

Указание. Сначала оценить $\|y\|_{C^k(\mathbb{R})}$ для абстрактного решения $y(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} h(t-s)f(s)ds$, а потом подставить нашу h.

11. (∗) [*на дом*] Рассмотрим задачу

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = f(x), \quad \|y\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < \infty.$$

Под решением понимается

$$y \in C^2(\mathbb{R}^-) \cap C^2(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}),$$

удовлетворяющая уравнению вне 0 в обычном смысле, а в 0 — в смысле $2y = f$. Построить решение задачи для $f \in C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}) \cap C^\alpha(0)$, т. е. $|f(x) - f(0)| \leqslant B|x|^\alpha$.
Замечание для преподавателя. Последнее условие лишнее, лишь для упрощения студентам.
Подсказки:

(a) Это уравнение Эйлера!

(b) Найти ограниченные решения уравнения на каждой из полуосей $\mathbb{R}^\pm$ (заменой Эйлера), вернувшись в итоге в исходные переменные.

(c) Доказать, что $y(+0) = y(-0) = f(0)/2$, прибавляя и вычитая в формулах для $y|_{\mathbb{R}^\pm}$ в интегралах $f(0)$ — в итоге интегралы с $f(0)$ считаются, а с $(f(s) - f(0))$ — оцениваются по условию Гельдера.

12. Рассказать о краевой задаче на полупрямой (снова требуем (2))

$$y' = Ay + f(t); \quad By(0) = \varphi;$$

$$|y| < \infty \text{ на } +\infty; \quad \dim B = k \times n.$$

Сведем к случаю $f = 0$: $y = x + z$, где

$$x' = Ax + f(t); \quad Bx(0) = Bx(0) \text{ (т. е. нет условий)};$$

$$|x| < \infty \text{ на } +\infty;$$

$$z' = Az; \quad Bz(0) = \varphi - Bx(0); \quad |z| < \infty \text{ на } +\infty.$$

Мы умеем решать задачу для x: достаточно найти его как решение задачи

$$x' = Ax + \tilde{f}(t); \quad \|x\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < \infty,$$

где $\tilde{f}$ — ограниченное непрерывное продолжение f на $\mathbb{R}$ (например, четное). Ищем z. Пусть $A = TJT^{-1}$, $J = \begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix}$; тогда $v' = Jv$, где $z = Tv$, откуда $v = e^{tJ}h = \begin{bmatrix} e^{tJ_+} & 0 \\ 0 & e^{tJ_-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_+ \\ h_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{tJ_+}h_+ \\ e^{tJ_-}h_- \end{bmatrix}$; и окончательно $z = \begin{bmatrix} T_+ & T_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{tJ_+}h_+ \\ e^{tJ_-}h_- \end{bmatrix} = T_+e^{tJ_+}h_+ + T_-e^{tJ_-}h_-$. Ясно, что

$$z \text{ ограничена на } +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad h_+ = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$z(0) = T_-h_-,$ т. е. $z(0) \in \mathrm{span}\{$СВ и ПВ, соотв. $\mathrm{Re}\lambda < 0\}$.

В итоге $z = e^{tA}T_-h_-$ — это общее решение задачи «уравнение + ограниченность», и остается обеспечить условия в 0: $\varphi - Bx(0) = BT_-h_-$, т. е.

$$\text{задача корректна} \iff \text{условие Лопатинского:}$$

(a) BT_- — квадратная, т. е. $k = n_-$ (это итак ясно из смысла условий на $+\infty$ для z);

(b) $\det(BT_-) \neq 0$.

Тогда $z = e^{tA}T_-(BT_-)^{-1}(\varphi - Bx(0))$. В итоге

$$y(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} H(t-s)\tilde{f}(s)ds + e^{tA}T_-(BT_-)^{-1}(\varphi - Bx(0)).$$

Отметить прямоугольность матриц («$(BT_-)^{-1} \neq (T_-)^{-1}B^{-1}$», и т. д.), крайние случаи $n_+ = 0$

и $n_- = 0$.

$\left[\text{рассказывать спокойно и подробно, т. к. времени должно хватить! ничего не комкать}\right]$

Замечание. Здесь можно ввести также матрицу Грина, но ее использование требует дополнительных обоснований для $\varphi \neq 0$, и мы не будем этого делать.

13. Годунов 119: проверить условие Лопатинского, выписать формулу решения (не вычисляя e^{tA} и $(BT_-)^{-1}$).

14. [*на дом*] Довести ответ в п. 13 до вида $y = e^{tA}\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$, где e^{tA} не считать, а компоненты столбца $\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$ явно выразить через $\varphi_{1,2}$ (т. е. подсчитать $T_-(BT_-)^{-1}$).

$\boxed{\text{занятие 2}}$

....

$\boxed{\text{занятие 3}}$

15. Рассмотрим краевые задачи для уравнений высокого порядка на $\mathbb{R}^+$ (снова предполагаем (4))

$$P(d/dt)y = f(t); \quad \|y\|_{L_\infty(\mathbb{R}^+)} < \infty;$$

$$\beta_j(d/dt)y|_{t=0} = \varphi_j; \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

где $\deg P = n$, $\deg \beta_j \leqslant n - 1$. Отметить что если $\deg \beta_j > n - 1$, то можно исключить высшие производные:

Пример. $y'' + y = 0$; $y(0) = 1$; $y'''(0) = 2$ или $y^{IV}(0) = 2$. Снова $y = x + \xi$;

$$P(d/dt)x = f(t);$$

$$\beta_j(d/dt)x|_{t=0} = \beta_j(d/dt)x|_{t=0} \text{ (т. е. нет условий)};$$
$$\|x\|_{L_\infty(\mathbb{R}^+)} < \infty;$$
$$P(d/dt)\xi = 0; \quad \beta_j(d/dt)\xi|_{t=0} = \varphi_j - \beta_j(d/dt)x|_{t=0};$$
$$\|\xi\|_{L_\infty(\mathbb{R}^+)} < \infty.$$

x находим из краевой задачи на всей прямой с правой частью $\tilde{f}$ (ограниченное непрерывное продолжение f, например, четное), а тогда ищем ξ так: заметим, что

$$P(d/dt)\xi = 0; \quad \|\xi\|_{L_\infty(\mathbb{R}^+)} < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad P_-(d/dt)\xi = 0,$$

где $P = P_+P_-$, $\mathrm{sgnRe}\lambda(P_\pm) = \pm 1$. Но тогда

$$\psi_j := \varphi_j - \beta_j(d/dt)x|_{t=0} = \beta_j(d/dt)\xi|_{t=0} =$$
$$= (\gamma_j(d/dt)P_-(d/dt) + \zeta_j(d/dt))\xi|_{t=0} = \zeta_j(d/dt)\xi|_{t=0},$$

где

$$\gamma_j = \beta_j \mathrm{div} P_-; \quad \zeta_j = \beta_j \mathrm{mod} P_-; \quad \deg \zeta_j \leqslant n_- - 1.$$

В итоге получаем задачу:

$$P_-(d/dt)\xi = 0, \quad t > 0; \quad \zeta_j(d/dt)\xi|_{t=0} = \psi_j, \ j = 1, \ldots, k,$$

т. е. это з.Коши, в которой данные Коши записаны через систему:

$$\boxed{k}\underset{\substack{\boxed{n_-}\\ \text{(матрица Лопатинского)}}}{\begin{bmatrix}\text{коэффициенты}\\ \text{полиномов}\\ \zeta_j\end{bmatrix}}\underset{\boxed{1}}{\begin{bmatrix}\xi(0)\\ \xi'(0)\\ \dots\\ \xi^{(n_--1)}(0)\end{bmatrix}}\boxed{n_-} = \underset{\boxed{1}}{\begin{bmatrix}\vec{\psi}\end{bmatrix}}\boxed{k}.$$

Возникает условие Лопатинского однозначной разрешимости:

(a) $k = n_-$;

(b) det(матрицы Лопатинского)$\neq 0$.

Замечание 1. Можно было сделать через сведе́ние к системе (заметив, что ограниченность функции и всех ее производных эквивалентны), но там не удалось бы так упростить с делением операторов нацело, хотя условия разрешимости получились бы те же (в других терминах).
Замечание 2. Существует понятие ф.Грина в этой задаче, но при $\varphi \neq 0$ требуется дополнительная теория (ср. п. 12), и мы не будем ее рассматривать (обычно это вычитание краевых условий и перевод их в правую часть уравнения).

[этот п. 15 проходить в темпе, хотя и тщательно, чтобы не скомкать п. 23]

16. [*можно начать, а на дом доделать*] Проверить условие Лопатинского и решить задачу

$$y^{IV} - 2y'' + y = 0; \quad \|y\|_{L_\infty(\mathbb{R}^+)} < \infty;$$

$$(y''' - y')|_{t=0} = \alpha; \quad (y'' + Ry)|_{t=0} = \beta.$$

17. [*на дом*] Проверить условие Лопатинского и решить задачу

$$y' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix};$$

$$\|y\|_{L_\infty(\mathbb{R}^+)} < \infty; \quad (\alpha y_1 + \beta y_2)|_{t=0} = \gamma$$

(система та же, что и в п. 6, можно оттуда взять половину решения).

18. [*на дом*] Годунов 136 — найти *все* граничные операторы.

19. [*на дом*] Годунов 137.

20. Перейдем к краевым задача на отрезке, начнем с систем I порядка:

$$y' = A(t)y + f(t); \quad t \in (a, b); \quad Ly(a) + Ry(b) = \varphi. \quad (6)$$

$\left[\begin{array}{l}\text{это общий вид, т. к. должно быть } n \text{ условий на } 2n \\ \text{величин: } \begin{bmatrix} L & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(a) \\ y(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \end{bmatrix} \\ \end{array}\right]$

21. Пусть известна ФМР $Y(t)$ системы $y' = A(t)y$. Построить решение задачи (6). Какие условия корректности возникают?

22. Если $\varphi = 0$, то решение (6) можно записать в виде $y(t) = \int\limits_a^b G(t, s) f(s) ds$, где G — матрица Грина, т. е. (по определению)

$$\frac{d}{dt} G(t, s) = A(t) G(t, s), \quad t \neq s;$$

$$G(s + 0, s) - G(s - 0, s) = E; \quad LG(a, s) + RG(b, s) = 0.$$

[отметить что это то же, что и для $\mathbb{R}$, только там было $G(t, s) = H(t - s)$]
G $\exists!$ при условии $\det(LY(a) + RY(b)) \neq 0$, полученном нами в п. 21.

23. [*в аудитории или на дом, в зависимости от наличия времени*] [хотя лучше в ауд.!] Найти матрицу Грина (6), зная ФМР $Y(t)$ однородной системы.

24. [*на дом можно*] Рассмотрим задачу

$$y' = A(t)y + f(t); \quad By(a) = \psi, \quad Dy(b) = \chi;$$

$\dim B = l \times n$, $\dim D = r \times n$, $l + r = n$.

(a) Записать в стандартном виде (6).

(b) Найти условия корректности.

$\boxed{\text{занятие 3}}$
$\boxed{\text{занятие 4}}$

[это занятие можно вести не торопясь, тогда хватит материала на все время]

25. Рассмотрим задачу

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in (0,1);$$

$$-y_1(0) + \alpha y_1(1) + 2y_2(1) = 0, \quad 2y_1(0) + y_2(0) = -1.$$

(a) записать в стандартном виде (через матрицы) и выписать формулу для решения (пока не считая до конца);

(b) найти условия корректности;

(c) [*на дом*] довести расчеты до конца — выписать решение явно [ответ громоздкий!].

26. [*на дом*] Годунов 97,98.

27. Рассмотрим краевые задачи на отрезке для уравнений высокого порядка:

$$\begin{gathered} P(t, d/dt)y = f(t), \quad t \in (a,b); \\ \beta_j(d/dt)y|_{t=a} + \gamma_j(d/dt)y|_{t=b} = \varphi_j, \\ P(t,\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}(t)\lambda^{n-1} + \dots + a_0(t); \\ \deg \beta_j, \deg \gamma_j \leqslant n-1, \quad j = 1,\dots,n. \end{gathered} \tag{7}$$

Можно записать это в виде системы для $z = (y, \dots, y^{(n-1)})^*$ и получить, что при $\varphi = 0$ решение имеет вид $y(t)=\int\limits_a^b g(t,s)f(s)ds$, где $g=g_{1n}$ (G — матрица Грина соответствующей задачи для z) — функция Грина, обладает свойствами:

$$P(t,d/dt)g(t,s)=0 \quad (t\neq s);$$

$$g \text{ удовл. краевым условиям по } t=a,b \text{ с } \varphi=0;$$

$$\begin{bmatrix} g \\ \vdots \\ g_t^{(n-1)} \end{bmatrix}(s+0,s)-\begin{bmatrix} g \\ \vdots \\ g_t^{(n-1)} \end{bmatrix}(s-0,s)=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

При этом $(\exists g) \iff$ (задача (7) корректна) $\iff$

$$\iff \left[\begin{array}{c} \det(LY(a)+RY(b))\neq 0, \text{ где } L,R \text{ состоят} \\ \text{из коэффициентов полиномов } \beta_j,\gamma_j, \\ \text{а } Y \text{ — матр. Вронского уравнения } (7)_{1\text{однор}} \end{array}\right] \tag{8}$$

$$\iff \text{(однор. задача (7) имеет только 0 решение).} \tag{9}$$

При $\varphi\neq 0$ задача (7) решается непосредственно.

[Причем ф.Грина тоже применима, но об этом не будем — надо вычесть любую функцию из решения так, что $\varphi\to 0$, а f изменится — как например в Годунов 133.]

При $\varphi=0$ проще всего решать через g, т. к. ее легко найти из определения.

28. Решить Годунов 87 — найти ф.Грина и выписать решение задачи [это частный случай Годунов 86, но пока сделаем «тупо» для тренировки]

29. Годунов 90 (т. е. найти условия корректности) — решить обоими способами — на основе условий (8) и (9).

[пропустили Годунов 91, т. к. мало времени и не так принципиально]

30. [*в аудитории или на дом, в зависимости от наличия времени*] [хотя лучше в ауд.] Годунов 86. [если в ауд., то сказать о поправке определения g в случае уравнения $a_0(t)y^{(n)} + \ldots$]

30′. [*на дом*] Прочитать Филиппов введение к § 13 п. 2; Годунов введение к § 2 п. 1 (о случае $a_0(t)y^{(n)} + \ldots$).

31. [*если п. 30 сделали в ауд., то на дом*] вывести из Годунов 86 задачи Годунов 87,88.
[*если п. 30 на дом, то это в ауд.*] решить Годунов 88, а [*на дом*] вывести Годунов 87,88 из Годунов 86.

32. (∗) [*на дом*] Годунов 134.

33. [*на дом*] [аналог п. 10] Филиппов 781.

34. [*на дом*] Годунов 135.
Указание для части II задачи: рассмотреть матрицу Вронского и использовать п. 24.

35. [*в аудитории или на дом, в зависимости от наличия времени*] Филиппов 782,784.

36. [*на дом*] [если решали п. 35] Филиппов 783,785.

План занятия по теме 6:

Зависимость решений ОДУ от параметров

(Филиппов § 18)

1. Рассказать на примере **Филиппов** 1064 об исследовании непрерывной и дифференциальной зависимости решения от параметров, зачем это нужно и на каких теоремах базируется — пока для 0-го и 1-го приближений. [спокойно и подробно]

2. **Филиппов** 1068.

$\boxed{\text{1-я половина}}$ .... $\boxed{\text{2-я половина}}$

3. **Филиппов** 1070. (если медленно идет, то можно [*на дом*])

   [задача неудачная, т. к. решение и так явно находится при всех значениях параметров — студенты могут этим пытаться воспользоваться]

4. Замечание о дифференцировании по начальному моменту t_0.
   [хотя мы это не примéним нигде, а только для свéдения]

5. [*на дом*] **Филиппов** 1072,1071,1073.

6. Прокомментировать нахождение высших производных по параметру (т. е. нахождение 2-го и далее приближений).

7. **Филиппов** 1078: найти 1-ю и 2-ю производные по μ и выписать 2-е приближение: $y = (\dots) + (\dots)\mu + (\dots)\mu^2 + \dots$

8. Рассказать о поиске решения сразу в виде ряда (разложения) по параметру с неопределенными коэффициентами — то же самое «с другой стороны» (хотя в случае всего ряда используется аналитичность).

9. [*в аудитории или на дом, в зависимости от наличия времени*] Филиппов 1074.

Замечание. Остались незатронутыми следующие моменты из Филиппов § 18:

1. Оценка $|y(t,\mu) - y(t,0)|$ (см. п. 1 введения и задачи 1056–1063).

2. Разные методы приближенного решения ОДУ (см. задачи 1126–1140 со ссылками на литературу).

3. Поиск периодических решений методом малого параметра (см. конец п. 2 введения и задачи 1079–1090).

4. Поиск аналитических решений ОДУ, в т. ч. тригонометрических и обобщенных степенных рядов (см. пп. 4,5 введения и задачи 1091–1125).

Т. е. в нынешнем виде эта тема касается только зависимости от параметров, хотя Филиппов § 18 по сути посвящен приближенному решению ОДУ.

План занятий по теме 7: **Автономные ОДУ, их особые точки. Фазовое пространство** (Филиппов §§ 16,17)

1. Рассказать о роли автономных систем и фазового пространства, траекторий в свете общих систем, их интегральных кривых, отдельно указать случай $\dim = 2$.

2. Рассказать о методе построения фазовых портретов в $\mathbb{R}^2$ через в первую очередь анализ особых точек (ОТ), которые в свою очередь сводятся чаще всего к линейному

случаю, рассказать классификацию ОТ.

[подробно, но достаточно в темпе, надо все это успеть за 1-ю половину пары, а лучше всего даже успеть начать п. 3(a)]

3. Решим задачи на построение (глобальных) фазовых портретов линейных систем — **Филиппов**:

   (a) 973 (фокус, акцент на направлении закручивания);

   (b) 971 (узел, акцент на выяснении асимптот и того, которой из них касаются кривые);

   (c) 975 (центр, акцент на направлении вращения);

   (c)′ [*на дом*] исследовать форму циклов (использовать формулу для $\frac{d}{dt}\ln r$ или изоклины);

   (d) 978 (параллельные прямые, акцент на том, что целая прямая особых точек);

   (e) 972 (вырожденный узел, акцент на направлении и том, с какой стороны подходят кривые — здесь надо рисовать (ξ,η), а потом отслеживать замену!).

   [м. б. (d) и/или (e) [*на дом*] , чтобы успеть хотя бы начать п. 4 в аудитории, но лучше ничего не пропускать!]

4. [*можно начать, а на дом доделать*] [но лучше в ауд.!] Перейдем к локальным фазовым портретам ОТ нелинейных систем (по 1-му приближению) — решить **Филиппов** 987 (только найти ОТ и их типы, пока не чертить).

5. [*на дом*] **Филиппов** 990,998.

6. [*на дом*] [заготовка для дальнейшего] **Филиппов** 1025 (только исследовать ОТ и рисовать локальный фазовый

портрет!).

[больше на задачах 979–992 не останавливаемся, т. к. то же будет делаться в задачах 1021–1034 (только там еще и глобальный фазовый портрет будет требоваться). Тем более что аналогичная деятельность будет в теме «устойчивость» (т. е. исследование по линейному приближению).]

[задачи 993–997,999–1000 пропускаем, т. к. нет времени, и это «побочная ветвь», хотя в принципе они интересные]

$\boxed{\text{занятие 1}}$
. . . .
$\boxed{\text{занятие 2}}$

7. Перейдем к построению глобальных фазовых портретов. Сначала для систем I порядка на плоскости. Мы умеем исследовать ОТ, и нужно лишь дополнить это исследованием поля направлений вдали от них. Решить **Филиппов** 1025 до конца (опираясь на сделанную в п. 6 картину вблизи ОТ). [долго не упираться, наметить и сразу показать ответ сделанный на компьютере]

[больше задачи 1021–1034 не решаем, т. к. то же будет делаться в задачах 1001–1020 для систем, полученных из уравнений II порядка]

8. Рассказать об изучении поведения решений автономных уравнений II порядка $x'' = f(x, x')$ сведе́нием к системе $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y \\ f(x,y) \end{bmatrix}$ для вектора $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$ — возникает фазовая плоскость уравнения «координата+скорость». Физический смысл модуля вектора (x, x') («полная энергия») и соответствующая трактовка случаев устойчивости/неустойчивости ОТ и т. п.;

$\left[\text{любая ОТ имеет вид } (x_0, 0), \text{ где } f(x_0, 0) = 0, \text{ т. е. это точка покоя исходного уравнения}\right]$

наличия центра, фокуса.

9. Решить **Филиппов** 1003 поправленный: $x'' = x^2 - x$ — свести к системе, исследовать ОТ, прикинуть поле везде, дать глобальный портрет и трактовку $t \to +\infty$.

   [к концу I половины пары эту задачу надо уже вовсю решать или даже заканчивать]

10. [*на дом*] **Филиппов** 1015 — те же вопросы, что и в п. 9.

11. [*на дом*] **Филиппов** 1035.

    [задачи 1036–1039 пропускаем, т. к. они слишком специальные]

12. Отметить важность поиска периодических решений, т. е. замкнутых траекторий на фазовой плоскости, а также устойчивости их. Сказать о понятии предельного цикла (см. **Филиппов** п. 3 введения к § 17) и типах циклов. В общем случае вводим полярную СК:
    $\{r' = f(r, \varphi),\ \varphi' = g(r, \varphi)\}$. Если $g = g(\varphi)$, то можно считать $\left[\text{очевидная замена } \dfrac{d\varphi}{g(\varphi)} = d\varphi_1\right]$ $\dfrac{d\varphi}{dt} = 1$.

13. Решить **Филиппов** 1041,1042,1046 — найти циклы, нарисовать траектории, определить типы циклов (устойчивость их).

    [чаще всего 1046 только начать, а [*на дом*] — доделать, рассчитав так, чтобы успеть задачу 1047, оставив 10 минут для нее]

14. **Филиппов** 1047.

15. (∗) [*на дом*] Филиппов 1048. Описать случаи всех значений a.

16. [*на дом*] Филиппов 1054.

17. (∗) [*на дом*] Филиппов 1053.

    [задачи 1049–1052,1055 пропускаем, т. к. они «побочные» и требуют слишком много сил]

18. (∗) [*на дом*] Филиппов 1165 (напомнить понятие I интеграла).

План занятий по теме 8:

Устойчивость решений ОДУ

(Филиппов § 15, Годунов § 3 с добавлениями)

1. Рассказать о понятии устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову: определение для систем I порядка и следствие для высшего порядка. Связь с понятием непрерывной зависимости от начальных данных. [подробно пояснить, в т. ч. независимость от выбора t_0; физический смысл]

2. Решить задачи на определение устойчивости:

   (a) Филиппов 881а).

   (b) Филиппов 882–884, при этом указать тип ОТ и отметить строгость понятия «устойчивость» в названии ОТ.

   (c) Годунов 141.

3. [*на дом*] Задачи на определение устойчивости:

   (a) Филиппов 881г).

(b) Филиппов 889.

(c) Годунов 140.

(d) Филиппов 890,891.

(e) Филиппов 886. Заметить, что задача по сути решена в теме «Автономные системы ...» (Филиппов 1035) — вспомнить и использовать. Найти I интеграл системы $I(x, y)$ и сформулировать устойчивость с его помощью.

(f) Филиппов 887. Какой здесь тип ОТ $(0, 0)$?

4. Рассмотрим вопрос об устойчивости решений линейных ОДУ. Начнем с систем I порядка.

   (a) Доказать, что
   [ФМР системы $y' = A(t)y$ ограничена на $\mathbb{R}^+$] $\iff$
   [все решения системы $y' = A(t)y$ ограничены на $\mathbb{R}^+$].

   (b) [некоторое решение z системы $y' = A(t)y + f(t)$ устойчиво на $\mathbb{R}^+$] $\Longrightarrow$
   [ФМР системы $y' = A(t)y$ ограничена на $\mathbb{R}^+$]
   (от противного)

   (c) [ФМР системы $y' = A(t)y$ ограничена на $\mathbb{R}^+$] $\Longrightarrow$
   [все решения системы $y' = A(t)y + f(t)$ (с $\forall f$) устойчивы на $\mathbb{R}^+$].

   Вывод. [ФМР однородной системы ограничена] $\iff$ [все решения однородной системы ограничены] $\iff$ [некоторое решение неоднородной системы устойчиво] $\iff$ [все решения неоднородных систем устойчивы].

5. [*на дом можно*] Сформулировать и доказать утверждения, аналогичные п. 4, но для асимптотической устойчивости.

6. [*в аудитории или на дом, в зависимости от наличия времени*] Сформулировать следствия из п. 4 по принципу

$[A \Longleftrightarrow B] \Longleftrightarrow [\neg A \Longleftrightarrow \neg B]$.
Ответ. [ФМР однородной системы неограничена] $\Longleftrightarrow$ [однородная система имеет растущие решения] $\Longleftrightarrow$ [все решения неоднородной системы неустойчивы] $\Longleftrightarrow$ [некоторое решение неоднородной системы неустойчиво].

7. [*в аудитории или на дом, в зависимости от наличия времени*] Сформулировать аналоги пп. 4–6 для линейных уравнений высокого порядка $P(t, d/dt)y = f(t)$.

8. [*на дом*] [возможно, останется время, тогда начать в ауд.] Филиппов 893,898.

$\boxed{\text{занятие 1}}$
$\boxed{\text{занятие 2}}$

9. Итак, для линейных уравнений вопрос об устойчивости (и асимптотической устойчивости) сводится к ограниченности (и стремлению к 0) ФМР однородной системы (т. е. всех ее решений). Здесь можно выделить следующие случаи [рассмотрим системы I порядка $y' = A(t)y$, тогда уравнения высокого порядка очевидно получаются]:

   I. A переменная. Общее исследование затруднительно, но можно выделить 2 характерных крайних случая (ясно, что имеет значение лишь поведение A при $t \to +\infty$):

      а) $A(t)$ осциллирует *периодически*;

      б) $A(t) \to A_0 = \text{const}$ при $t \to +\infty$.

   II. $A = \text{const}$.

   Мы последовательно рассмотрим эти случаи: Iб) сводится к II, а Iа и II легко рассматриваются на основе пп. 4–6.

10. Итак, рассмотрим случай Iа): $y' = A(t)y$, $A(t+T) = A(t)$. В качестве частичной аналогии со случаем $A = \text{const}$

$\left[\begin{array}{l}\text{когда для нормированной ФМР } (Y(t)=e^{tA}) \text{ было вер-}\\ \text{но } Y(t+s)=Y(t)Y(s),\ \forall t,s \text{ — сказать смысл этого}\\ \text{в терминах з.Коши}\end{array}\right]$

здесь частично сохраняется это полугрупповое свойство: $Y(t+T)=Y(t)Y(T)$, $\forall t$ $(s=T)$, если
$\underline{Y(0)=E \text{ (т. е. ФМР нормированная).}}$

Упражнение. [*на дом*] доказать оба факта (т. е. для A постоянной и периодической). **Указание:** получить для обеих частей равенства одну и ту же з.Коши.
Поэтому $Y(t+nT)=Y(t)Y^n(T)$, $\forall t\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$, и в частности $\forall t\in\mathbb{R}^+$ имеем $Y(t)=Y(t-nT)Y^n(T)$, где $n=[t/T]$.
Отсюда ясен критерий устойчивости (в котором ключевую роль играет *матрица монодромии* $Y(T)$):
[норма $Y^n(T)$ не растет с ростом n] $\overset{(*)}{\Longleftrightarrow}$
[$|\lambda_j(Y(T))|\leqslant 1$, причем для $|\lambda_j|=1$ клетки одномерные].
Упражнение [*на дом*] доказать $(*)$.

11. Решить Филиппов 960 — найти $Y(2)$, а доделку (исследование собственных чисел) лучше [*на дом*] .
Указания. а) Для исследования dim клеток см. ранг.
б) случай $D\neq 0$ удобно делать по т. Виета.

12. [*на дом*] Филиппов 959.

13. Перейдем к случаю Iб) из п. 9. Сначала рассмотрим вспомогательный вопрос о дифференциальных и интегральных неравенствах. Напомним (из темы «линейные уравнения. . . »):
Лемма. $[z'\leqslant\gamma(t)z+f(t);\ z(0)=\alpha]\Longrightarrow$
$\Big[z\leqslant$(реш-е соотв. з.Коши для уравнения)=
$$=\int\limits_0^t f(s)\exp\Big(\int\limits_s^t\gamma(\xi)d\xi\Big)ds+\alpha\exp\Big(\int\limits_0^t\gamma(\xi)d\xi\Big)\Big]$$

Упражнение. Вспомнить это (или заново доказать — тогда [*на дом*]).
Также напомним, что

$$\Big[z' = \gamma(t)z + f(t); \quad z(0) = \alpha\Big] \Longleftrightarrow$$
$$\Big[z(t) = \alpha + \int\limits_0^t \Big(\gamma(s)z(s) + f(s)\Big)ds\Big]. \tag{1}$$

И заметим, что

$$\Big[z' \leqslant \gamma(t)z + f(t); \quad z(0) = \alpha\Big] \left[\begin{matrix}\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow\end{matrix}\right]$$
$$\Big[z(t) \leqslant \alpha + \int\limits_0^t \Big(\gamma(s)z(s) + f(s)\Big)ds\Big]. \tag{2}$$

Так что если мы докажем следующее
Утверждение. $\Big[x \in C(\mathbb{R}^+)$ удовлетворяет

$$x(t) \leqslant \alpha + \int\limits_0^t \Big(\beta(s)x(s) + f(s)\Big)ds;\ \beta \geqslant 0\Big] \Longrightarrow$$
$$\Big[x(t) \leqslant \int\limits_0^t f(s)\exp\Big(\int\limits_s^t \beta(\xi)d\xi\Big)ds + \alpha\exp\Big(\int\limits_0^t \beta(\xi)d\xi\Big)\Big]$$

(интегральный аналог Леммы), то Лемма отсюда очевидно следует в силу (2) (хотя с ограничением $\gamma \geqslant 0$).
Упражнение. Проверить, что (Утверждение) $\Longrightarrow$ (Лемма с $\gamma \geqslant 0$).
Но как доказать Утверждение? Из Леммы его вывести напрямую (дифференцированием) нельзя в силу (2).

14. Доказать Утверждение из п. 13, все же выводя его из Леммы, но по следующей схеме:

    (a) Рассмотреть функцию $z(t) = \int\limits_0^t \Big(\beta(s)x(s) + f(s)\Big) ds$ и получить для нее з.Коши для неравенства.

    (b) Применить Лемму и получить требуемую оценку, но с αI_1 вместо αI_2, где
    $$I_1(t) = 1 + \int\limits_0^t \beta(s) \exp\left(\int\limits_s^t \beta(\xi) d\xi\right) ds,$$
    $$I_2(t) = \exp\left(\int\limits_0^t \beta(\xi) d\xi\right).$$

    (c) Доказать, что $I_1 = I_2$, получив для них общую з.Коши.

15. Итак, рассмотрим п. Iб) из п. 9. Пусть $A \in C(\mathbb{R}^+)$, $A(t) \to A_0 = \mathrm{const}$ достаточно быстро, а именно $\int\limits_0^{+\infty} \varphi(s) ds = B < +\infty$, где $\varphi(s) = |A(s) - A_0|$ (норма операторная). Доказать, что из устойчивости решений системы $y' = A_0 y$ следует устойчивость для $y' = A(t)y$.
    Указания.

    (a) использовать критерий устойчивости решений линейных систем из п. 4 (т. е. $|e^{tA_0}| \leqslant M = \mathrm{const} < +\infty$).

    (b) представить решение системы $y' = A(t)y$ в виде $y' = A_0 y + (A(t) - A_0)y$, выписать решение, рассматривая $(A(t) - A_0)y$ как правую часть.

    (c) получить оценку для $z = |y|$ в виде интегрального неравенства и применить Утверждение из п. 13. Получится $|y(t)| \leqslant M|y(0)|e^{MB}$.

16. [*на дом*] Доказать устойчивость решений уравнения $y'' + \dfrac{t^4}{1+t^4} y = 0$.
Указание. Использовать п. 15.

занятие 2
. . . .
занятие 3

[Это занятие вести свободно, времени хватает. Если останется много времени, то подольше задержаться на п. 31. Но и не затягивать, чтобы не скомкать пп. 30–32, хотя если группа слабая, то это и не страшно.]

17. Теперь рассмотрим п. II из п. 9. Для систем $y' = Ay + f(t)$ устойчивость (или асимптотическая устойчивость) всех решений сводится [как выяснено в пп. 4–6] к ограниченности (или стремлению к 0) матрицы e^{tA}, или, что то же, e^{tJ}. Но тогда очевидно описание устойчивости:

   (a) $\exists \lambda_j$: $\mathrm{Re}\lambda_j(A) > 0 \Longrightarrow$ неустойчивость.
   (b) все $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0 \Longrightarrow$ асимптотическая устойчивость.
   (c) [все $\mathrm{Re}\lambda_j(A) \leqslant 0$; если $\mathrm{Re}\lambda_j(A) = 0$, то (dim клетки)$= 1$] $\Longrightarrow$ устойчивость.
   [соответственно, если мнимые корни с многомерными клетками, то получаем (степенную, полиномиальную) неустойчивость]

[решать задачи на этот пункт специально не имеет смысла, т. к. это алгебраическая задача, и к тому же далее мы будем это делать в связи с устойчивостью по I приближению]

Аналогично, для уравнений высокого порядка (в силу п. 7) вопрос сводится к анализу корней полинома. Обычно находят только области асимптотической устойчивости (где все $\mathrm{Re}\lambda_j(P) < 0$). Для этого имеются специальные критерии:

18. [*на дом*]

    (a) Прочитать **Филиппов** п. 4 введения к § 15.
    (b) Решить **Филиппов** 947,948,955 (использовать лучше условия Льенара—Шипара).
    (c) **Годунов** 162.
    (d) **Годунов** 147,148. Рассмотреть $\dfrac{d}{dt}|y|^2$. Связать ответ с поведением $\lambda_j(A)$ (т. е. решить 2 способами).

19. Итак, из пп. 4–18 видно, что для исследования линейных систем (в плане устойчивости) есть достаточно развитая теория (и совсем полная для автономного случая, т. е. $A = \text{const}$). Соответственно, осталось рассмотреть нелинейные системы: автономные и неавтономные. Для последних теория сложнее, и мы ее опускаем. Для первых можно выделить 2 основных способа:

    (a) сведение к линейным (устойчивость по 1-му (линейному) приближению);
    (b) «нелинейные методы» — функции Ляпунова — применяется если не работает п. (a) либо имеются другие аргументы.

    Начнем со способа (a).
    Теорема. Пусть $\varphi(y)/|y| \to 0$ при $y \to 0$. Тогда:
    нулевое решение системы $y' = Ay$
    $$\left[\begin{array}{c}\text{асимп. устойчиво}\\ \text{эксп. неустойчиво}\\ \text{устойчиво, но не асимп., или степ. неуст.}\end{array}\right] \Longrightarrow$$
    нулевое решение системы $y' = Ay + \varphi(y)$ $\left[\begin{array}{c}\text{асимп. уст.}\\ \text{неустойчиво}\\ \text{что угодно}\end{array}\right]$.
    Отметить аналог с исследованием типа ОТ автономных систем на плоскости по 1-му приближению, понятие устойчивости там.

20. Филиппов 900 (мгновенно решается, т. к. φ очевидна).

21. Филиппов 903. Подчеркнуть понятие «линеаризация на нулевом решении», отметить «2 способа»: через матрицу Якоби в 0 и через применение известных разложений элементарных функций в ряды. Лучше решать «вторым способом».

22. [*на дом*] Филиппов 912.

23. Если требуется исследовать устойчивость ненулевого решения z системы для величины y, то надо линеаризовать на нем. Проще всего это сделать заменой $y = z + \alpha$, где для α получится уже́ вопрос об устойчивости нулевого решения.

24. Филиппов 913.

25. [*на дом*] Филиппов 914.
Замечание. Формально здесь теорема из п. 19 не работает, т. к. в получающейся системе $\varphi = \varphi(y, t)$, хотя и $\dfrac{|\varphi(y,t)|}{|y|} \underset{y\to 0}{\overset{t}{\rightrightarrows}} 0$. Но «поверим на слово», что этот случай тоже годится.

26. [*на дом*] Годунов 139,143.

27. На самом деле задачи из пп. 24–26 искусственные, т. к. в них после замены $y = z + \alpha$ (как в п. 23) исходная неавтономная система превращается в автономную (и легко поддается исследованию 0 решения на устойчивость в силу теоремы из п. 19), в то время как в реальности бывает наоборот — система превращается в неавтономную, даже если была автономной. Единственное исключение — постоянные решения не портят автономность, т. е. 1-е приближение удобно для исследования устойчивости точек покоя (ОТ, положений равновесия) автономных

систем. Получается полная параллель с (дополнение к) исследованием(-ю) типа ОТ автономных систем.

28. **Филиппов** 915.

29. [*на дом*] **Филиппов** 921.

30. Осталось разобрать п. 19(b) — нелинейные методы исследования устойчивости. Они, в частности, нужны для случаев, когда линейное приближение не работает (случай 3 в теореме из п. 19). Рассмотрим пример:
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \gamma x^3 - y \\ x + \gamma y^3 \end{bmatrix}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. [это обобщение **Филиппов** 923]
Теорема из п. 19 ничего не дает, т. к. собственные числа матрицы линейной части чисто мнимые. Однако удается исследовать устойчивость 0 решения, непосредственно изучая поведение модуля вектора (x, y):

    (a) Подсчитать $\dfrac{d}{dt}(x^2 + y^2)$.
    (b) Доказать устойчивость при $\gamma \leqslant 0$.
    (c) Доказать оценку $2(x^4 + y^4) \geqslant (x^2 + y^2)^2$.
    (d) Доказать неустойчивость при $\gamma > 0$ и асимптотическую устойчивость при $\gamma < 0$.

31. Аналогично решить **Филиппов** 924. Отметить, что здесь даже асимптотическая устойчивость, но для этого мы пока не располагаем достаточной теорией (она далее — см. т. Ляпунова). Отметить на будущее как оценивать незнакоопределенные члены через знакоопределенные:
[можно поподробнее это разобрать, особенно если есть время до конца пары]

    (a) неравенство Юнга с ε: $ab \leqslant \dfrac{1}{p}(\varepsilon a)^p + \dfrac{1}{q}\left(\dfrac{b}{\varepsilon}\right)^q$.

(b) меньшие степени — старшие, т. к. $z^\alpha \leqslant z^\beta$ при $\alpha \geqslant \beta$, $z \ll 1$;

значит,

Вывод. Члены типа $Ca^\alpha b^\beta$ (где $a \ll 1$, $b \ll 1$) оцениваются через $(\varepsilon a^\gamma + Nb^\delta)$ при $\dfrac{\alpha}{\gamma} + \dfrac{\beta}{\delta} \geqslant 1$, причем в случае равенства надо потребовать $N^{\beta/\delta}\varepsilon^{\alpha/\gamma} \geqslant C \cdot \left(\dfrac{\beta}{\delta}\right)^{\frac{\beta}{\delta}} \left(\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}}$.

32. [*на дом*] Проверить этот вывод; доказать неравенство Юнга (из выпуклости exp).

занятие 3

занятие 4

33. В общем случае метод из пп. 30–31 требуется в более общем виде — вместо (x^2+y^2) надо брать «более общие расстояния до 0». Рассмотрим Филиппов 885 [отметим что 1-е приближение ничего не дает]. Его можно решить аналогично Филиппов 887 (см. п. 3(f)), но сейчас сделаем так: найдем такую функцию $A(x, y)$, что $A(0) = 0$, $A > 0$ вне 0, т. е. $\mathrm{sgn} A = \mathrm{sgn}(x^2+y^2)$; $\dfrac{d}{dt}A(x, y) = 0$ вдоль решения (т. е. это I интеграл — напомнить это понятие). Начертить интегральные кривые и указать тип ОТ. Сделать вывод об устойчивости.

34. В общем случае такая вспомогательная функция (ф.Ляпунова) не является I интегралом (и ОТ — не центр), но позволяет (уже в виде неравенств) исследовать устойчивость. А именно,

Теоремы Ляпунова. $H \in C^1(B(0, R))$; $\mathrm{sgn} H(y) = \mathrm{sgn}|y|$ [отметим, что $\dfrac{d}{dt}H(y) = f(y)\cdot\nabla H(y)$ для $y' = f(y)$]. Тогда:

(a) $\exists H$: $\dfrac{dH}{dt} \leqslant 0$ в $B(0, R) \Longrightarrow$ устойчивость (0 решения).

(b) $\exists H$: $\dfrac{dH}{dt} < 0$ в $B(0,R)\setminus\{0\} \implies$ асимптотическая устойчивость.

(c) $\exists H$: $\dfrac{dH}{dt} > 0$ в $B(0,R)\setminus\{0\} \implies$ неустойчивость.

Отметим, как задачи из пп. 30,31 выглядят в свете этих теорем (причем в п. 31 даже видна асимптотическая устойчивость теперь). Сразу сформулируем обобщение п. (c) т. Ляпунова:

Теорема Четаева. $H \in C^1(V) \cap C(\overline{V})$; $V \subset B(0,R)$ ($B(0,R)$ — открытый шар!); $0 \in \partial V$; $H > 0$ в V; $H = 0$ на $\partial V \cap B(0,R)$; $\dfrac{d}{dt}H(y) > 0$ в V. Тогда 0 решение неустойчиво.

[т. е. п. (c) т. Ляпунова — это т. Четаева с $V = B(0,R)\setminus\{0\}$]

35. [*на дом*] Годунов 144,145,146.

36. Общего метода поиска ф.Ляпунова (Четаева) не существует, но есть ряд приемов. Изучим их на примере $n=2$. Первый прием: искать H в виде $\alpha(x)+\beta(y)$, подбирая α, β так, что «неудобные» слагаемые в $\dfrac{dH}{dt}$ уничтожаются.

37. Филиппов 925. Обратить внимание на «пренебрежение» высшими степенями.

38. Филиппов 931.

39. [*на дом*] Рассмотрим уравнение физического маятника $y'' + \sin y = 0$. В теме «автономные системы…» мы находили точки покоя ($y = \pi k$, $k \in \mathbb{N}$) этого уравнения и тип ОТ на фазовой плоскости (y, y'): $(2\pi k, 0)$ — центры, $((2k+1)\pi, 0)$ — седла; рисовали фазовый портрет. Теперь мы можем завершить исследование этого уравнения:

(a) исследовать устойчивость ОТ.

(b) указать I интеграл уравнения $H(y, y')$ (он же будет ф.Ляпунова).

(c) с помощью H выписать в квадратурах решение з.Коши при малых t и начальных данных в окрестности нулевой точки покоя.

40. Второй прием поиска H: искать ее в виде суммы первообразных $\sum\limits_{k,j} c_{kj} \int f_k(y)dy_j$ с неопределенными коэффициентами c_{kj} (обобщение квадратичных H для линейных систем — ср. Годунов 146 в п. 35 и Годунов 147,148 в п. 18).
Замечание для преподавателя. Идея этого приема такая: нужно добиться «знакоопределенного базиса» в $\dfrac{dH}{dt}$, через который оценивать остальные члены. А в таком приеме такой базис автоматически образуется в виде $\pm|f|^2$

41. Филиппов 928. Отметить, что член xy^3 лучше не включать (т. к. он не имеет знака), а y^4 взять с 1, т. к. H растягивается.
Замечание. Здесь редкий случай — удалось занулить все «неудобные» члены. Обычно их приходится оценивать (см. п. 31).

42. [*на дом*] Филиппов 927.

43. [*на дом*] Исследовать на устойчивость 0 решение системы $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y^3 + x^5 \\ x^3 + y^5 \end{bmatrix}$.
Указание. Использовать т. Четаева:
Способ I. Исследовать поле направлений и найти «кандидата» для V.
Способ II. Попробовать $H = \alpha(x) + \beta(y)$.

44. Разные задачи на метод ф.Ляпунова:

(a) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y \\ -y - x\sin^2 x \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -xy^4 \\ yx^4 \end{bmatrix}$.

Нарисовать фазовый портрет, указать тип ОТ $(0,0)$.
Замечание для преподавателя. Обе задачи решаются способом $H = \alpha(x) + \beta(y)$, но об этом не объявлять.

45. [*на дом*] Разные задачи на метод ф.Ляпунова (т. е. тт. Ляпунова и Четаева):

    (a) Филиппов 926 (указание: т. Четаева).
    (b) Филиппов 929.
    (c) (∗) Филиппов 930 (указание: $H = \sum \int f_k$).

План занятий по теме 9:

Приемы решения ОДУ в явном виде.III: Автономные нелинейные системы, их I интегралы. Элементы линейных и квазилинейных УЧП I порядка

(Филиппов §§ 19,20 с добавлениями)

[мало разбирать д. з. и в темпе вести занятие 1!]

1. Будем рассматривать системы I порядка $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$, в т. ч. автономные: $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$, и обсуждать методы их интегрирования. Простейший метод — исключение части функций и получение меньшего числа уравнений (в пределе — одного) высшего порядка, которые могут попасть в ранее изученные классы интегрируемых в явном виде, а тогда можно восстановить все исключенные функции.

2. **Филиппов** 1141.
   [в этих $\updownarrow$ 2-х задачах не забывать отдельные решения (не терять их)]
   [И быстро! долго не возиться]

3. **Филиппов** 1142.

4. [*на дом*] **Филиппов** 1144.

5. Отметим, что любая автономная система ОДУ из n уравнений
$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x), \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = f_n(x) \qquad (1)$$
может быть записана в симметричной форме (из $n-1$ соотношения)
$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(x)} [= dt] \qquad (2)$$
или в виде неавтономной системы из $n-1$ уравнения, например, так:
$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{f_1(x)}{f_n(x)}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{f_{n-1}(x)}{f_n(x)}. \qquad (3)$$
[это долго не разжевывать!]
Замечание для преподавателя. Наоборот, любая неавтономная система из $n-1$ уравнений
$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t,x), \ \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dt} = f_{n-1}(t,x) \quad (x = (x_1, \ldots, x_{n-1})),$$
если обозначить $t = x_n$, $f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = 1$, запишется в виде автономной системы из n уравнений
$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x), \quad \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dt} = f_{n-1}(x),$$
$$\frac{dx_n}{dt} = 1 = f_n(x) \quad (x = (x_1, \ldots, x_n)),$$

а значит и в симметричной форме (2). Легко видеть и что можно начать с (2) и получить 2 другие формы.

Таким образом, все 3 формы записи (1)–(3) эквивалентны, только автономность/неавтономность соответствует добавлению/убавлению 1 переменной. Мы знаем, что решения (1) геометрически суть $(n-1)$–параметрическое семейство траекторий (1) в $\mathbb{R}^n = \{x\}$, т. е. семейство интегральных кривых системы (3). Значит, для их нахождения надо найти $n-1$ независимых соотношений. Для этого служит понятие I интеграла (ПИ).

6. Напомнить:

   (a) Что такое ПИ $\Phi(t,x)$ системы $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$; любая функция от ПИ есть ПИ, но это бесполезно, значит, надо выделить набор независимых ПИ; определение независимого набора из k ПИ ($1 \leqslant k \leqslant n$) и его смысл (функциональная независимость).

   (b) существование системы из n независимых ПИ.

7. Найти 2 независимых ПИ системы $\{x' = 2x, y' = 3y\}$ (проверить независимость). Выписать общий вид ПИ $\Phi(x,y,t)$. Найти среди них один ПИ вида $\Psi(x,y)$. Сколько их (независимых)? — доказать что других нет.

   Указание. Получить УЧП для любой $\Psi(x,y)$ и вывести из него функциональную зависимость $\Psi(x,y)$ от найденного ПИ.

   Вывод. ПИ суть произвольные постоянные в формуле решения, выраженные через само решение. На этом и основано доказательство теоремы из п. 6(b).

8. В общем случае автономная система (1) имеет n независимых ПИ $\{\Phi_1(t,x), \ldots, \Phi_n(t,x)\}$, из которых можно образовать ровно $n-1$ независимых ПИ вида
   $\{\Psi_1(x), \ldots, \Psi_{n-1}(x)\}$.

9. [*на дом*] Доказать это.
   Указание. использовать переход (1) $\Longleftrightarrow$ (3).

10. Для неавтономных систем выделение ПИ вида $\{\Psi_1(x), \dots, \Psi_{n-1}(x)\}$ вообще говоря невозможно. Покажем это на примере $\{x' = 2t,\ y' = 1\}$ — доказать, что $\neg\exists$ ПИ вида $\Phi(x, y)$.
    Указание. Найти ПИ $\Phi_{1,2}(t, x, y)$ и вывести УЧП для предполагаемых ПИ $\Phi(x, y)$, придти к $\Phi = \text{const}$ (аналогично п. 7).

11. Научимся определять, является ли заданная функция ПИ заданной системы:

    (a) пусть задана $\Phi(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Доказать, что
    [Φ есть ПИ системы $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$] $\Longleftrightarrow$
    [$\Phi_t(t, x) + f(t, x)\nabla_x \Phi(t, x) \equiv 0$]
    Указание для $\Longrightarrow$. Использовать подходящую з.Коши для заданного ОДУ.
    Вывод. Для ПИ надо $\dfrac{d}{dt}\Phi(t, x) \equiv 0$ как функция от независимых переменных (t, x).

    (b) решить Филиппов 1161.

12. [*на дом*] Филиппов 1162,1163.

13. [*на дом*] Филиппов 1164; проверить что это в самом деле ПИ.

[здесь может показаться, что не успеваем, но на пп. 14,15 много времени не требуется; хотя помнить, что п. 15 надо успеть [почти] весь!]

14. Итак, далее можно рассматривать системы вида (1) или, что то же, (2), и для их решения достаточно найти $n - 1$

независимых ПИ вида $\{\Phi_1(x), \ldots, \Phi_{n-1}(x)\}$. Для их нахождения нет общего метода (т. к. нет «метода решения ОДУ» вообще), но имеются некоторые приемы:

(a) отделение части уравнений, их решение, нахождение части ПИ и их подстановка в виде $c_k = \mathrm{const}$ в другие уравнения.

(b) выделение известных дифференциалов: $d(xy)$, $d(x/y)$ и т. д.

(c) $\left\{\dfrac{a_i}{b_i} = \gamma,\ i = 1, \ldots, n\right\} \Longrightarrow \left\{\forall r_i \text{ очевидно } \dfrac{\sum r_i a_i}{\sum r_i b_i} = \gamma\right\}$. У нас $a_i = dx_i$, $b_i = f_i(x)$.

(d) комбинируя уравнения (2) с помощью, например, приема (c), можно получать соотношения вида $\dfrac{dF}{0} = \ldots \Longrightarrow F = \mathrm{const}$ (ПИ), или, в частности, $\dfrac{dF}{F} = \dfrac{dG}{G} \Longrightarrow \dfrac{F}{G} = \mathrm{const}$ (ПИ).

Замечание. На самом деле все эти приемы сводятся к приему (c) $\Longrightarrow \dfrac{dF}{0} = \ldots \Longrightarrow F = \mathrm{const}$. Но сразу всегда применить прием (c) может оказаться труднообозримым (хотя формально он по сути всегда и применяется), так что лучше начинать с других приемов.

15. Теперь будем находить ПИ с помощью приемов из п. 14:

(a) Филиппов 1146 (прием (a));

(b) Филиппов 1147 (приемы (a),(c));

(c) Филиппов 1153 (приемы (c),(d)).

[возможно, не все успеем — часто остается на дом 1153]

16. [*на дом*] Филиппов 1148,1155,1156.

17. (∗) [*можно начать, а на дом доделать*] [хотя вряд ли успеем начать] Филиппов 1166 — с виду сложно, но надо сразу применить

Указание. Имеет место ∃! решения з.Коши — применить ее и рассмотреть решение з.Коши в окрестности любой точки заданной кривой.

. . . . $\boxed{\text{занятие 1}}$ / $\boxed{\text{занятие 2}}$ . . . .

18. Рассмотрим, как ПИ помогают находить решение (напомнить что такое УЧП вообще, квазилинейные, линейные) УЧП I порядка. Начнем со случая одного линейного однородного УЧП:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \tag{4}$$

(ищется $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$). Рассмотрим вспомогательную систему ОДУ:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x). \tag{5}$$

В п. 11(а) мы доказали, что [$\Phi = \Phi(x)$ есть ПИ (5)] $\Longleftrightarrow$ [Φ удовлетворяет (4)], т. е. решения (4) — это всевозможные ПИ (5). А поскольку (5) имеет $n-1$ независимых ПИ, то общее решение (4) имеет вид
$u(x) = F(\Phi_1(x), \ldots, \Phi_{n-1}(x))$, где $\{\Phi_1(x), \ldots, \Phi_{n-1}(x)\}$ — набор независимых ПИ (5). Система (5) называется *характеристической системой* для (4).

19. Филиппов 1167,1170. (не забывать проверять независимость ПИ!)

20. Чтобы решать неоднородные, в т. ч. квазилинейные, УЧП:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x,u), \tag{6}$$

докажем такое

Утверждение. Пусть функция $v = v(x, u)$ есть решение линейного однородного УЧП

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\frac{\partial v}{\partial x_i} + b(x,u)\frac{\partial v}{\partial u} = 0, \tag{7}$$

причем $\dfrac{\partial v}{\partial u} \neq 0$ [так что можно разрешить уравнение $v(x, u(x)) = 0$ относительно $u(x)$]. Тогда u есть решение (6).

21. Таким образом, надо решить (7), для чего строим $(n+1) - 1 = n$ независимых ПИ характеристической системы для (7):

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x,u); \quad \frac{du}{dt} = b(x,u). \tag{8}$$

$$\left[\text{ пояснить, что } \frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} a_i(x,u) \right]$$

Это будут $\{\Phi_1(x,u), \ldots, \Phi_n(x,u)\}$, и тогда все решения (6) находятся из соотношения $F(\Phi_1(x,u), \ldots, \Phi_n(x,u)) = 0$. Иногда удается разрешить это относительно u и получить явный вид типа $u = F_1(\Psi_1(x), \ldots, \Psi_{n-1}(x))$, где Ψ_k — некие независимые функции.

22. Филиппов 1171,1181.

Замечание. В (4),(5) будет еще ПИ $\Phi_n = u$ и уравнение $\dfrac{du}{0} = \ldots$, так это вписывается в случай (6),(8).

23. Итак, решение уравнения (6) (в частности, (4)) соответствует гиперповерхности $\dim = n$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x,u)\}$ с $(n-1)$ степенями свободы (произвольными функциями). Чтобы выделить единственное решение, надо наложить $n-1$ функциональных условий, например, рассматривая з.Коши — уравнение (6) с данными

Коши:

$$\begin{cases} \text{гиперповерхность проходит через} \\ \text{заданное начальное многообразие } \dim = (n-1) \\ \text{в пространстве } \mathbb{R}^{n+1} = \{(x,u)\}. \end{cases}$$

24. Филиппов 1193,1205. [1193 можно для тренировки решить как квазилинейное]

25. Для интереса порешаем дополнительные задачи, где все пройденное применяется в разных ситуациях (если не успеем — не страшно, можно оставить для самостоятельного изучения):

    (a) Филиппов 1212.

    (b) Филиппов 1217,1218.

    (c) Филиппов 1219 (лучше сразу [*на дом*]).

    (d) Филиппов 1221.

Обзорный годовой план практических занятий

I семестр:

1. Тема 0: «Знакомство с ОДУ» (1 занятие, вводное). Источники: Филиппов § 1.

2. Тема 1: «Приемы решения ОДУ в явном виде.I: уравнения I порядка — УПД — общая конструкция и частные случаи» (4 занятия). Источники: Филиппов § 2–6.

3. Контрольная 1: 3 задачи по теме 1. Источники: Филиппов § 4-6.

4. Тема 2: «Существование, единственность и качественное поведение решений ОДУ» (4 занятия). Источники: Филиппов § 7 и мои добавления.

5. Тема 3: «Приемы решения ОДУ в явном виде.II: не разрешенные относительно производной (I порядка) и понижение порядка» (1 занятие). Источники: Филиппов § 8,10.

6. Тема 4: «Линейные уравнения и системы» (4 занятия). Источники: Филиппов § 11,12,14, Годунов § 1 и мои добавления.

7. Контрольная 2: 2 задачи по теме 4. Источники: мои задачи.

8. Зачет по темам 1,3,4 — долги по контрольным и специальные зачетные задачи. Источники для зачетных задач: Филиппов § 9 (темы 1,3) и мои задачи (тема 4).

II семестр:

1. Тема 6: «Зависимость решений ОДУ от параметров» (1 занятие). Источники: Филиппов § 18.

2. Тема 5: «Краевые задачи для линейных ОДУ» (4 занятия). Источники: Филиппов § 13 (очень мало), Годунов § 2 и мои добавления.

3. Контрольная 3: 2 задачи по теме 5. Источники: мои задачи.

4. Тема 7: «Автономные ОДУ, их особые точки. Фазовое пространство» (2 занятия). Источники: Филиппов § 16,17.

5. Тема 8: «Устойчивость решений ОДУ» (4 занятия). Источники: Филиппов § 15, Годунов § 3 и мои добавления.

6. Тема 9: «Приемы решения ОДУ в явном виде.III: автономные нелинейные системы, их I интегралы. Элементы линейных и квазилинейных УЧП I порядка» (2 занятия). Источники: Филиппов § 19-20 и мои добавления.

Общие замечания:

- В I семестре надо меньше проходить тему 2, особенно если пропадает часть занятий, чтобы больше уделить на тему 4 (в идеале на нее надо 5–6 занятий). Или можно выиграть на том, что в I семестре может оказаться более 16 занятий.

- В теме 6 затронут далеко не весь Филиппов § 18 (см. об этом замечание в плане этой темы). Возможно, следует уделить этой теме 2 занятия, и использовать наиболее интересное из еще не затронутого. Если использовать это, то тема 6 скорее должна называться «Приближенное решение ОДУ; зависимость от параметров», т. к. на самом деле Филиппов § 18 сделан в таком ключе.

- В теме 9 только слегка затронуты УЧП (и только квазилинейные, без упоминания характеристик), основная цель этого — применить I интегралы и захватить

Филиппов § 20. Основная тяжесть УЧП переносится в курс УЧП (уравнения математической физики), где сразу следует начать с квазилинейных УЧП (но как бы с нуля), в основном методом характеристик, а на I интегралы уже ссылаться как на известный материал.

- Темы 5 и 6 переставлены, т. к. (если лекции по приведенной программе[7], то) иначе семинары по краевым задачам опережают лекции, что плохо как для семинаров, так и для лекций.

[7] См. следующий раздел.

Программа теоретического курса

Данный курс изложен в [21–23]. Ниже для удобства приводится его конспект (развернутый план).

Часть I. Базовые понятия теории ОДУ (9.5 лекций)

1. Введение.

   (a) Понятия ДУ, ОДУ, УЧП, их роль в математике и приложениях. Цели курса.

   (b) Порядок ОДУ, сведение произвольной системы к системе I порядка. Разрешение относительно производных.

   (c) Понятие решения ОДУ, геометрическая трактовка (интегральные кривые). Множества определения правой части и решений, базовые требования к правой части и решениям. Множество решений ОДУ, задачи для ОДУ, задача Коши.

   (d) Нормы векторов и матриц.

2. Локальные теоремы существования и единственности.

   (a) Существование решения задачи Коши при базовых предположениях на правую часть — теорема Пеано. Повышение гладкости решений при более регулярной правой части.

   (b) Примеры локальной неединственности. Приближение всех решений ломаными Эйлера. Важность регулярности f по x.

   (c) Понятия модуля непрерывности, условий Гельдера, Липшица, обобщенного условия Гельдера. Связь с дифференцируемостью. Лемма Адамара.

   (d) Теорема единственности Осгуда. «Грань» модулей непрерывности f по x, допустимых для единственности.

(e) Роль условий теоремы Осгуда в общем случае: другие способы обеспечения единственности, необходимость условия Осгуда для одномерных автономных уравнений.

(f) Глобальная единственность как следствие локальной.

(g) Эквивалентная перезапись задачи Коши для ОДУ в виде интегрального уравнения. Метод последовательных приближений Пикара. Теорема Коши—Пикара.

(h) Глобальная теорема существования и единственности для линейных систем (доказательство методом Пикара). Роль метода Пикара и теоремы Коши—Пикара.

(i) Переформулировка всех результатов для систем высшего порядка.

3. Некоторые приемы интегрирования ОДУ I порядка при $n = 1$.

(a) Уравнения с разделяющимися переменными: обоснование формальных операций, симметричная запись, инвариантность уравнения относительно выбора независимой переменной.

(b) Одно линейное ОДУ: метод вариации постоянной и интегрирующий множитель. Структура множества решений.

(c) Уравнения в полных дифференциалах как форма записи любого ОДУ I порядка. Интегрирующий множитель. Трактовка предыдущих случаев как поиск ИМ.

(d) ОДУ, не разрешенные относительно производной.

4. Глобальная разрешимость задачи Коши.

(a) Проблема интервала существования решения. Примеры невозможности продолжения решений.

(b) Понятия продолжения решений и непродолжаемого решения. Построение НР из заданного набора локальных. Случай наличия локальной единственности. Формулировка теоремы Коши—Пикара в терминах НР.

(c) Поведение НР вблизи концов интервала существования: невозможность определения НР в концах интервала, теорема о покидании компакта. Случай цилиндрической области.

(d) Признаки глобального существования НР:

   i. случай УРП (интегральные критерии на правую часть);

   ii. понятие априорной оценки решения и ее роль в доказательстве глобального существования; иллюстрация на примере УРП; неравенство Чаплыгина; другие примеры;

   iii. функции Ляпунова для автономных систем и их роль в доказательстве глобального существования НР.

5. Зависимость решений ОДУ от параметров.

   (a) Проблема ОДУ с параметрами, ее роль в приложениях; приближенное решение ОДУ, пример. Множество определения НР ОДУ с параметрами.

   (b) Лемма Гронуолла.

   (c) Теорема о непрерывной зависимости от параметров в правой части. Классическая и интегральная формулировки. Непрерывная зависимость от начальных данных.

(d) Иллюстрация на прежнем примере (нулевое приближение). Необходимость построения первого приближения, дифференциальная зависимость от параметров. Формальные рассуждения и уравнения в вариациях.

(e) Теорема о дифференциальной зависимости от параметров в правой части (первый порядок). Дифференциальная зависимость от начальных данных. Иллюстрация на прежнем примере.

(f) Дальнейшее дифференцирование решений по параметрам.

Часть II. Линейные ОДУ (14 лекций)

1. Общие свойства нормальной линейной системы I порядка и одного линейного ОДУ высокого порядка.

   (a) Роль линейных ОДУ среди всех ОДУ. Общий вид нормальной линейной системы I порядка. Однородные и неоднородные системы. Множество решений однородной системы как линейное пространство, проблема его размерности.

   (b) Понятие линейной зависимости произвольной системы функций. Связь зависимости на интервале и зависимости в точке. Поведение при изменении интервала. Примеры. Связь с рангом матрицы.

   (c) Случай, когда функции суть решения линейной однородной системы ОДУ. Вронскиан и его роль в исследовании линейной зависимости системы решений. Размерность пространства решений. ФСР и ФМР, общее решение однородной системы. Связь различных ФСР и ФМР, матрицант. Обратная задача: подбор ОДУ под систему решений.

   (d) Теорема Остроградского—Лиувилля.

(e) Неоднородные системы, их решение вариацией постоянных или с помощью ИМ. Поведение матрицы, обратной к ФМР. Структура множества решений неоднородной системы.

(f) Непрерывная зависимость решений линейных систем от коэффициентов и данных Коши. Оценка решения по норме.

(g) Переформулировка всех результатов для одного ОДУ высокого порядка:

   i. Полиномиальный символ дифференциального оператора.

   ii. Сведение к системе I порядка, постановка задачи Коши. Структура множества решений, ФСР.

   iii. Линейная зависимость, матрица Вронского, теорема Остроградского—Лиувилля.

   iv. Проблема поиска частных решений неоднородного уравнения при известной ФСР, вариация постоянных.

   v. Понижение порядка уравнения или системы при известном частном решении.

2. Линейные ОДУ с постоянными коэффициентами.

   (a) Система I порядка с постоянной матрицей: матричная экспонента как результат применения метода Пикара или как обобщение одномерного случая. Обоснование формулы для решений однородной системы, гладкость решений.

   (b) Понятие функции от матрицы. Вычисление аналитической функции от матрицы как ряда и его эквивалентная перезапись с помощью жордановой формы или полинома Лагранжа—Сильвестера. Поведение собственных чисел и инвариантных подпространств жордановых клеток при применении функции к матрице.

(c) Вычисление матричной экспоненты:

  i. По определению (примеры).

  ii. Через форму Жордана. Структура элементов. Случай комплексных собственных чисел.

  iii. Как полином: Лагранжа—Сильвестера или специальный с коэффициентами ψ_k. Функции ψ как решение специальной задачи Коши для ОДУ, их непрерывная зависимость от спектра матрицы.

(d) Свойства матричной экспоненты:

  i. Перемножение экспонент от разных матриц. Обращение экспоненты, формула общего решения неоднородной системы.

  ii. Оценка нормы, поведение при больших t, оценка Гельфанда—Шилова.

(e) Линейное ОДУ высокого порядка с постоянными коэффициентами. Символ оператора как полином и его разложение на множители. Алгоритм построения ФСР как объединения ФСР уравнений низшего порядка, явный вид ФСР.

(f) Функции ψ как ФСР ОДУ высокого порядка. Явное построение решения неоднородного ОДУ с их помощью.

(g) Решение ОДУ высокого порядка со «специальной» правой частью (подобной структуре ФСР).

(h) Уравнение Эйлера.

(i) Сведение системы I порядка к уравнению для каждой компоненты решения.

3. Краевые задачи на отрезке.

(a) Понятие краевой задачи, их роль. Постановка краевых задач для линейных систем I порядка на конечном интервале. Требования на решение, трактовка граничных условий.

(b) Критерий безусловной разрешимости в терминах ФМР, его достаточность для единственности и непрерывной зависимости. Эквивалентная формулировка в терминах множества решений однородной задачи. Условия разрешимости при нарушении критерия. Аналогия с линейной алгеброй.

(c) Перезапись решения с помощью матрицы Грина, ее явный вид. Эквивалентное определение матрицы Грина в «собственных» терминах, ее существование и единственность. Матрица Грина как ядро интегрального оператора.

(d) Переформулировка всех результатов для ОДУ высокого порядка. Трактовка граничных условий. Функция Грина как элемент матрицы Грина соответствующей системы и ее эквивалентное нахождение в «собственных» терминах. Случай уравнения с нетривиальным коэффициентом при старшей производной.

(e) Частный случай уравнения второго порядка. Самосопряженная форма записи уравнения, ее смысл (переброска дифференциального оператора в скалярном произведении). Условие корректности краевой задачи в данном случае. Явный вид условий разрешимости при нарушении этого условия, размерность пространства решений однородной задачи. Алгоритм построения функции Грина. Конструкция решения при неоднородных данных.

4. Задача Штурма—Лиувилля.

(a) Краевая задача для уравнения второго порядка с параметром, ее смысл как задачи о собственных значениях и собственных функциях.

(b) Элементарные свойства СЗ и СФ:

   i. однократность СЗ;

   ii. ортогональность СФ;

   iii. вещественность СЗ и СФ;

   iv. структура множества решений краевой задачи в общем случае.

(c) Переход к более общему уравнению. Лемма Штурма о нулях. Перемежение нулей.

(d) Преобразование Прюфера, его преимущества. Перезапись краевых условий. Сохранение неравенства для угловой переменной θ.

(e) Переформулировка задачи о СЗ и СФ в терминах задачи о поведении величины $\theta(b, l)$. Ее свойства при $\lambda \to \pm\infty$.

(f) Теорема о колебании.

(g) Доказательство основной теоремы о счетной системе СЗ и СФ и о нулях СФ.

5. Краевые задачи на бесконечных интервалах для линейных ОДУ с постоянными коэффициентами.

   (a) Краевые задачи на бесконечных интервалах и их специфика. Условия на бесконечности. Постановка задачи для системы I порядка на всей прямой.

   (b) Критерий безусловной разрешимости задачи в терминах спектра матрицы. Оценка на решение при выполнении критерия.

   (c) Перезапись решения с помощью матрицы Грина, ее явный вид. Эквивалентное определение матрицы

Грина в «собственных» терминах, ее существование и единственность. Связь с общим случаем переменных коэффициентов (матрица Грина общего вида).

(d) Задача на полупрямой для системы I порядка. Сведение к случаю однородного уравнения. Сведение задачи к алгебраической. Условие Лопатинского как критерий безусловной разрешимости задачи. Поведение решений при выполнении или нарушении этого условия. Крайние случаи: весь спектр матрицы в левой или правой полуплоскости.

(e) Теория краевых задач на прямой или полупрямой для уравнений высокого порядка как следствие этой теории для систем I порядка. Необходимость переформулировки некоторых результатов в «собственных» терминах. Обоснование такой переформулировки для:

   i. краевого условия на бесконечности;
   ii. понятия функции Грина;
   iii. условия Лопатинского — сведение задачи к новой с краевыми операторами низшего порядка, новый вид условия Лопатинского.

6. Линейные ОДУ с периодическими коэффициентами.

   (a) Проблема поиска ω-периодических решений (ОПР) ОДУ, примеры. Постановка задачи для систем I порядка. Случай однородной системы: проблема нетривиальных ОПР.

   (b) Свойства ФМР, матрицы монодромии (ММ), их подобие, каноническое представление через матрицант, мультипликаторы. Случай постоянных коэффициентов, логарифм матриц.

   (c) Перезапись свойства ФМР в форме Флоке, характеристические показатели (ХП). Случай постоянных коэффициентов. Тривиальные свойства ХП, выбор специальных представлений типа Флоке с помощью подобия.

(d) Нормальные решения. Структура всех решений однородной системы в случае одномерных и многомерных жордановых клеток ММ.

(e) ОПР однородной системы как комбинации специальных (нормальных) решений, их общий вид. Решения с другими периодами.

(f) ОПР неоднородной системы. Эквивалентная формулировка в виде краевой задачи. Критерий однозначного нахождения ОПР. Структура всех ОПР в общем случае, условие на правую часть при нарушении условия корректности. Аналогия с линейной алгеброй. Представление через матрицу Грина краевой задачи.

(g) ОПР для уравнения высокого порядка, перенос всех понятий и фактов с систем. Пример уравнения второго порядка: структура множества решений, частный случай нулевого среднего для коэффициента при первой производной.

Часть III. Дальнейшая теория нелинейных ОДУ; УЧП I порядка (10.5 лекций)

1. Автономные ОДУ.

   (a) Фазовое пространство и траектории произвольной системы I порядка, их прикладной смысл. Неоднозначность проведения траекторий в общем случае, особая роль автономных систем. Понятие особой точки (ОТ).

   (b) Общие свойства автономных систем:

i. поведение решений при сдвиге независимой переменной; перезапись в виде группового свойства;

ii. однозначность проведения траектории через заданную точку фазового пространства;

iii. понятие фазового портрета системы, его элементы; преимущества и недостатки фазового портрета по сравнению с представлением с помощью интегральных кривых;

iv. понятие гладкой кривой, самопересечений, циклов; 3 вида траекторий;

v. поведение траекторий при асимптотическом приближении к точке.

(c) Случай $n = 1$.

(d) Проблема фазовых портретов многомерных систем, их топология; сложность случаев $n = 3$ и выше, переход к $n = 2$.

(e) Алгоритм построения фазовых портретов на основе локальных портретов в окрестностях ОТ. Принцип линеаризации.

(f) Классификация ОТ для линейной системы на плоскости с постоянными коэффициентами. Понятия вырожденных и невырожденных случаев, собственных прямых.

(g) Формулировка принципа линеаризации и типов ОТ для нелинейных систем в невырожденных случаях (без доказательств). Дополнительные соображения в случае центра.

(h) Автономные уравнения высокого порядка, их фазовое пространство и специфика по сравнению с общими системами.

2. Устойчивость по Ляпунову: базовые сведения.

(a) Проблема непрерывной зависимости решений системы I порядка от начальных данных при бесконечных временах и ее прикладное значение. Примеры.

(b) Понятия устойчивости и асимптотической устойчивости (АУ) по Ляпунову. Независимость от выбора начального момента, формулировка для решений системы без фиксации данных Коши. Существенность наличия требования устойчивости в определении АУ. Формулировка в терминах возмущений, задача для возмущений.

(c) Случай линейных систем: универсальный вид задачи для возмущений, эквивалентность устойчивости (АУ) всех решений соответствующим свойствам ФМР однородной системы. Исчерпывающие признаки в частных случаях:

    i. постоянная матрица;

    ii. периодическая матрица — в терминах мультипликаторов или ХП;

    iii. матрица, стабилизирующаяся на бесконечности; существенность скорости сходимости в случае отсутствия АУ для предельной системы.

(d) Переформулировка всех результатов для уравнений высокого порядка, их специфика, проблема корней полинома в левой полуплоскости.

(e) Примеры:

    i. ОДУ второго порядка с периодическими коэффициентами, структура решений, связь устойчивости с проблемой ОПР;

    ii. неустойчивое уравнение со стабилизирующимися переменными коэффициентами, для которого предельное уравнение устойчиво (медленная сходимость);

iii. неустойчивое уравнение с переменными коэффициентами, для которого все уравнения с «замороженными» коэффициентами устойчивы.

(f) Трудности с применением спектральных критериев, необходимость альтернативных подходов. Связь с нелинейными задачами, переход к автономным системам.

3. Устойчивость точек покоя автономных систем.

   (a) Особая роль ОТ в проблеме устойчивости, сведение к нулевой точке покоя.

   (b) Теоремы Ляпунова об устойчивости и АУ.

   (c) Теорема Четаева о неустойчивости и теорема Ляпунова как ее следствие.

   (d) Понятия вполне неустойчивости и условной устойчивости. Полное описание для постоянных матриц.

   (e) Проблема построения функций Ляпунова (ФЛ) или Четаева. Эквивалентность АУ существованию ФЛ. Квадратичные ФЛ для линейных систем: сведение к матричному уравнению Ляпунова (МУЛ).

   (f) Свойства МУЛ:

      i. связь разрешимости МУЛ со свойствами спектра матрицы и устойчивостью решений ОДУ;

      ii. явное решение МУЛ.

   (g) Теоремы об устойчивости и неустойчивости по первому приближению. Условная устойчивость нелинейной системы. Существенность требований на спектр: примеры систем со спектром на мнимой оси. Связь с проблемой классификации ОТ нелинейных систем.

4. Первые интегралы (ПИ) ОДУ; квазилинейные УЧП I порядка.

(a) Понятие ПИ системы I порядка, его критерий в виде УЧП.

(b) Роль ПИ в получении информации о решениях ОДУ, их получение друг из друга; нетривиальные ПИ. Понятие функциональной зависимости.

(c) Теорема о числе независимых ПИ и их локальном построении.

(d) Эквивалентность неавтономной, автономной и симметричной форм записи любой системы, роль ОТ. Проблема поиска ПИ для автономной системы, не зависящих от t. Контрпример для неавтономной системы.

(e) Понижение порядка системы при наличии одного или нескольких ПИ.

(f) Применение ПИ ОДУ для решения соответствующих линейных однородных УЧП I порядка. ОТ ОДУ как точки вырождения УЧП. Постановка задачи Коши для УЧП I порядка.

(g) Переход к произвольному линейному УЧП I порядка. Характеристики и сведение задачи к ОДУ вдоль них. Теорема о локальной однозначной разрешимости задачи Коши в окрестности любой точки начального многообразия. Построение решения в окрестности всего многообразия.

(h) Примеры:

    i. неединственность в случае произвольной окрестности многообразия;

    ii. существенность условия некасания;

    iii. отсутствие глобальной разрешимости.

(i) Квазилинейные УЧП I порядка, их характеристики, связь с прежним определением. Интегральная гиперповерхность (ИГ), постановка задачи Коши и ее геометрический смысл. ИГ как многообразие, состоящее из отрезков характеристик.

(j) Теорема об однозначной разрешимости задачи Коши для квазилинейного УЧП I порядка в окрестности любой точки начального многообразия. Построение решения в окрестности всего многообразия.

(k) Проблема глобальной разрешимости задачи Коши: выделение ИГ из полной поверхности, состоящей из характеристик. Единственность глобального решения с правильно заданной областью определения.

(l) Построение общего решения и решения задачи Коши для квазилинейного УЧП I порядка при помощи вспомогательного линейного уравнения и соответствующих ПИ.

Список литературы

Обязательная литература,
на которой в основном построен теоретический курс

1. *Бибиков Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Высшая школа, 1991.

2. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1982.

Обязательная литература,
содержащая небольшие фрагменты теоретического курса

3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.

4. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ, 1962.

Дополнительная литература

5. *Годунов С. К.* Квадратичные функции Ляпунова. — Новосибирск: НГУ, 1982.

6. *Годунов С. К.* Матричная экспонента, матрица Грина и условие Лопатинского. — Новосибирск: НГУ, 1983.

7. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: учеб. пособие. — Новосибирск: НГУ, 1994. — Т. 1: Краевые задачи.

8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во МГУ, 2002.

9. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1959.

Дополнительная литература для углубленного изучения

10. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.; Ижевск: РХД, 2000.

11. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967.

12. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976.

13. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969.

14. *Блохин А. М.* Равномерная ограниченность матричной экспоненты: метод. указания к курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения». — Новосибирск: НГУ, 1986.

15. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967.

16. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949.

17. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.

18. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964.

19. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: УРСС, 2002.

20. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986.

Изданный текст лекций по приведенной программе[8]

21. *Мамонтов А. Е.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2010. — Ч. 1: Элементы общей теории.

22. *Мамонтов А. Е.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2011. — Ч. 2: Линейные уравнения.

23. *Мамонтов А. Е.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2012. — Ч. 3: Дополнительные вопросы общей теории.

Изданный текст лекций по другой программе[9]

24. *Мамонтов А. Е.* Обыкновенные дифференциальные уравнения для студентов-нематематиков. Семестровый курс лекций. Ч. 1. — Новосибирск: Изд. Института математики, 2015.

25. *Мамонтов А. Е.* Обыкновенные дифференциальные уравнения для студентов-нематематиков. Семестровый курс лекций. Ч. 2. — Новосибирск: Изд. Института математики, 2015.

[8] См. стр. 86–100.

[9] Программа приведена в [26].

26. *Мамонтов А. Е.* Обыкновенные дифференциальные и разностные уравнения для студентов-нематематиков. Семестровый курс лекций. Ч. 3. — Новосибирск: Изд. Института математики, 2015.

Задачники

27. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / под ред. С. К. Годунова. — Новосибирск: НГУ, 1986.

28. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.; Ижевск: РХД, 2000.

Список аббревиатур

АО	—	априорная оценка
АУ	—	асимптотическая устойчивость
ДУ	—	дифференциальное уравнение
ИГ	—	интегральная гиперповерхность
ИМ	—	интегрирующий множитель
ММ	—	матрица монодромии
МУЛ	—	матричное уравнение Ляпунова
НР	—	непродолжаемое решение
ОДУ	—	обыкновенное дифференциальное уравнение
ОПР	—	ω-периодическое решение
ОР	—	особое решение
ОТ	—	особая точка
ПВ	—	присоединенный вектор
ПИ	—	первый интеграл
СВ	—	собственный вектор
СЗ	—	собственное значение
СК	—	система координат
СФ	—	собственная функция
ТПК	—	теорема о покидании компакта
УПД	—	уравнение в полных дифференциалах
УРП	—	уравнение с разделяющимися переменными
УЧП	—	уравнение в частных производных
ФЛ	—	функция Ляпунова
ФМР	—	фундаментальная матрица решений
ФСР	—	фундаментальная система решений
ХП	—	характеристический показатель

Оглавление

Практикум по обыкновенным дифференциальным уравнениям

Мамонтов Александр Евгеньевич

Подписано в печать 24.06.2016. Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 6.35. Уч.-изд. л. 6.35.
Тираж 50 экз. Заказ № 48.

Лицензия ЛР № 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.