А.Е.Мамонтов

Обыкновенные дифференциальные уравнения

для студентов-нематематиков

СЕМЕСТРОВЫЙ КУРС ЛЕКЦИЙ

Часть 1

Новосибирск 2015

А.Е.Мамонтов

Обыкновенные дифференциальные уравнения

для студентов-нематематиков

СЕМЕСТРОВЫЙ КУРС ЛЕКЦИЙ

Часть 1

Новосибирск
Издательство Института математики
2015

УДК 517.91
ББК В161.61
М226

Мамонтов А. Е.

Обыкновенные дифференциальные уравнения для студентов-нематематиков. Семестровый курс лекций. Часть 1 / А. Е. Мамонтов. — Новосибирск: Издательство Института математики, 2015. — 80 с.

ISBN 978–5–91907–025–2

Первый раздел курса лекций, прочитанных автором студентам экономического факультета Новосибирского государственного университета в осеннем семестре 2013/14 учебного года. Включает в себя обзор общих постановок задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, теорем о существовании, единственности и продолжимости решений, приемов решения уравнений в квадратурах, а также элементы теории линейных уравнений с произвольными коэффициентами.

Для студентов нематематических специальностей с углубленным изучением математики.

УДК 517.91
ББК В161.61
М226

ISBN 978–5–91907–025–2 © Мамонтов А. Е. 2015

Предисловие

Предлагаемые пособия представляют собой запись лекций по курсу Дифференциальных уравнений (ДУ), прочитанных автором студентам 2-го курса экономического факультета (ЭФ) Новосибирского государственного университета (НГУ) в осеннем семестре 2013 года, а затем, с небольшими коррективами, в 2015 году. Точнее, собственно лекции соответствуют параграфам 1–9, а материал Приложений 1–2 лишь упоминался с целью самостоятельного ознакомления заинтересованных студентов в дополнительное время.

Автор имеет предшествующий опыт прочтения годового курса Обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) студентам 2-го курса механико-математического факультета (ММФ) НГУ, а также его продолжения — годового курса Уравнений математической физики (на 3-м курсе того же факультета). Эти лекции были оформлены в виде учебных пособий[1] [2]–[4] и [14]–[16] соответственно. По сравнению с курсом ОДУ на ММФ, курс ДУ на ЭФ имеет ряд особенностей:

1. Это не годовой, а семестровый курс, что вынуждает значительно «ужимать» изложение тех вопросов, которые являются общими для обоих факультетов.

2. Экономистам нет нужды вдаваться во все тонкости математической теории ОДУ.

3. Однако, необходимо дать элементарные понятия о математически строгом рассуждении, для чего хотя бы некоторые базовые теоремы «первого ряда» необходимо доказать полностью.

4. «Второй ряд» теорем, на полноценное доказательство которых уже не достает времени, желательно прокомментировать на предмет основных идей доказательства, чтобы

[1] Здесь и далее библиографические ссылки относятся к списку литературы, приведенному в конце пособия.

не превращать курс в набор пустых деклараций. И лишь «третий ряд» утверждений приводится без доказательств — это касается, как правило, теорем, важных для математически отточенных формулировок теории. Однако даже для этих теорем формулировки приводятся, как правило, строгие.

5. Некоторые обширные темы, составляющие значительные разделы математической теории ОДУ (например, краевые задачи), здесь совершенно не нужны, если судить по основным направлениям современной математической экономики.

6. В то же время, экономистам крайне необходимы некоторые разделы теории, которые не изучаются (в основном курсе ОДУ) даже на ММФ. Это касается прежде всего следующих разделов, которые, в некотором роде, являются основной целью всего курса (а все остальное служит лишь базой):

    (a) Автономные системы ОДУ с параметрами.

    (b) Элементы разностных уравнений.

Автор попытался учесть все перечисленные особенности. Что касается автономных систем, на описанном уровне строгости нет места полноценному изложению соответствующей теории, поэтому в качестве способа знакомства с предметом выбран подробный разбор одной конкретной системы, возникающей в модели «хищник—жертва».

В результате текст, с одной стороны, в основном представляет собой сжатое и облегченное (и во многом переосмысленное) изложение материала «для математиков» (развернутая версия которого со всеми доказательствами может быть найдена в [2]–[4]), но с другой стороны, содержит и некоторый принципиально новый материал.

В качестве технической ремарки отметим, что публикуемый текст, конечно же, не является точным воспроизведением речи лектора. Зачастую одна фраза текста требовала некоторого времени устных комментариев. И наоборот, некоторые подробности (особенно философского характера) могли вовсе не произноситься, а оставаться в «арсенале» лектора на тот случай, если соответствующие нюансы заинтересуют аудиторию. Таким образом, данный текст является в значительной степени «шпаргалкой для лектора», а не совсем «конспектом (для) студента» (последнее, однако, не исключается совершенно). С другой стороны, приводимый материал все же является конспектом (планом) лекций, реально прочитанных в аудитории — со всеми вытекающим отсюда преимуществами и недостатками по сравнению с учебниками в классической форме. Впрочем, все сказанное в текущем абзаце касается также и пособий [2]–[4].

Сделаем необходимые пояснения по организации пособия.

В тексте периодически встречаются упражнения. Читателю рекомендуется прорешивать их «по горячим следам», что гарантирует усвоение материала и послужит тестом успешности в этом усвоении.

В квадратных скобках посередине текста

[в виде текста написанного в настоящих скобках]

вынесены замечания, играющие роль комментариев (расширенных или побочных пояснений). Лексически эти фрагменты прерывают основной текст (т. е. для связного чтения их нужно «не замечать»), но все же они нужны в качестве пояснений. Другими словами, эти фрагменты нужно воспринимать так, как будто они вынесены на поля.

В тексте встречаются отдельно рубрицированные «замечания для преподавателя» — они могут быть опущены при чтении обучающимися, но полезны для преподавателя, который будет использовать пособие, например, при чтении лекций; они помогают лучше понять логику курса и указывают направление возможных совершенствований (расширений) курса. Впрочем, освоение этих замечаний обучающимися можно только приветствовать.

Аналогичную роль играют «обоснования для преподавателя», которые в крайне сжатой форме дают доказательство некоторых положений, предлагаемых читателю в качестве упражнений или приводимых без обоснования.

Наиболее употребительные (ключевые) термины используются в виде условных сокращений (аббревиатур), список которых для удобства приведен в конце пособия. Там же приведен список математических обозначений, встречающихся в тексте, но не относящихся к самым употребительным (и/или не понимаемым однозначно в литературе).

Символ $\Box$ означает конец доказательства, формулировки утверждения, замечания и т. п. (там, где это нужно во избежание путаницы).

Нумерация формул ведется отдельно в каждом параграфе. При ссылке на часть формулы используются индексы, например $(2)_3$ означает 3-ю часть формулы (2) (частями формулы считаются фрагменты, разделенные типографски пробелом, а с логических позиций — связкой «и»). В формулах, представляющих линейные уравнения (алгебраические и дифференциальные), т. е. такие, в которых имеет смысл говорить о «правой части» (свободном члене), нижний индекс 0 означает соответствующее однородное уравнение, например: символ $(\mathrm{N})_0$ означает однородное уравнение, соответствующее уравнению (N), а $(\mathrm{N})_{k0}$ — однородное уравнение, соответствующее k-му уравнению в (N).

Данное пособие не может совершенно заменить глубокого изучения предмета, которое требует самостоятельных упражнений и чтения литературы — например, той, список которой приведен в конце пособия. Однако автор попытался изложить основные положения теории в достаточно сжатой форме, пригодной для лекционного курса. В связи с этим следует отметить, что фрагмент лекционного курса, изложенный в данном пособии, рассчитан на 6 лекций.

В качестве продолжения и завершения настоящего пособия планируется издание второй и третьей частей курса.

§ 1. Введение

В данном параграфе мы обсудим общие вопросы, связанные с возникновением, применением ОДУ, общими постановками задач, при этом затрагивая и философские вопросы. Потраченные усилия окупятся в дальнейшем.

ОДУ — это соотношение вида

$$F\biggl(t, x_1(t), \dots, x_n(t), \frac{dx_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt},\\ \text{[возможно, высшие производные]}\biggr) = 0, \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}$ — независимая переменная, $x = (x_1, \dots, x_n)$ — неизвестная(ые) величина(ы), являющаяся(иеся) функцией(ями) от t, вещественно- или комплекснозначная(ые). Соответственно, сколько неизвестных (т. е. n), столько и уравнений, т. е. F — это, вообще говоря, вектор-функция со значениями с $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$). Другими словами, (1) в случае $n = 1$ — это одно ОДУ для одной неизвестной величины $x(t)$, а при $n > 1$ — это система ОДУ (из n скалярных ОДУ) вида

$$F_1\biggl(t, x_1(t), \dots, x_n(t), \frac{dx_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt},\\ \text{[возможно, высшие производные]}\biggr) = 0,$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$F_n\biggl(t, x_1(t), \dots, x_n(t), \frac{dx_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt},\\ \text{[возможно, высшие производные]}\biggr) = 0$$

для n неизвестных величин $x_1(t), \dots, x_n(t)$ или, другими словами, для векторной величины $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Функция

$F = (F_1, \ldots, F_n)$ при этом считается заданной. Допущение комплексных значений искомых величин не является принципиальным, т. к., отделяя вещественные и мнимые части искомых функций и тем самым увеличивая в 2 раза число уравнений и неизвестных, можно свести ситуацию к вещественному случаю. И наоборот, вещественные решения можно «объединять в комплексные».

[Разумеется, все сказанное о связи вещественных и комплексных форм осмысленно, как правило, лишь в рамках конструкции аналитического продолжения, т. е. в случае аналитичности функций F относительно неизвестных величин x]

Однако в некоторых ситуациях пользоваться комплексными функциями бывает удобнее, эти ситуации мы будем оговаривать отдельно. По умолчанию будем далее считать все величины вещественными.

Слово «обыкновенное» в названии ОДУ служит для их отличия от УЧП, в которых неизвестные величины зависят не от одной, а от нескольких независимых переменных, и производные по всем этим переменным входят в уравнения, тем самым превращаясь в частные производные. Несмотря на важность УЧП в приложениях, их изучение не входит в задачи настоящего курса. Это оправдано тем, что в математической экономике УЧП являются определенной экзотикой и на начальном уровне без их применения вполне можно обойтись.

В нашу задачу не входит перечисление задач математической экономики, формулируемых и решаемых с помощью аппарата ОДУ, поскольку эти примеры будут целенаправленно рассматриваться в соответствующих экономических курсах. Целью курса является изучение ОДУ именно как раздела математики, в том числе и прикладной, а для иллюстрации прикладного значения ОДУ мы будем пользоваться примерами из других естественных наук таких как физика или биология. Это будет полезнее для расширения кругозора, и к тому же это несомненно более соответствует исторической логике развития ОДУ и их приложений. Впрочем, никакого сужения общности это не дает, т. к. все приложения ОДУ объединены одной идеей: производная любой величины означает мгновенную скорость ее изменения по отношению к скорости изменения независимой переменной. Чаще всего в приложениях роль независимой переменной играет время (что и породило обозначение t),

[и вообще, далее мы всегда будем называть независимую переменную t временем со всеми терминологическими последствиями]

соответственно $x'(t_0)$ есть мгновенная скорость изменения $x(t)$ в момент времени $t = t_0$ (здесь и далее штрих обозначает производную по независимой переменной t). В самом деле, если выбрать произвольное положительное число α, то

$$\frac{x(t_0+\alpha) - x(t_0)}{\alpha} \tag{2}$$

есть средняя скорость изменения $x(t)$ на промежутке $(t_0, t_0+\alpha)$ (проще всего это понять, взяв в качестве иллюстрации случай, когда $x(t)$ есть путь, пройденный каким-то телом за время t). При стремлении $\alpha \to 0$ величина (2) стремится к $x'(t_0)$ по определению производной, в то время как (2) — средняя скорость на все более сужающемся промежутке времени, и по определению стремится к мгновенной скорости. И наоборот, та идея, что путь есть произведение скорости на время, в случае переменной скорости требует разбиения промежутка на набор все более сужающихся малых промежутков, и в пределе по определению интеграла Римана получаем, что изменение величины x на любом конечном интервале есть интеграл от ее скорости изменения на этом промежутке, и этот факт носит название формулы Ньютона—Лейбница:

$$x(\beta) - x(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x'(t)dt. \tag{3}$$

Конечно, существование производной, интеграла и вообще, обоснование приведенных тезисов в строго математическом смысле требуют определенных усилий, в этом состоит предмет так наз. дифференциального и интегрального исчисления: любые величины рассматриваются в этой науке с позиций того, можно ли их дифференцировать,

> И оказывается (волюнтаристски), что «всегда можно», если должным образом обставить эту процедуру, при необходимости обойдя особенности, расширив понятие производной и т. д., т. е. это есть парадигма, с которой исследователь приступает к изучению явления, твердо намереваясь любой ценой ее применить

т. е. допускают ли они анализ своей взаимной зависимости путем ее разбиения на сколь угодно малые (локальные) шаги, через которые, в свою очередь, можно потом будет снова выразить зависимости в целом (глобальные). При этом на каждом локальном шаге могут возникать (и чаще всего возникают) связи между взаимными скоростями изменения величин и самими этими величинами, т. е. возникают ДУ. Значит, для того чтобы описанный алгоритм (восстановления закона глобальных зависимостей) реализовать, нужно анализировать поведение решений ДУ, или как упрощенно говорят, «решать» их. Такой поход для анализа самых разных задач, возникающих при математическом моделировании (т. е. при выражении изучаемых явлений в измеряемом виде и формулировке соотношений между возникшими величинами), положил во времена Ньютона (при его участии в качестве одной из ключевых фигур) начало той эпохе, к которой принадлежим и мы. Это означает, что именно ДУ и родственные им механизмы будут основным инструментом в большинстве математических моделей (и этот подход захватывает все более широкие области, проникая даже в те, которые еще недавно относились к чисто гуманитарной сфере). Даже если модель выглядит не так, то ДУ присутствуют в ней в скрытом виде (например, статика как частный случай динамики). Математическая экономика — не исключение. В ней изучается изменение различных экономических параметров, как правило, с течением времени, а это, как правило, приводит к ДУ. Статические задачи (описывающие устоявшуюся ситуацию) формально не требуют применения ДУ, но всякое статическое состояние — результат устоявшейся динамики, а потому при углубленном анализе (например, для решения вопроса об устойчивости, а следовательно, реализуемости статического состояния) о скрытом ДУ приходится все-таки вспоминать. Физический пример — равновесие маятника. Таким образом, господство ДУ — следствие эпохи, в которую мы живем (уже́ третий век), и это не в силах изменить кому-либо кроме гениев масштаба, как минимум, Ньютона (и то, при определенных благоприятных обстоятельствах), так что при всех недостатках

[а они есть — например, возникающие тупики такие как феномен хаоса, что иллюстрируется невозможностью долгосрочного прогноза сложных явлений таких как погода или, опять же, экономические ситуации. Это очерчивает границы применимости парадигмы, т. е. за вышеописанный волюнтаризм исследователю приходится расплачиваться]

эту парадигму придется принять и нам.

Сделаем несколько преобразований общей системы ОДУ (1), не сужающих общности, но приводящих ее к стандартному виду, более удобному для построения математической теории. Прежде всего явно выпишем эту систему, указав высшие производные:

$$F\left(t, x, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{\alpha_1}x_1}{dt^{\alpha_1}}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{d^{\alpha_2}x_2}{dt^{\alpha_2}}, \ldots, \frac{d^{\alpha_n}x_n}{dt^{\alpha_n}}\right) = 0, \quad (1)$$

т. е. обозначим через $\alpha_k \geqslant 1$ самый высокий порядок производной от функции x_k, входящий в (1). Тогда говорят, что (1) имеет порядок α_k по функции x_k.

[Здесь мы предполагаем, что система является дифференциальной по отношению ко всем неизвестным, т. к. если порядок по какой-либо неизвестной равен 0, то ее можно исключить функциональными методами.]

Эти (самого высокого порядка) производные $\dfrac{d^{\alpha_k} x_k}{dt^{\alpha_k}}$ называются старшими, а все остальные (включая сами $x_k = \dfrac{d^0 x_k}{dt^0}$) — младшими. Порядком системы (1) называется сумма ее порядков по всем неизвестным.

[Правда, нередко порядком системы называют число уравнений, или самый высокий порядок по отдельным неизвестным (особенно если он одинаков), но такие трактовки этого понятия могут вызвать путаницу, и к тому же они не инвариантны относительно описанных далее тривиальных преобразований системы.]

Исключая часть неизвестных в (1), можно уменьшить число уравнений и неизвестных, но при этом порядок уравнений по оставшимся неизвестным вырастет. Проще всего это пояснить на примере.

Пример. Из системы

$$x' = y, \qquad y' = -x + t$$

можно исключить x и получить одно уравнение: $y'' = -y + t$, решив которое, ужé найти x из первого уравнения системы. □

И наоборот, в любой системе ОДУ можно понизить порядок по отношению к отдельным неизвестным, введя новые неизвестные.

Пример.

$$x''' + y' = 1, \qquad y''x = 2 \tag{4}$$

— это система 3-го порядка по x и 2-го по y. Обозначим: $a = x'$, $b = x''$, $z = y'$. Получим систему:

$$x' = a, \quad y' = z, \quad a' = b, \quad b' + z = 1, \quad z'x = 2 \tag{5}$$

из 5 уравнений для 5 неизвестных, имеющую I порядок по ним всем. □

В обоих примерах общий порядок системы не менялся. Таким образом, порядок системы измеряет степень ее сложности, которая, естественно, не меняется в результате тривиальных преобразований. Оба описанных приема применяются на практике, но при теоретическом исследовании нас прежде всего интересует второй — мы видим, что любое ОДУ (1) можно свести к системе, имеющей первый порядок по всем неизвестным. Кратко результат называют «системой первого порядка» (хотя на самом деле ее порядок равен числу ее уравнений и неизвестных). В общем виде такая система имеет вид

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \tag{6}$$

где $\dim x = \dim F = n$. Будем считать, что в (6) ужé проведено (если было необходимо) отделение вещественных и мнимых частей, так что F и x — вещественнозначные. Наконец, удобно преобразовать (6) к так наз. нормальному виду:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{7}$$

где функция $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ задана, а $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ — искомая. Другими словами, система (6) не разрешена относительно производных, но если их выразить, т. е. решить (6) как функциональное уравнение относительно них (в рамках теоремы о неявной функции), то получится система (7), разрешенная относительно производных. Конечно, нередко бывает, что сказать это проще чем сделать, но возникающие сложности во всяком случае не входят в число проблем теории ДУ, т. к. преодолеваются методами других разделов математического анализа. К тому же в теории ДУ выработаны некоторые приемы решения ОДУ вида (6), о которых мы упомянем позже.

Итак, для построения общей теории ОДУ вполне достаточно ограничиться системами вида (7). В некоторых случаях такое «прокрустово ложе» бывает неудобным в плане методологии, и тогда может быть уместнее не проделывать описанную универсализацию, или даже проводить обратные операции, как в первом Примере. Такие случаи мы будем оговаривать отдельно, а пока ограничимся нормальными системами I порядка (7).

Теперь нам надо определиться, что же собственно мы хотим узнать об уравнениях (1) и их решениях. Сразу нужно расстаться с идеей «решить уравнение, а затем, глядя на формулу решений(я), ответить на все интересующие вопросы». Дело в том, что ОДУ, допускающие решение «в явном виде» (т. е. для которых можно выписать какие-либо представления для решений в терминах, алгоритмизированных к настоящему моменту), составляют исчезающе малую долю среди всех ОДУ. Однако «не выражается в явном виде» не означает «не существует» или даже «не допускает изучения». Это явление отдаленно напоминает ситуацию с вычислением неопределенных интегралов (первообразных), среди которых, как известно, исчезающе малая часть выражается в элементарных функциях, даже если ограничиться элементарными подынтегральными функциями. Строго говоря, если отбросить проблему построения математической теории ОДУ как таковых, то в каждой конкретной прикладной задаче (например, экономической) следует просто отвечать на конкретные вопросы, диктуемые этой задачей, не пытаясь попутно формулировать дополнительные свойства решения. Но такой подход сугубо индивидуален, и в чистом виде доступен только талантливым исследователям. Практически для массового употребления общепринят такой подход — развивать все-таки математическую теорию (т. е. отвечать на всевозможные посильные вопросы, пока, видимо, в отрыве от приложений, хотя и с учетом уже́ возникавших прикладных задач), а затем уже́, в каждой прикладной задаче, ссылаться на эту теорию. Именно так поступим и мы. Умение изучать свойства решений ОДУ, несмотря на (как правило) невозможность «явно и до конца выразить решение», собственно и составляет математическую теорию ДУ, включая ОДУ. Наша задача — очертить контуры математической теории ОДУ, не имея возможности «профессионально» (как математики) вдаваться во все тонкости формулировок и тем более доказательств, но сохраняя целостность общей картины. В этом духе мы будем действовать на протяжении всего курса. Большинство фактов (но не все, чтобы все-таки дать представление о методологии) будут даваться в адаптированной для «прикладников-потребителей» форме, нередко без строгого обоснования.

Итак, необходимо с позиций математики ответить на вопрос: что мы хотим узнать о свойствах ОДУ? Более конкретно:

1. что значит решить ОДУ (1) (чаще всего, мы это будем делать применительно к (7)),

2. как это делать,

3. какие свойства имеют решения, и что это (решения), собственно говоря, такое.

Как уже́ сказано, ответом на вопросы 1 и 2 в любом случае не может служить «выразить решения в виде элементарных функций» или что-либо подобное. Более того, естественнее начать с вопроса 3.

[Правда, так же как с вычислением интегралов, на практических занятиях (в отличие от лекций, т. е. теоретического курса) существенная (и даже бо́льшая) часть времени уделяется именно навыкам «явного нахождения» решений тех ОДУ, которые это все-таки допускают (хотя их доля среди всех ОДУ исчезающе мала).]

Прежде всего, необходимо оговорить множества определения функций, фигурирующих в (7), и их необходимые свойства. Правая часть (7) считается заданной на области $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и непрерывной на ней: $f \in C(B)$. Решением (7) называется функция x, заданная на некотором интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$ (a и b могут быть как числами, так и символами $\pm\infty$) такая, что:

- она сама непрерывна на этом интервале, ее производная существует и непрерывна на этом же интервале (т. е. $x \in C^1(a, b)$);
- при всех $t \in (a, b)$ эта функция может быть подставлена в (7), т. е. $(t, x(t)) \in B$;
- и равенство (7) выполняется тождественно при $t \in (a, b)$.

У (7) и его решений имеется простая геометрическая трактовка. Правая часть f порождает так наз. поле направлений в B — это векторы $(1, f(t, x))$, которые «привязаны» к каждой точке $(t, x) \in B$. Решение может быть изображено своим графиком, т. е. множеством точек $\{\, (t, x(t)) \mid t \in (a, b) \,\}$. Этот график (называемый интегральной кривой) полностью лежит в B, его проекция на ось t совпадает с интервалом (a, b), а касательная в каждой точке направлена вдоль вектора $(1, f(t, x(t)))$, что и объясняет название (поля направлений). Т. е. «найти решение (7)» на геометрическом языке означает «провести (интегральную) кривую вдоль векторов поля направлений». Уже́ из этой идеи ясно, что решение не может быть единственным, т. к. результат будет зависеть от выбора начальной точки, с которой мы можем начать процесс «рисования кривой». Кроме того, даже выбрав одну ИК, мы можем выреза́ть из нее куски, каждый из которых будет другой ИК. Другими словами, сужение любого решения на более узкие интервалы дает другие решения, т. к. любая функция неразрывно связана с множеством своего определения, и следовательно два решения, определенные на разных интервалах, это разные решения, даже если они совпадают на части своих множеств определения. Все сказанное показывает, что даже если мы научимся как-то отвечать на вопрос о существовании решений, вопрос их единственности требует отдельного внимания.

Тем самым мы ответили на часть вопроса 3 — что такое решение (7). Ответом на остальные вопросы является весь оставшийся курс. Забегая вперед и кратко анонсируя этот курс, скажем, что в общем случае под процессом решения (7) мы понимаем доказательство факта существования решения той или иной задачи, и исследование его свойств в той мере, в которой это возможно. Там где задача допускает «явное» (в том или ином смысле) представление решения(й), мы будем это делать. В наш век доступных численных расчетов такой теории вполне достаточно для практического применения ОДУ — любая прикладная задача, сформулированная в виде ОДУ, может быть сначала проанализирована теоретически, и затем, уже́ с опорой на уверенность в существовании решения и располагая предварительными его свойствами,

[тем самым создав «нулевое приближение» для расчетов, т. е. уточнив задачу, что всегда необходимо при вычислениях]

можно приступать к численным расчетам, которые, как правило (при грамотном подходе, с использованием достижений вычислительной математики) дают адекватный ответ на большинство насущных вопросов.

В завершение вводного параграфа нужно дать понятие «задачи для ОДУ». Проще всего придти к нему на каком-нибудь прикладном примере. Рассмотрим нарочито примитивный пример, чтобы не рассеивать внимание на пока ненужных технических деталях.

Пример. Камень бросают вертикально вверх с нулевой высоты. Сопротивление воздуха не учитывается. Требуется описать движение камня, ответив на простейшие вопросы, такие как: максимальная высота полета, его длительность, скорость в момент приземления, и т. п. Высоту камня над землей в момент времени t обозначим $h(t)$. Согласно второму закону Ньютона, ускорение камня равно действующей на него силе (тяжести), деленной на массу, поэтому ускорение $a = -g$ (знак минус связан с тем, что положительный отсчет высоты, а значит и скорости, ускорения и т. д., идет снизу вверх, а сила тяжести направлена вниз). Учитывая описанный выше смысл производной, получаем, что скорость $v = h'$, а ускорение $a = v'$. Следовательно, $a = h''$. Тем самым, получаем простейшее ОДУ, описывающее движение камня:

$$h'' = -g. \tag{8}$$

Оно легко может быть решено в элементарных функциях: сначала находим $x' = v = -gt + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная, а затем получаем $h = -gt^2/2 + C_1 t + C_2$, где C_2 — другая произвольная постоянная. Как мы видим, решение ОДУ (8) не единственно (даже без учета описанного выше рассуждения о выборе области определения решения, считая что в данном случае это все $t > 0$). Решение зависит от двух произвольных постоянных. Оказывается, это общий факт — решение любого ОДУ (системы ОДУ) представляет собой функцию не только от t, но еще и от параметров, число которых равно порядку уравнения (системы).

> Точная формулировка, доказательство и развитие этого тезиса достаточно тяжелы, и к тому же неактуальны на «настоящем этапе развития нашей теории», но для прикладного применения сказанного достаточно.

И с чисто математических позиций, и для прикладных целей удобнее выделять единственное решение, добавляя к ОДУ дополнительные условия, которые в прикладных задачах должны выражать какие-то реальные факты, а в математической теории служат «маркерами» выделяемых индивидуальных решений. Совокупность ОДУ и добавленных условий называется задачей для этого ОДУ. В рассматриваемой задаче нам нужны 2 условия. Одно на самом деле уже́ есть, хотя еще не было использовано. Это тот факт, что полет камня начался на нулевой высоте. Без ограничения общности можно считать, что отсчет времени начался в момент начала полета, т. е. названное условие записывается в виде

$$h(0) = 0. \tag{9}$$

Второе условие можно задавать из разных соображений. Например, можно считать, что известна начальная скорость камня:

$$h'(0) = w. \tag{10}$$

Получилась задача (8)–(10). Она легко решается:
$h(t) = -gt^2/2 + wt$. Полученная формула показывает, что рассмотренная ситуация принадлежит к счастливому меньшинству задач, решаемых «в явном виде», что избавляет нас в данном случае от (указанной ранее) необходимости четко ставить вопросы при постановке задачи — все мыслимые вопросы могут получить свой ответ из выведенной формулы. В частности, максимальная высота полета равна $w^2/(2g)$, время полета равно $2w/g$, скорость при приземлении равна $-w$ (все это, впрочем, можно было понять и не решая уравнения), и т. д. $\square$

Задача (8)–(10) называется задачей Коши. В общем случае задачей Коши для (1) называется такая задача, в которой в качестве дополнительных условий задаются так наз. данные Коши (начальные данные), а именно: значения в некоторой точке всех неизвестных функций вместе со всеми их производными вплоть до порядка, на 1 меньше чем порядок системы по каждой функции (короче говоря — всех младших производных). В частности, для (7) данные Коши выглядят так:

$$x(t_0) = x_0, \tag{11}$$

где $t_0 \in \mathbb{R}$ — произвольное число, а $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор, но естественно, при этом должно выполняться свойство $(t_0, x_0) \in B$. Соответственно, решением задачи Коши (7), (11) называется решение (7) (в указанном выше смысле) такое, что $t_0 \in (a, b)$, и выполняется (11). В прикладных задачах смысл задачи Коши ясен — найти закон эволюции некоторой системы, для которой известно начальное состояние. Геометрически (7), (11) означает задачу о проведении ИК через заданную точку $(t_0, x_0) \in B$. В отличие от просто решения (7), задача Коши (7), (11) ужé производит впечатление шанса на единственность решения, хотя и с оговорками, связанными с интервалом его определения. В дальнейшем мы покажем, что при определенных условиях и уточнениях формулировки задача Коши (7), (11) в самом деле имеет единственное решение. Отметим, что задача (8)–(10) тоже приводится к виду (7), (11), если к ней применить описанную выше процедуру:

$$\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} v \\ -g \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}.$$

Естественно, задача Коши не исчерпывает все варианты постановки задач для (1), поскольку в общем случае можно задавать (с определенными оговорками) любые дополнительные условия, лишь бы их число было равно порядку системы. Вторым по популярности типом задач являются так наз. краевые задачи для (1). В отличие от задачи Коши, решение которой ищется на, вообще говоря, заранее неизвестном интервале (лишь бы он содержал начальный момент), в краевых задачах предполагается, что решение определено за заранее заданном интервале (a, b). В качестве дополнительных условий в краевой задаче выступают любые соотношения (число которых равно порядку системы), связывающие значения младших производных от неизвестных функций (включая их самих) в точках a и b. Эти условия называются краевыми. При этом значения младших производных в крайних точках интервала понимаются как пределы изнутри.

Пример. Для системы (4) краевая задача может выглядеть, например, следующим образом. Ищется решение на интервале $(0,1)$ со следующими краевыми условиями

$$x'(0)y(1) = 1, \quad x''(1) + y(0) = 3, \quad x(0)x'(1)y(0) = 2,$$

$$x''(0) = \sin y'(1), \quad x^2(0) - y'(0) = 5. \quad \square$$

В отличие от задачи Коши, при исследовании краевых задач могут возникать дополнительные проблемы уже́ с существованием решений. Это связано в частности с тем, что интервал, на котором ищутся решения, может оказаться слишком длинным для рассматриваемого ОДУ, решения которого склонны претерпевать катастрофическое разрушение за малое время (об этом явлении мы поговорим позже), а также с более простым, но значимым явлением «вырожденности» краевых условий.

Вернемся к задаче Коши (7), (11) и проведем анонсированный анализ вопроса о существовании и единственности ее решений.

§ 2. Элементы общей теории разрешимости задачи Коши

Итак, мы рассматриваем задачу Коши для нормальной системы ОДУ I порядка:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

для неизвестной функции $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, при этом заданы: функция $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ (точнее, $f \in C(B)$ для некоторой области $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$), $t_0 \in \mathbb{R}$ — произвольное число, а $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор, но такие что $(t_0, x_0) \in B$. Наша ближайшая задача — сформулировать положения, определяющие

разрешимость задачи (1) и единственность ее решений, доказав при этом ключевые из них. Для этого нам потребуется следующее вспомогательное построение. Построим любой цилиндр $C = \{|t - t_0| \leqslant T,\ |x - x_0| \leqslant R\}$ такой чтобы $C \subset B$, при этом мы заинтересованы в том, чтобы этот цилиндр имел как можно бо́льшие размеры, и в этом нас ограничивает только расстояние от точки (t_0, x_0) до границы области B (если только она не есть все $\mathbb{R}^{n+1}$ — тогда ограничений нет). Обозначим $F = \max\limits_{C} |f|$, $T_0 = \min\{T, R/F\}$. Отрезок Пеано (Пикара) $I_P = [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ — как раз тот, на котором будет строиться решение задачи (1). Нам также потребуются конус $K = \{|x - x_0| \leqslant F|t - t_0|\}$ и его усеченная часть
$K_1 = K \cap \{t \in I_p\}$, которая как раз помещается в C.

Базовым фактом в теории разрешимости задач (1) служит следующая

Теорема Пеано. При перечисленных с начала § 2 условиях существует хотя бы одно решение задачи (1) на внутренности отрезка Пеано: $t_0 - T_0 < t < t_0 + T_0$. $\square$

В теореме не случайно ничего не говорится о единственности решения, т. к. сформулированных условий недостаточно для единственности. Поэтому необходимы дополнительные условия для задачи (1), чтобы получить более пригодный для приложений результат об однозначной разрешимости (1), к которому мы сразу и перейдем, опуская подробности уже́ приведенных тезисов и доказательство теоремы Пеано (относительно сложное).

Отметим два полезных факта. Первое: задача (1) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \tag{2}$$

точнее: если под решением (2) понимать функцию $x \in C(a, b)$, удовлетворяющую (2), то всякое решение (2) есть решение (1) класса $C^1(a,b)$, и наоборот.

Второе: можно пытаться строить решение (1) (и (2)) методом последовательных приближений Пикара. А именно, рассмотрим последовательность функций x^k, из которых нулевая имеет вид $x^0(t) \equiv x_0$, а все последующие определяются из рекуррентного соотношения

$$\frac{dx^k}{dt} = f(t, x^{k-1}), \qquad x^k(t_0) = x_0, \qquad k \geqslant 1, \tag{3}$$

что эквивалентно соотношению

$$x^k(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x^{k-1}(s))ds, \qquad k \geqslant 1. \tag{4}$$

В отличие от исходных задач (1) и (2), соотношения (3) и особенно (4) представляют собой явные формулы, позволяющие легко найти сколь угодно много приближений. Другой вопрос, в самом ли деле это будут приближения к искомому решению. Если мы сможем доказать, что x^k в определенном смысле сходятся к некоторой функции x, то интуитивно ясно из (4), что в пределе получится как раз (2). Обоснованию сформулированного метода Пикара посвящена следующая

Теорема Коши—Пикара. В условиях теоремы Пеано дополнительно предположим, что существуют все частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(B)$. Тогда решение задачи (1) существует на внутренности отрезка Пеано: $t_0 - T_0 < t < t_0 + T_0$, единственно на нем, и является пределом приближений Пикара, которые сходятся к нему равномерно на этом отрезке. $\square$

Доказательство. Обоснование дадим в случае $n = 1$ для упрощения технических деталей, в общем случае рассуждения полностью аналогичны. Будем строить последовательно приближения Пикара по формуле (4), и убедимся при этом по индукции, что все x^k определены и непрерывны на I_P, причем их графики лежат в K_1, а тем более в C. Для x^0 это очевидно. Пусть это верно для x^{k-1}. Тогда при всех $s \in I_P$ точка $(s, x^{k-1}(s)) \in K_1 \subset C \subset B$, а значит правая часть (4) определена, т. е. можно вычислить x^k, которая очевидно непрерывна. Остается заметить очевидную оценку

$$|x^k(t) - x_0| \leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} F ds \right| = F|t - t_0|, \tag{5}$$

которая и означает $(t, x^k(t)) \in K_1$ при всех $t \in I_P$.

Тем самым, приближения Пикара вполне определены, и нужно доказать их сходимость к искомому решению. По условию, $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in C(B)$, а поэтому на компактном множестве C эта функция ограничена: $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant L$, где $L > 0$ — некоторая постоянная. С другой стороны, для любых двух точек $(s, x), (s, y) \in C$ мы можем воспользоваться формулой конечных приращений и написать представление $f(s, x) - f(s, y) = f_x(s, z)(x - y)$, где $(s, z) \in C$, а значит

$$|f(s, x) - f(s, y)| \leqslant L|x - y|. \tag{6}$$

Теперь мы готовы сформулировать и доказать следующую оценку близости соседних приближений на всем I_P:

$$|x^{k+1}(t) - x^k(t)| \leqslant L^k F \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \qquad k \geqslant 0. \tag{7}$$

В самом деле, при $k = 0$ (7) превращается в уже́ доказанную оценку (5). Предположим, что (7) верно для $k := k-1$. Написав ввиду (4) представление

$$x^{k+1}(t) - x^k(t) = \int\limits_{t_0}^{t} [f(s, x^k(s)) - f(s, x^{k-1}(s))] ds,$$

мы можем из него получить требуемую оценку, используя (6) и уже́ доказанный факт $(s, x^k(s)), (s, x^{k-1}(s)) \in C$:

$$|x^{k+1}(t) - x^k(t)| \leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} L \cdot L^{k-1} F \frac{|s - t_0|^k}{k!} ds \right| \leqslant L^k F \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!},$$

что и требовалось. Сходимость последовательности x^k к какому-либо пределу эквивалентна сходимости ряда

$$x^0 + (x^1 - x_0) + \ldots + (x^{k+1} - x^k) + \ldots$$

к тому же пределу, но для этого функционального ряда ввиду (7) построен мажорантный сходящийся числовой ряд

$$|x_0| + \sum_{k=0}^{\infty} L^k F \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} = |x_0| + \frac{F}{L} \left(\exp(L|t - t_0|) - 1 \right),$$

и по теореме Вейерштрасса этот ряд (и последовательность) сходится к некоторой функции $x \in C(I_P)$ равномерно на I_P. Переходя в (4) к пределу при $k \to \infty$ при всех $t \in I_P$ (по теореме о предельном переходе под знаком интеграла), получаем (2) при всех $t \in I_P$. Это означает, что x является решением (2) на всем отрезке Пикара, и решением (1) на всей его внутренности.

[До сих пор мы лишь повторили результат теоремы Пеано, доказав существование решения на интервале Пеано, но во-первых, мы его *доказали* (в скалярном случае), а во-вторых сделали это с помощью конструкции последовательных приближений.]

Остается доказать единственность решения на I_P. Предположим, что (1) и (2) имеют два решения x^1 и x^2 на интервале Пикара. Аналогично рассуждениям выше (не совсем очевидно, но подробности опустим), видим, что их графики обязательно лежат в K_1, а тем более в C. Разобьем отрезок Пикара на отрезки длиной $1/(2L)$ так, что одна из граничных точек совпадает с t_0, и докажем, последовательно двигаясь от этой точки к концам отрезка, что на всех них разность $x^1 - x^2$ равна нулю. Начнем с отрезка $[t_0, t_0 + 1/(2L)]$. Обозначим $\delta = \max\limits_{t \in [t_0, t_0+1/(2L)]} |x^1(t) - x^2(t)|$ и оценим разность на этом отрезке (действуя аналогично предыдущему, т. е. выписывая представление для разности двух решений (2) и пользуясь (6))

$$|x^1(t) - x^2(t)| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} L\delta ds = L\delta(t - t_0),$$

откуда $\delta \leqslant \delta/2$, что влечет $\delta = 0$. Значит, в точке $t_0 + 1/(2L)$ два решения совпадают, и эту точку можно рассматривать в качестве начальной точки для второго отрезка, чтобы рассуждать аналогично, и т. д. $\square$

Пример. $x' = t + x^2$, $x(0) = 0$. Строим цилиндр (данном случае прямоугольник) $|t| \leqslant T$, $|x| \leqslant R$. В данном случае можно считать $B = \mathbb{R}^2$, что что никаких ограничений на T и R нет. Очевидно, $F = T + R^2$, поэтому $T_0 = \min\left(T, \dfrac{R}{T + R^2}\right)$. Таким образом, «бездумное» увеличение размеров цилиндра не приводит к увеличению отрезка Пикара. В данном примере этот отрезок можно в явном виде оптимизировать:
Упражнение. Доказать, что максимальная длина отрезка Пикара достигается при $T = 2^{-2/3}$, $R = 2^{-1/3}$, и тогда $T_0 = 2^{-2/3}$. $\square$

Строим последовательные приближения Пикара, они все будут полиномиальными: $x^{(0)} = 0$, $x^{(1)} = t^2/2$,
$x^{(2)} = t^2/2 + t^5/20$, $x^{(3)} = t^2/2 + t^5/20 + t^8/160 + t^{11}/4400$, и т. д. Графический анализ (возможны и строгие аналитические оценки, но на этом не останавливаемся) показывает, что эти функции весьма быстро сходятся к некоторой функции (по ТК–П — к решению) на отрезке, несколько шире отрезка Пикара (но и не на всей прямой, хотя бы потому, что решение не

существует на всей прямой — об этом феномене далее). Тем самым, отрезок Пикара не является максимальным, на котором можно утверждать сходимость приближений Пикара. Более того, хотя рассматриваемая задача не позволяет найти решение в явном виде (что демонстрирует полезность метода Пикара), но методы общей теории ОДУ (о которых мы упомянем ниже) позволяют указать максимальный интервал существования решения этой задачи, и он шире интервала Пикара. Сходимость приближений к решению может иметь место (и имеет место в данном примере) на интервале шире интервала Пикара.

$$\left[\begin{array}{l}\text{т. е. типичная ситуация такова: } I_P \subset \\ \subset [\text{интервал сходимости прибл-й Пикара}] \subset \\ \subset [\text{интервал существования НР}] \subset \\ \subset [\text{теоретически макс. интервал исходя из} \\ \qquad \text{обл. определения правой части}]\end{array}\right]$$

В то же время борьба за расширение этого интервала на языке приближений Пикара не имеет большого смысла, т. к. они предназначены для локального построения решения, т. е. при большом удалении от начальной точки эти приближения — далеко не лучший способ аппроксимации точного решения (другие способы приближенного решения ОДУ обсуждаются далее). □

Теоремы Пеано и Коши—Пикара носят локальный характер, т. е. в них обсуждается существование и поведение решения в некоторой, вообще говоря, малой окрестности начальной точки. Это не столько недостаток этих теорем, сколько свойство ОДУ общего вида. Дело в том, что в общем случае решение задачи (1) не обязано существовать на больши́х интервалах, или по крайней мере при всех t, которые «можно подставлять в уравнение». Впрочем, это ясно уже́ из априорных обще-философских соображений — процесс, эволюция которого описывается какой-либо закономерностью, может оборваться раньше чем теряет смысл сама закономерность. Явление, при котором эволюционный процесс (в нашем случае это решение ОДУ) прекращается по внутренним причинам, называется катастрофой или разрушением, а закономерность (в нашем случае это ОДУ), описывающая такие потенциально катастрофические процессы, называется режимом с обострением. В прикладных задачах решения, разрушающиеся за конечное время, соответствуют качественным (фазовым) переходам в описываемой системе, т. е., например, обращение каких-либо параметров в бесконечность, конечно, не наблюдается в реальности, а означает выход системы за пределы ситуации, описываемой рассматриваемой моделью.

Пример. $x' = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$. Казалось бы, правая часть ОДУ не имеет особенностей, и ничто не предвещает каких-либо катастроф. Однако непосредственное решение данной задачи дает: $(1/x)' = -1$, откуда $1/x = 1/x_0 - t$, т. е. $x = 1/(1/x_0 - t)$. Это означает что решение определено на интервале $(-\infty, 1/x_0)$ и не может быть продолжено на более широкий интервал (нет другого решения этой задачи, определенного на более широком интервале, или, другими словами, нет другого решения, совпадающего с найденным на имеющемся интервале, но определенного на более широком). Катастрофа наступает при $t \to 1/x_0 - 0$. $\square$

Вопрос от том, как найти максимально широкий интервал существования решения задачи (1) (и вообще, любого ОДУ) и насколько он велик, мы обсудим позже, но пока отметим, что, хотя интервал Пикара таковым максимальным интервалом не является, но сама локальность теорем существования неизбежна. В связи с этим особый интерес вызывают те ОДУ, для которых все-таки можно утверждать существование решений «на всем интервале, где определена правая часть». К ним относятся в числе других так наз. линейные ОДУ. ОДУ называется линейным, если оно линейно по отношению к неизвестным функциям и их производным (но по-прежнему произвольно по отношению к независимой переменной). В случае нормальных систем ОДУ I порядка это означает, что правая часть ОДУ имеет вид $f(t,x) = A(t)x + h(t)$, где A — матрица размером $n \times n$, а h — вектор размерности n. Для того, чтобы такие системы удовлетворяли минимальным требованиям теории (указанным в конце § 1), нужно требовать

$$A, h \in C(a,b), \qquad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty, \tag{8}$$

тогда $B = (a,b) \times \mathbb{R}^n$, и такие системы автоматически удовлетворяют условиям ТК–П. Тем самым, к задаче Коши

$$x' = A(t)x + h(t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{9}$$

при условии

$$t_0 \in (a,b) \tag{10}$$

и при любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ применима теорема Коши—Пикара. Однако этот результат можно усилить:

Теорема. При условиях (8), (10) задача (9) имеет единственное решение на (a,b), причем последовательные приближения Пикара сходятся к нему равномерно на любом отрезке $[c,d] \subset (a,b)$. $\square$

Доказательство этой теоремы мы приводить не будем, отметим только, что оно почти буквально повторяет доказательство ТК–П. При этом основное отличие в том, что нет необходимости проверять попадание графиков приближений в конус, т. к. правая часть ОДУ определена при всех x. Это позволяет заменить оценку (7) на другую, которая уже́ возможна на любом отрезке $[c,d] \subset (a,b)$. $\square$

Таким образом, до тех пор, пока коэффициенты линейного ОДУ определены и непрерывны, его решения не могут разрушиться. Впрочем, это не мешает им взрывообразно расти:

Пример. $x' = kx$, $x(0) = a$. Эта задача описывает, например, рост населения при условии что рождаемость на душу населения постоянна. Решение имеет вид $x = ae^{kt}$, что рано или поздно (скорее рано) означает выход численности населения за любые разумные пределы. На практике этого не происходит потому, что при достаточно выросшем населении рождаемость на душу населения падает, т. е. уравнение принимает другой вид. Более совершенной моделью, учитывающей (хотя и грубо) этот фактор, является так наз. логистическое уравнение, с помощью которого ту же задачу можно записать так: $x' = kx\left(1 - \dfrac{x}{\beta}\right)$, $x(0) = a$, где β — предельная численность населения, при приближении к которому рождаемость снижается до нуля (естественно, следует считать $a < \beta$). Решая эту задачу, получаем:

$$kdt = \frac{\beta dx}{x(\beta - x)} = \frac{dx}{x} + \frac{dx}{\beta - x} = d\ln\frac{x}{\beta - x},$$

$$x = a\frac{\beta e^{kt}}{\beta + a(e^{kt} - 1)}.$$

Впрочем, при малых t рост начинается экспоненциальный, но по мере приближения к предельному значению рост замедляется, и наоборот, приближение к пределу идет асимптотически (по экспоненте с отрицательным показателем). □

На практике общая идеология применения линейных ОДУ такова: они вполне пригодны для описания малых изменений изучаемых величин (в частности, на малых промежутках времени). При выходе за этот диапазон малости модель обязательно теряет адекватность, что проявляется в виде экспоненциального роста решений, характерного для линейных ОДУ (имеющих растущие решения) — этот феномен мы изучим позже. Указанный принцип адекватности линейных ОДУ для описания малых изменений величин основан на основном (и даже ключевом) принципе дифференциального исчисления, состоящем в линеаризации малых приращений функций. Например, в задаче (1) это можно проиллюстрировать следующим образом (для простоты полагаем $n = 1$). Пусть имеется решение (1)

$x = \varphi(t)$, и мы хотим изучить поведение близких к нему решений, рассматривая отклонение, т. е. разность между ними. Для этого, естественно, придется менять начальные данные, т. е. считаем что, например, решение φ имеет начальные данные $\varphi(0) = a$, а близкие к нему решения имеют близкие данные x_0; нас же интересует разность $z = x - \varphi$, для которой имеем задачу Коши

$$z' = f(t, x) - f(t, \varphi), \qquad z(0) = x_0 - a.$$

Предполагая, что z достаточно мало́,

[это всегда верно, как мы покажем далее, если предполагать что $(x_0 - a)$ мало́, и время t не слишком далеко уходит от нуля, а в некоторых наиболее важных случаях второе предполагать не нужно]

мы можем представить правую часть полученного ОДУ в виде

$$f(t, x) - f(t, \varphi) = f_x(t, \varphi(t))z + o(z) \simeq f_x(t, \varphi(t))z,$$

т. е. с точностью до ошибки высшего порядка малости получаем задачу для линейного ОДУ

$$z' = f_x(t, \varphi(t))z, \qquad z(0) = x_0 - a$$

с известным коэффициентом $f_x(t, \varphi(t))$ для неизвестного отклонения z. До тех пор пока z остается малым, полученная линейная задача адекватно описывает исходную нелинейную. Если z остается малым даже при больших временах (это называется устойчивость решения φ), то единственным используемым предположением остается малость начального отклонения. Впрочем, вся описанная процедура нуждается в строгом обосновании, что будет сделано позже.

Все приведенные в § 2 теоремы автоматически переносятся на нормальные уравнения и системы высших порядков, поскольку последние сводятся к нормальным системам I порядка по процедуре, описанной в § 1. Проиллюстрируем данный тезис на примере одного нормального ОДУ высокого порядка:

$$y^{(n)} = g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{11}$$

т. е. это ОДУ порядка n для неизвестной функции $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с заданной функцией $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Согласно общей процедуре, описанной в § 1, следует ввести вектор неизвестных $x = (y, y', \dots, y^{(n-1)})^*$, для которого уравнение (11) примет вид системы I порядка

$$x' = (x_2, \dots, x_n, g(t, x_1, \dots, x_n))^*. \tag{12}$$

Для выполнения необходимых общих требований к ОДУ и их решениям, сформулированных в § 1, нужно предполагать что $g \in C(B)$, где B — область в $\mathbb{R}^{n+1}$, а под решением (11) следует понимать функцию y, заданную на некотором интервале (a, b) (конечном или бесконечном) такую что

- она сама непрерывна на этом интервале, все ее производные $y', \dots, y^{(n)}$, входящие в (11), существуют и непрерывны на этом интервале (т. е. $y \in C^n(a, b)$),
- при всех $t \in (a, b)$ эта функция может быть подставлена в (11), т. е. $(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in B$,
- равенство (11) выполняется тождественно на (a, b).

Соответственно, под графиком решения можно, конечно, понимать традиционно кривую из точек $(t, y(t))$ на плоскости, но с позиций информативного описания поведения решений ОДУ естественнее понимать график как кривую в расширенном пространстве, состоящую из точек $(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$. Это дает полную аналогию (точнее, включение) между (12) и общей теорией систем I порядка. В частности, мы видим, что задача Коши для (11) должна ставиться так:

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \tag{13}$$

где $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ — произвольный вектор такой что $(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in B$.

Таким образом, начальное состояние системы, эволюция которой описывается ОДУ порядка выше первого, задается значением не только самой функции, но и ее младших производных. В описанных условиях задача (11), (13) имеет решение на интервале Пеано, который строится согласно общей процедуре для системы (12). Если дополнительно потребовать наличие непрерывных в B производных g по $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, то можно воспользоваться ТК–П и утверждать единственность этого решения, а также то, что оно является пределом (равномерным вместе со всеми младшими производными) последовательных приближений Пикара, построение которых идет по той же схеме — нулевое приближение вектора x равно начальным данным, а все последующие находятся из (12) — предыдущие помещаются в правую часть (12), а последующие — в левую. Отметим, что при этом для приближений не выполняется принцип «последующие компоненты вектора x — это производные от предыдущих». Другими словами, процесс построения последовательных приближений существенно базируется на системе (12) и не может быть компактно сформулирован в терминах исходного уравнения (11).

Пример. $y'' = t + y - (y')^2$, $y(-1) = 2$, $y'(-1) = 3$. Введем обозначение $x = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$, тогда задача примет вид

$$x' = \begin{bmatrix} x_2 \\ t + x_1 - x_2^2 \end{bmatrix}, \qquad x(-1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Построим последовательные приближения Пикара с номерами от 0 до 2: $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$;

$$(x^{(1)})' = \begin{bmatrix} x_2^{(0)} \\ t + x_1^{(0)} - (x_2^{(0)})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ t - 7 \end{bmatrix}, \qquad x^{(1)}(-1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

откуда $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3t+5 \\ \dfrac{t^2}{2} - 7t - \dfrac{9}{2} \end{bmatrix}$; и наконец

$$(x^{(2)})' = \begin{bmatrix} x_2^{(1)} \\ t + x_1^{(1)} - (x_2^{(1)})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{t^2}{2} - 7t - \dfrac{9}{2} \\ 4t + 5 - \left(\dfrac{t^2}{2} - 7t - \dfrac{9}{2}\right)^2 \end{bmatrix},$$

$$x^{(2)}(-1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

откуда

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{7t^2}{2} - \dfrac{9t}{2} + \dfrac{7}{6} \\ -\dfrac{t^5}{20} + \dfrac{7t^4}{4} - \dfrac{89t^3}{6} - \dfrac{59t^2}{2} - \dfrac{61t}{4} + \dfrac{37}{60} \end{bmatrix}. \quad \square$$

Если уравнение (11) линейно, т. е. имеет вид

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y + r(t), \qquad (14)$$

то для ссылки на общую теорию нужно предполагать, что все $a_k, r \in C(a,b)$, $t_0 \in (a,b)$, и тогда при любых данных Коши (13) задача (14), (13) имеет единственное решение на всем (a,b), причем приближения Пикара сходятся к нему на любом отрезке из (a,b) равномерно вместе со всеми младшими производными. Таким образом, для линейных ОДУ любых порядков сохраняется принцип «решение существует (может быть построено) до тех пор пока определены и непрерывны коэффициенты».

Как уже́ говорилось, приведенные теоремы Пеано и Коши—Пикара локальны, и в общем нелинейном случае это связано с потенциальным разрушением решений, однако это не снимает вопрос о максимально широком интервале, на котором решение все-таки можно построить, попутно устранив оговорки, связанные с его единственностью. Все перечисленные вопросы устраняются при помощи понятий продолжения решений и непродолжаемых решений. Любое решение неразрывно связано с тем интервалом, на котором оно определено, и два решения, заданные на разных интервалах, различны по определению, как уже́ указывалось ранее. Однако мы можем сравнить любые два решения на пересечении интервалов их определения (если оно не пусто), и если на нем они совпадают, то в совокупности они образуют новое решение, определенное на более широком интервале, чем каждое из них. Проще всего это рассуждение проводить в случае когда интервал определения одного из решений полностью содержит в себе интервал определения второго. Тогда (при условии что на втором интервале решения совпадают) говорят, что первое решение является продолжением второго. Если же какое-то решение невозможно продолжить, т. е. найти его продолжение (нетривиальное, т. е. не совпадающее с ним), то оно называется непродолжаемым. Теоремы Пеано и Коши—Пикара говорят о локальных, продолжаемых, решениях, в то время как естественно бороться за построение непродолжаемых решений, для которых вопросы об интервале определения и единственности звучат наиболее естественно. Впрочем, львиная доля работы в этом направлении уже́ нами проделана, и без особого труда получаем следующий результат:

Теорема. В условиях ТК–П существует единственное непродолжаемое решение задачи (1). □

Доказательство. Рассмотрим множество всех решений (1), которое не пусто по ТК–П. Обозначим через (a, b) объединение всех интервалов их определения. Составим из них «совокупное» решение (1) x, определенное на (a, b), по следующей схеме: для любого $t \in (a, b)$ в качестве $x(t)$ возьмем значение всех решений (1), определенных в точке t (ввиду локальной единственности нетрудно убедиться что они все в этой точке совпадают). Без труда проверяется, что полученная функция удовлетворяет (1) (потому что в окрестности любой точки она совпадает с каким-либо из решений). Наконец, это решение непродолжаемо, т. к. включает в себя все решения. □

Отметим, что версия ТК–П для (8), (10), сформулированная выше, сразу строит непродолжаемое решение (8), (10). В общем случае, как уже́ отмечалось, НР не обязано существовать на всем множестве, где «определена правая часть». Сформулируем без доказательства два важных свойства НР (1):

- Любое НР не может быть доопределено в концах интервала своего существования, т. е. оно всегда определено на открытом интервале.

- График НР (т. е. соответствующая непродолжаемая ИК) асимптотически приближается к границе области B, что, собственно, и служит причиной невозможности его дальнейшего продолжения.

Таким образом, НР является глобальным в том смысле, что увеличить интервал существования НР уже́ невозможно. Другое дело, что проекция ИК на ось t (т. е. сам интервал существования) не обязана совпадать с проекцией области B на ось t (т. е. теоретически максимальным интервалом существования каких-либо решений). Это мы уже́ видели на Примере выше. Реальный интервал существования НР зависит от геометрии ИК. Общих рецептов определения интервала существования НР нет, но существует ряд наблюдений и методов, позволяющих провести предварительную диагностику системы на предмет продолжимости ее решений на максимально широкие интервалы или, наоборот, феномена разрушения решений.

Метод 1 — априорные оценки решений. Говорят, что для решений некоторого ОДУ (или задачи для него) имеет место АО $|x(t)| \leqslant h(t)$ на (a, b), если любое решение этого ОДУ (или задачи) удовлетворяет этой оценке на той части (a, b), где оно определено. Т. е. оценка проводится без уверенности, существует ли решение на этом интервале, по принципу «если/где существует, то/там удовлетворяет». Фундаментальным фактом глобальной теории разрешимости является следующая теорема, которую мы приведем без доказательства:

Теорема. Пусть для (1) выполнены условия ТК–П, и на некотором интервале (a, b) для решений (1) имеет место АО $|x(t)| \leqslant h(t)$ с некоторой $h \in C(a, b)$ такой что цилиндр $\{|x| \leqslant h(t),\ t \in (a, b)\} \subset B$. Тогда НР определено на (a, b) (а значит, удовлетворяет АО). $\square$

Попросту говоря, для того, чтобы доказать что решения продолжаются на некоторый интервал, достаточно формально оценить решения на этом интервале так, чтобы в этой оценке запрещалось приближение ИК к границе B.

Пример. $x' = -2tx^2$, $x(0) = 1$. Из уравнения видно, что решение обязано не возрастать при удалении от нуля. С другой стороны, ИК не может пересечь ось абсцисс, т. к. это противоречило бы единственности решения задачи с нулевыми данными, имеющей нулевое решение. Сказанное означает АО $0 \leqslant x(t) \leqslant 1$ для решений задачи при всех $t \in \mathbb{R}$. По Теореме получаем что НР задачи существует на всей прямой. Впрочем, в данной задаче НР можно построить явно: $x(t) = 1/(t^2 + 1)$.

Пример. $x' = t^3 - x^3$. Для любого решения этого ОДУ имеем $(x^2)' = 2xx' = 2xt^3 - 2x^4 \leqslant 2xt^3 \leqslant x^2 + t^6$, значит $(x^2e^{-t})' = ((x^2)' - x^2)e^{-t} \leqslant t^6e^{-t}$, откуда при $t > 0$ получаем $x^2e^{-t} - x^2(0) \leqslant \int\limits_0^t s^6e^{-s}ds$, что дает АО

$$|x(t)| \leqslant e^{t/2}\left(x^2(0) + \int\limits_0^t s^6e^{-s}ds\right)^{1/2},$$

в правой части которой стоит непрерывная на всей прямой функция (случай $t < 0$ аналогичен), и по Теореме снова получаем продолжимость всех решений ОДУ на всю прямую. В этом примере решения невозможно представить в явном виде, однако метод продолжает работать. Суть наших манипуляций состояла в том, что:

- мы получили дифференциальное неравенство, решения которого (это общий принцип для ОДУ первого порядка) связаны таким же неравенством с решениями соответствующего уравнения,

- соответствующее уравнение линейно, а для линейных ОДУ продолжимость решений на максимально возможный интервал — общий факт. □

Метод 2 — анализ скорости роста правой части по отношению к неизвестным. Этот метод не может дать гарантированный результат, он состоит в мнемоническом правиле: если рост $f(t, x)$ по x при $x \to \infty$ происходит со скоростью линейной или ниже, то это наводит на мысль, что решения (1) продолжаются на максимальный интервал, где еще имеет смысл само ОДУ. Строгое доказательство в каждом конкретном случае проводится с помощью отсылки к теореме о НР линейных ОДУ или, например, с помощью АО. Если же рост $f(t, x)$ по x при $x \to \infty$ происходит со скоростью $|x|^{1+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$, или еще быстрее, то это служит серьезным основанием для подозрений, что решения разрушаются раньше, чем ИК приблизится к концу «теоретически возможного интервала». Строгая формулировка и доказательство проводятся в индивидуальном порядке, как правило, с помощью «обратной» АО вида $|x(t)| \geqslant \ldots$. Иллюстрацией служит Пример выше об ОДУ $x' = x^2$. Впрочем, как этот пример в части $t < 0$, так и последние два Примера показывают, что вторая часть приведенного принципа работает не всегда — быстрый рост правой части по x не всегда приводит к катастрофе.

Дополнительные соображения, обобщающие идею АО и позволяющие продолжать решения сложных ОДУ, будут приведены далее в качестве побочного эффекта функций Ляпунова. Отметим также, что приведенные положения глобальной теории разрешимости (1) автоматически переносятся на ОДУ любых порядков, что мы не формулируем ввиду очевидности (следует при этом помнить принцип: все оценки и рассуждения должны включать не только сами неизвестные функции, но и их младшие производные).

Изложение основ теории разрешимости задачи Коши останется неполным, если не затронуть вопрос о зависимости решений ОДУ от параметров. Дело в том, что практически все содержательные задачи, возникающие при математическом моделировании, в т. ч. с помощью ОДУ, содержат в себе параметры, отвечающие за характеристики моделируемого явления.

[В экономических моделях принято искомые величины называть эндогенными переменными, а параметры — экзогенными переменными.]

Эти параметры могут меняться, что влияет на поведение системы, и возникает вопрос — как именно влияет. Кроме того, параметры всегда задаются с определенной точностью, что приводит к необходимости изучения зависимости системы от малого изменения параметров. В случае задачи (1) все сказанное означает, что ее необходимо рассмотреть в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu), \qquad x|_{t=t_0(\mu)} = x_0(\mu), \tag{15}$$

где неизвестная величина x теперь зависит не только от $t \in \mathbb{R}$, но и от параметров $\mu \in \mathbb{R}^k$, т. е. $x : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^n$, при этом заданы: функция $f : \mathbb{R}^{n+k+1} \to \mathbb{R}^n$ (точнее, $f \in C(D)$ для некоторой области $D \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$), а также число t_0 и вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$, зависящие от μ, т. е. на самом деле $t_0 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $x_0 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$.

Прежде всего отметим, что зависимость начальных данных от параметров можно убрать, переведя все в правую часть ОДУ — это делается с помощью замены независимой переменной $t := t - t_0(\mu)$ и неизвестной функции $x := x - x_0(\mu)$, т. е., более четко, введением новой неизвестной функции y по формуле $y(t,\mu) = x(t+t_0(\mu)) - x_0(\mu)$, для которой получится система вида (15), но с другой правой частью и нулевой начальной точкой. Поэтому далее считаем что в (15) начальные данные не зависят от параметров:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\mu), \qquad x|_{t=t_0} = x_0. \tag{16}$$

В дополнение к уже́ выписанным условиям предположим, что существуют все частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(D)$. Фиксируем начальную точку (t_0, x_0) и обозначим
$M = \{\, \mu \in \mathbb{R}^k \mid (t_0, x_0, \mu) \in D \,\}$ — это множество допустимых параметров (при которых задача (16) имеет смысл). Будем считать, что (t_0, x_0) подобраны так, что M не пусто. По ТК–П для всех $\mu \in M$ существует единственное НР задачи (16) — функция $x = \varphi(t,\mu)$, определенная на интервале $(a(\mu), b(\mu))$. Таким образом, ОДУ $(16)_1$ выполнено для φ на всем множестве $G = \{\, (t,\mu) \mid \mu \in M,\ t \in (a(\mu), b(\mu)) \,\}$, являющемся максимальным множеством определения решения задачи (16). Приведем без доказательства две фундаментальные теоремы, лежащие в основе теории зависимости решений ОДУ от параметров.

Теорема. (ТоНЗ). При сделанных предположениях о f и в обозначениях введенных выше можно утверждать, что G открыто, а $\varphi \in C(G)$.

Теорема. (ТоДЗ). Пусть выполнены условия ТоНЗ, и кроме того существуют частные производные f по всем x_j и μ_i вплоть до порядка $N \geqslant 1$ включительно, непрерывные в D. Тогда:

- существуют частные производные $\varphi(t,\mu)$ по всем μ_i вплоть до порядка N включительно, непрерывные в G, вместе с их производными по t;
- эти производные удовлетворяют задачам, получаемым

формальным дифференцированием (16) по μ_i нужных порядков. $\square$

Из этих теорем ввиду описанной выше замены переменных сразу следуют аналогичные теоремы для случая общей системы (15).

[В частности, раскрыт анонсированный выше тезис о том, что при малом изменении начальных данных мало меняется и решение, если только интервал для t не слишком велик (конечен).]

Мнемоническое правило для запоминания всех этих теорем простое — сколько производных мы хотим иметь от решения по параметрам, столько (непрерывных) производных следует предполагать от правых частей по параметрам и по неизвестным. Определенное исключение составляет лишь случай нулевого порядка (т. е. когда мы хотим лишь непрерывности), тогда первые производные f по x нужны, но уже́ по особым причинам (для выполнения условия единственности, без которого сама постановка вопроса о зависимости от параметров теряет смысл). Во всех случаях если производные решения по параметрам существуют, то задачу можно дифференцировать по этим параметрам соответствующее число раз, и так находить эти производные — как решения полученных задач. Эти задачи всегда будут линейными и потому легко решаются (см. Пример далее). Такая процедура разложения решения по параметрам имеет много применений, а сейчас мы проиллюстрируем приведенные теоретические факты на одном примере, хотя и не самом характерном (т. е. не относящемся к основной области применения разложений по параметрам), но зато не требующем никаких дополнительных знаний для его понимания, кроме тех что мы уже́ имеем.

Пример. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = x + \frac{1}{100}(t + x^2), \qquad x(0) = 1. \tag{17}$$

НР этой задачи существует и единственно ввиду вышеприведенных фактов, но оно не выражается в элементарных функциях. Естественным способом для его представления является рассмотреть близкую задачу

$$\frac{dy}{dt} = y, \qquad y(0) = 1, \tag{18}$$

решение которой легко выражается: $y(t) = e^t$. Более точно, рассмотрим обе задачи как частные случаи задачи с параметром

$$\frac{dx}{dt} = x + \mu(t + x^2), \qquad x(0) = 1, \tag{19}$$

ее НР обозначим $x = \varphi(t, \mu)$, тогда при $\mu = 0$ задача (19) превращается в (18), т. е. $\varphi(t, 0) = e^t$, а при $\mu = 1/100$ задача (19) превращается в (17), т. е. нас интересует $\varphi(t, 1/100)$. Для того, чтобы связать $\varphi(t, \mu)$ (и в частности $\varphi(t, 1/100)$) с $\varphi(t, 0)$, воспользуемся ТоНЗ и ТоДЗ. Имеем в данном случае: $D = \mathbb{R}^3$, $M = \mathbb{R}$, правая часть ОДУ имеет все производные по x и μ, непрерывные в D, поэтому применимы ТоНЗ и ТоДЗ при всех N. Чтобы ими воспользоваться, нужно уточнить структуру области G. Заметим, что $(a(0), b(0)) = \mathbb{R}$, т. е. вся прямая $\{\mu = 0\}$, а значит и любой отрезок $\{-R \leqslant t \leqslant R,\ \mu = 0\}$ содержатся в G. Ввиду открытости G это означает, что для любого $R > 0$ найдется достаточно малое $\mu_0 > 0$ такое что прямоугольник $\{-R \leqslant t \leqslant R,\ -\mu_0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0\}$ также содержится в G, т. е. при $-\mu_0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$ все интервалы $(a(\mu), b(\mu))$ шире чем $[-R, R]$.

С другой стороны, эти интервалы конечны и стягиваются в точку 0 по мере роста $|\mu|$ — это можно показать используя вышеприведенные соображения глобальной теории, но это не влияет на дальнейшие рассуждения.

Используя непрерывность (а значит, и равномерную непрерывность) функции φ в прямоугольнике

$\{-R \leqslant t \leqslant R,\ -\mu_0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0\}$, получаем, что

$$\varphi(t,\mu) \overset{t\in[-R,R]}{\rightrightarrows} \varphi(t,0) = e^t \qquad \text{при } \mu \to 0.$$

Это означает, что интересующая нас величина $\varphi(t, 1/100) \approx e^t$ (на любом отрезке), но еще не дает количественную оценку этой близости. Мы построили нулевое приближение интересующего нас решения, и для увеличения точности следует строить последующие приближения. По ТоДЗ производные всех порядков $\varphi(t,\mu)$ по μ существуют и непрерывны в G, причем их можно найти, дифференцируя (19) по μ нужное количество раз. Для этого запишем (19) в полном виде:

$$\frac{\partial\varphi(t,\mu)}{\partial t} = \varphi(t,\mu) + \mu(t + \varphi^2(t,\mu)), \qquad \varphi(0,\mu) = 1, \tag{20}$$

продифференцируем по μ:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2\varphi(t,\mu)}{\partial t\partial\mu} = \frac{\partial\varphi(t,\mu)}{\partial\mu} + t + \varphi^2(t,\mu) + 2\mu\varphi(t,\mu)\frac{\partial\varphi(t,\mu)}{\partial\mu}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}(0,\mu) = 0 \end{gathered} \tag{21}$$

и положим $\mu = 0$, обозначив сразу $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu}(t,0) = v(t)$ и пользуясь тем что $\varphi(t,0) = e^t$:

$$\frac{dv}{dt} = v + t + e^{2t}, \qquad v(0) = 0.$$

Это задача Коши для линейного ОДУ I порядка, ее легко решить (пользуясь методами изложенными далее) и получить $v(t) = e^{2t} - t - 1$. В результате получаем уточненное представление (первое приближение на любом отрезке):
$\varphi(t,\mu) \approx e^t + \mu(e^{2t} - t - 1)$, в частности интересующее нас решение (17) приближенно представляется в виде

$x(t)=\varphi(t,1/100)\approx e^t+(e^{2t}-t-1)/100$. Более точная формулировка такова: $\varphi(t,\mu)=e^t+\mu(e^{2t}-t-1)+o(\mu)$, где $o(\mu)$ понимается как равномерная на любом отрезке $-R\leqslant t\leqslant R$. Для того, чтобы дать точную оценку этой невязки, нужно найти вторую производную, что делается аналогично: дифференцируем (21) по μ, полагаем $\mu=0$, и получаем задачу Коши для линейного ОДУ для функции $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2}(t,0)=w(t)$ с коэффициентами, зависящими от уже́ найденных предыдущих производных $\varphi(t,0)$ и $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu}(t,0)$.

[получится $w(t)=2e^t(e^{2t}-(t+1)^2)$]

Этот процесс может быть совершенно аналогично продолжен до тех пор, пока исходная задача допускает дифференцирование по параметру (в данном случае — неограниченно), что позволяет строить высшие приближения, причем для оценки остаточного члена нужно найти производную на порядок выше. Другой путь состоит в том чтобы сразу искать решение в виде ряда по параметру, при этом процесс формирования ряда можно либо построить последовательно (нахождением производных в порядке старшинства, как это описано только что), либо сразу выписав ряд с неопределенными коэффициентами и подставив его в задачу. Для обоснования этой процедуры требуется теорема (которую мы доказывать не будем): если задача аналитична (т. е. правые части аналитичны — представляются разложением в ряд по всем переменным), то решение — тоже. □

Попутно в этом параграфе мы несколько раз затронули вопрос приближенного нахождения решений ОДУ, актуальный в большинстве реальных задач, поскольку их решение «не выписывается в явном виде». Упомянем некоторые способы приближенного решения ОДУ:

1. метод изоклин и прочие непосредственные геометрические способы эскизного графического представления ре-

шений;

2. последовательные приближения Пикара;

3. разложение по параметру;

4. представление в виде ряда (отрезков ряда) по независимой переменной;

5. метод конечных разностей.

Способы 2,3 обсуждались в данном параграфе. Способ 4 аналогичен ситуации с рядом в способе 3: если задача аналитична, то решения — тоже, и их в виде ряда с неопределенными коэффициентами можно подставлять в задачу, находя эти коэффициенты. Соответственно, конечные отрезки этого ряда будут на небольших промежутках неплохо представлять решение.

[В некоторых относительно редких случаях эти отрезки ряда являются приближениями Пикара, т. е. тогда способы 2 и 4 совпадают]

Способ 1 есть ничто иное как использование геометрической трактовки ОДУ, обсуждавшейся в § 1 (к нему мы вернемся еще раз позже), и неплохо подходит для предварительной диагностики изучаемого ОДУ, особенно при наличии параметров, затрудняющих механическое использование численных расчетов. Наконец, способ 5 лежит в основе численных методов нахождения решений ОДУ, его обоснование является предметом отдельной науки «выч. методы ОДУ», изучение которой в настоящий курс не входит.

Несмотря на все сказанное, имеется достаточно обширный набор ОДУ, допускающих явное представление решений. Знание этих ОДУ и приемов их решения является неплохим подспорьем при решении многих задач, в т. ч. и тех, решения которых сами по себе уже́ не представляются явными формулами (собственно, так мы и поступали выше, когда в процессе анализа относительно сложных ОДУ решали вспомогательные простые ОДУ). Некоторые классы таких «явно решаемых» ОДУ обсуждаются в следующем параграфе (точнее, в §§ 3,5).

§ 3. Принципы интегрирования ОДУ в квадратурах

С определенной долей условности все ОДУ, допускающие «явное» представление решений, можно разделить на 3 класса:

1. после ряда манипуляций сводящиеся к уравнению вида $dF = 0$, имеющему решения $F = \mathrm{const}$ (другими словами, к ОДУ $x' = 0$, имеющему решения $x = \mathrm{const}$),

2. линейные произвольных порядков (и в смысле размера системы, и в смысле порядков производных) — для них имеется весьма развитая общая теория,

3. не входящие в какие-либо обширные «систематические» классы, но анализируемые в индивидуальном порядке за счет определенного «везения».

В настоящем параграфе мы будем обсуждать класс 1. В следующих двух параграфах — класс 2. Наконец, класс 3 по самой постановке вопроса в общем виде обсуждать бессмысленно. Между указанными классами имеются пересечения. В частности,

- в класс 1 входят линейные ОДУ I порядка (для одной неизвестной функции), т. е. такие уравнения естественно обсудить сейчас, в то время как общая теория линейных ОДУ (класс 2 в целом) строится на иных принципах нежели простое «сведе́ние к уравнению $dF = 0$»;

- в классе 3 подразумевается и сведе́ние некоторых случаев к тем, которые входят в класс 1, т. е. после определенных дополнительных усилий попадают в область действия приемов, накапливаемых в классе 1. Другими словами, класс 1 растет по мере систематизации приемов, зарождающихся в классе 3.

Тем самым, наша задача в § 3 — сформулировать основную идеологию сведе́ния ОДУ к тривиальному ОДУ $dF = 0$ (или $x' = 0$) и перечислить наиболее «популярные» классы ОДУ, допускающие единообразные приемы такого сведе́ния, не претендуя на какую-либо универсальность (невозможную в принципе), т. е. рассматривая ограниченное число частных случаев (примеров).

В свою очередь, приемы анализа ОДУ в классе 1 состоят из комбинации двух приемов:

- (при необходимости) снижение порядка ОДУ;

- поиск ИМ.

ИМ — это такая функция от, вообще говоря, независимой переменной, неизвестной(ых) величин(ы) и ее (их) младших производных, после умножения на которую ОДУ принимает вид $dG = 0$ или $G' = 0$, где G — некоторая функция от, вообще говоря, тех же величин. Такое ОДУ «решается» в том смысле что оно эквивалентно соотношению $G = a = \mathrm{const}$, которое имеет порядок на 1 меньше чем исходное ОДУ. Если порядок уже́ был первый, то получается соотношение нулевого порядка, т. е. функциональное. В этом случае ОДУ считается «решенным в явном виде», т. к. анализ функциональных соотношений «не входит в методику интегрирования ДУ». В общем случае результат описанной процедуры состоит в понижении порядка ОДУ на 1 (естественно, при этом появляется дополнительный параметр a). Отсюда видно, что «явное решение ОДУ» есть частный случай процедуры понижения порядка и в то же время ее главный результат (после вообще говоря многократного применения). Таким образом, процедуру «решения» любого ОДУ можно понимать как процесс (вообще говоря многократного) последовательного применения двух приемов: подготовка ОДУ путем умножения на ИМ (для чего его сначала нужно найти) и затем интегрирование.

[Более общо формулируя цель, указанную в заголовке § 3, здесь обсуждается процесс понижения порядка ОДУ, даже если его не удается довести до конца (порядка 0), который в любом случае полезен, т. к. ОДУ более низкого порядка легче анализировать.]

Итак, нахождение ИМ автоматически означает снижение порядка, а в свою очередь понижение порядка, как бы оно ни было проведено, приближает ОДУ к тем классам, для которым приемы поиска ИМ наиболее развиты (особенно для первого порядка). Подводя итог, наметим план действий — необходимо подробно пояснить два аспекта:

- приемы понижения порядка ОДУ в случае если он выше первого;
- поиск ИМ для ОДУ первого порядка,

которые, как легко понять, полностью «покрывают» все описанные приемы.

В течение всего § 3 мы не будем заботиться об области определения функций, строгом обосновании некоторых процедур и прочих формальных вещах. Это связано с тем, что целью проводимых манипуляций является получение «явных формул», которые уже́ не так сложно проанализировать апостериори на предмет того, в самом ли деле они представляют решения, какие у этих решений свойства и т. п.

Начнем с первого аспекта — снижение порядка ОДУ в случае, если он выше первого. Примерами могут служить следующие случаи:

1. Автономное ОДУ (так называются любые ОДУ, не содержащие в явном виде независимую переменную t, подробно они изучаются далее) $f(x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$ допускает понижение порядка заменой $x' = v(x)$. Другими словами, вместо x в качестве неизвестной функции временно выступает v. Если мы сможем найти v, то остается найти x из автономного уравнения I порядка, что всегда легко сделать (см. ниже). В свою очередь, для v получаем ОДУ уже́ порядка $n-1$, хотя и неавтономное. В самом деле, дифференцируя тождество $x' = v(x)$ по t, получаем $x'' = v'(x)v(x)$, $x''' = v''(x)v^2(x) + (v'(x))^2 v(x)$, и т. д., вплоть до $x^{(n)}$, которая будет выражением, содержащим v и все ее производные до порядка $n-1$.

   Тем самым, по сути описанный прием означает не столько понижение, сколько «расщепление» порядка (к тому же с усложнением — неавтономное уравнение вместо автономного, что в определенном смысле означает усложнение на 1 порядок).

2. Если ОДУ $f(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$ однородно по x, т. е. f — однородная функция степени 0 по $(x, x', \dots, x^{(n)})$ (что означает ее неизменность при замене $(x, x', \dots, x^{(n)})$ на $(kx, kx', \dots, kx^{(n)})$ при любых k), то это ОДУ допускает понижение порядка заменой $z = x'/x$, где z — новая неизвестная (т. е. для z получается ОДУ порядка $n-1$, и если его решить, то x уже́ остается найти из линейного ОДУ I порядка, что всегда легко сделать (см. ниже)). В самом деле, $x' = xz$, что после дифференцирования дает $x'' = x(z' + z^2)$, $x''' = x(z'' + 3zz' + z^3)$, и т. д., вплоть до $x^{(n)} = xA$, где A_n — выражение, содержащее z и все ее производные до порядка $n-1$.

   [Другими словами, $x^{(k)} = xA_k$, где $A_1 = z$,
   $A_{k+1} = A_k' + zA_k$, откуда ясен вид всех A_k]

   Ввиду однородности f можно убрать сомножитель x во всех выражениях в получившемся ОДУ, что дает требуемое ОДУ для z.

В этом случае снова речь идет о «расщеплении порядка».

3. Если ОДУ $f(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$ однородно по (t, x) в обобщенном смысле, то его порядок также можно понизить. А именно, под обобщенной однородностью понимается ситуация, в которой f не меняется при замене (t, x) на $(kt, k^m x)$ при любых k, где m — некоторая постоянная (при этом, очевидно, производные $x^{(r)}$ заменяются на $k^{m-r}x^{(r)}$).

   [Чаще всего такая ситуация возникает для полиномиальных f при удачном сочетании всех показателей степеней (поскольку одинаковая степень всех мономов по k после описанной замены, которую и нужно проверять, означает несколько уравнений на одну неизвестную m).]

   В этом случае порядок понижается после замены независимой переменной t на $s = \ln t$ и неизвестной величины x на новую неизвестную $z = xe^{-ms}$. В самом деле, имеем
$$t = e^s, \qquad x = ze^{ms} = t^m z,$$
   откуда
$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(ze^{ms})}{de^s} = \frac{e^{ms}dz + zme^{ms}ds}{e^s ds} =$$
$$= e^{(m-1)s}\left(\frac{dz}{ds} + mz\right) [= t^{m-1}(z' + mz)],$$
   и т. д.

   [Проще сразу написать представление $\dfrac{d^r x}{dt^r} = e^{(m-r)s}A_r = t^{m-r}A_r$, где $A_0 = z$, а далее легко выводится соотношение $A_{r+1} = \dfrac{dA_r}{ds} + (m-r)A_r$, и видно что A_r есть линейная комбинация z и ее производных до порядка r с постоянными коэффициентами.]

В итоге после этой замены в исходном уравнении все аргументы f появляются с сомножителем $k = e^s = t$ в соответствующих степенях, его можно убрать, и тем самым независимая переменная s уходит из ОДУ, т. е. получается автономное ОДУ, порядок которого уже́ понижается согласно способу 1.

4. Наконец, как указано выше, всегда остается место попыткам поиска ИМ. В данном случае обнаружение ИМ, как правило, связано с использованием специфики конкретного ОДУ (т. е. это в значительной степени искусство, соответствующее классу 3 в описании из начала § 3). Поэтому какие-либо общие рецепты здесь вряд ли уместны, и естественнее привести

   Пример. Уравнение физического маятника $x'' + \dfrac{g}{l}\sin x = 0$, где x — угол отклонения стержня маятника от вертикали (в радианах), l — (приведенная) длина подвеса, g — ускорение силы тяжести. Ключевой догадкой является умножение этого уравнения на величину $2x'$, после чего оно принимает вид $\left((x')^2 - 2\dfrac{g}{l}\cos x\right)' = 0$, т. е. $2x'$ и есть ИМ. После интегрирования порядок ОДУ снижается до первого: $(x')^2 - 2\dfrac{g}{l}\cos x = \mathrm{const}$, а это ОДУ уже́ анализируется без особого труда. $\square$

   Другие примеры поиска ИМ для понижения порядка будут рассмотрены на семинарах.

5. Для линейных ОДУ имеются особые приемы понижения порядка (при известном частном решении), которые будут рассмотрены в § 4.

Список примеров/классов, иллюстрирующих первый аспект (понижение порядка), можно, конечно, продолжать, но это неисчерпаемая тема, и где-то нужно остановиться.

Перейдем ко второму аспекту — поиск ИМ для ОДУ первого порядка, что равносильно, как уже́ говорилось, снижению порядка до нулевого, т. е. тому, что принято называть «решением в явном виде».

[— при условии, конечно, что функции, фигурирующие в ИМ и окончательном функциональном представлении решений, выражены явно в том или ином смысле — ведь теоретически, как ясно априори, и в чем мы убедимся чуть ниже, любое ОДУ I порядка можно «проинтегрировать» просто по определению — сославшись на решения, существование которых гарантируется соответствующими теоремами. По умолчанию считается, что получен «явный вид», если в нем используются элементарные функции, их первообразные и другие функции (в т. ч. так наз. специальные), которые считаются «известными», «хорошо изученными». Тогда говорят что решение выражено в квадратурах.]

Прежде всего отметим, что наряду с нормальным видом

$$x' = f(t, x) \tag{1}$$

ОДУ первого порядка (для одной скалярной неизвестной функции, т. е. для связи 2 скалярных переменных) можно записывать в так наз. симметричной форме:

$$A(t, x)dt + B(t, x)dx = 0. \tag{2}$$

Формально (1) и (2) записывают один и тот же закон (хотя и в разной форме), при условии что $A = -fB$. Сразу же видны различия:

- Соотношение $A = -fB$ может иметь место при одной и той же f, но с разными парами (A, B). Другими словами, одно и то же уравнение (1) может записываться в виде (2) разными способами (правда, отличающимися друг от друга лишь пропорциональной связью, не меняющей сути равенства (2)). Итак, нормальная форма единственна, а симметричная запись — нет.

- Не все уравнения (2) являются записью какого-либо уравнения (1). Другими словами, (2) не всегда (точнее, не во всех точках (t, x)) может быть приведено к нормальному виду. А именно, в тех точках где, например, $B = 0$, $A \neq 0$, равенство $A = -fB$ невозможно. Более общо, даже если формально удастся привести (2) к виду (1), в нем f может иметь особенности (не попадать в условия базовых теорем, например, из § 2), хотя функции A и B особенностей не имеют.

- (в качестве частичной компенсации предыдущего пункта) Если в (1), как правило, подразумевается неравноправность t и x (t считается независимой переменной, а x — функцией от нее), то в (2) эти переменные совершенно равноправны. С тем же успехом (если уж нам захотелось привести (2) к нормальному виду) (2) можно записать в виде $dt/dx = -B/A$, решив что x будет выступать в роли независимой переменной, а t будет функцией от нее. В некоторых случаях это может помочь избежать сложностей, описанных выше.

Роль (2), конечно, состоит далеко не только в том, чтобы служить вре́менной формой записи ОДУ до тех пор пока не будет выбрана переменная, более подходящая на роль независимой, и будет выписана соответствующая нормальная форма (хотя бы потому, что такой выбор может оказаться невозможным глобально, сразу во всей области определения коэффициентов в (2)). Основная функция симметричной записи — сохранять симметрию переменных от начала до конца (каким является получение функционального представления решений и прочих их свойств). Решения (2) понимаются в виде этих искомых функциональных связей между t и x, а геометрически — это кривые на плоскости. Поскольку эти кривые могут не проецироваться однозначно ни на одну из осей (пример — окружности), это и показывает бóльшую общность симметричных записей. Такая форма работы с ОДУ I порядка возможна ввиду специфики первых дифференциалов и не допускает разумного обобщения на высшие порядки. Подразумевается, что (2) есть связь, налагаемая на изначально независимые 2 переменные (t, x), в результате чего остается только 1 степень свободы, которая может быть выражена любой вещественной переменной — это может быть как t, так и x, или любая третья (например, параметр вдоль искомой ИК).

Неоднозначность симметричной записи (2) — это ее преимущество, благодаря которому собственно и возможна компактная формулировка понятия ИМ и идеи его поиска. Как уже́ отмечено, вместе с (2) это же ОДУ может быть выражено другими аналогичными соотношениями, отличающимися от (2) умножением на любую ненулевую функцию M:

$$M(t,x)A(t,x)dt + M(t,x)B(t,x)dx = 0. \tag{3}$$

Не все эти записи равноправны. Среди них имеются записи, в которых левая часть представляет собой дифференциал некоторой функции $F(t, x)$:

$$dF(t,x) = F_t(t,x)dt + F_x(t,x)dx = 0. \tag{4}$$

В этом случае говорят, что (4) есть так наз. УПД. Таким образом, (2) есть УПД если и только если найдется такая функция $F(t, x)$, что $A = F_t$, $B = F_x$, а это, как известно из результатов математического анализа, возможно если и только если (в односвязной области)

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t}. \tag{5}$$

В случае, если (5) изначально выполнено, т. е. (2) есть УПД, то (2), принимающее в этом случае вид (4), тривиально решается:

$F(t,x) = \mathrm{const}$,

[т. е. искомые ИК суть линии уровня F]

и чтобы эта формула была выписана, остается лишь выразить F из соотношений $A = F_t$, $B = F_x$, что не представляет труда (т. е. получится решение в квадратурах). Если же (5) не выполнено, то пытаемся найти ИМ, т. е. такую M, что после умножения (2) на нее полученное эквивалентное уравнение (3) будет уже́ УПД, т. е. для него будет верно (5), принимающее вид

$$A\frac{\partial M}{\partial x} - B\frac{\partial M}{\partial t} + \left(\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial t}\right) M = 0. \tag{6}$$

Из теории УЧП известно, что (6) всегда имеет решение, т. е. ИМ существует, и следовательно любое ОДУ вида (2) может быть приведено к форме УПД. Однако, этот теоретический факт не может рассматриваться как алгоритм построения решения в квадратурах для любых ОДУ I порядка, т. к. упомянутый результат о разрешимости (6) опирается на (2), т. е. построение ИМ с помощью (6) в общем случае предполагает, что решение (2) уже́ найдено, в то время как мы его как раз и ищем. С другой стороны, теоретический факт существования ИМ означает, что в каждом конкретном случае можно с уверенностью пытаться искать ИМ, т. е. этот путь заведомо не тупиковый.

[На семинарах будут рассмотрены примеры задач, где это получается, несмотря на то, что решаемые ОДУ не входят в систематические классы описанные ниже.]

Подводя итог, мы можем сказать, что ИМ и УПД — это ничто иное как язык, на котором удобно формулировать процесс явного решения ОДУ, но не метод в собственном смысле этого слова. В рамках классификации, приведенной в начале § 3, эти понятия означают, что в общем случае поиск ИМ — это искусство в рамках класса 3, но можно выделить некоторые достаточно обширные классы ОДУ I порядка, попадающие в класс 1. Перечислим некоторые (наиболее популярные) из них.

УРП и сводящиеся к ним. Говорят, что (1) есть УРП, если $f(t,x) = a(t)b(x)$. Другими словами, (2) есть УРП если $A(t,x) = \alpha(t)$, $B(t,x) = \beta(x)$. Особенно из (2) тогда очевидна причина названия УРП: в таких ОДУ переменные разделяются, т. е. дифференциалы содержат только отдельные переменные и потому интегрирование тривиально. Для таких ОДУ ИМ очевиден: для (1) им была функция $\mu(t,x) = 1/b(x)$, а для (2) он не нужен (это сразу УПД).

Некоторые ОДУ сводятся к УРП заменами переменных. Например, для ОДУ вида $x' = f(at + bx)$ (где a и b постоянные) такой заменой является $z = at + bx$ (т. е. вместо x ищется новая неизвестная функция $z(t)$, для которой получаем ОДУ $z' = a + bf(z)$).

При решении УРП и сводящихся к ним (а такие будут составлять большинство и далее) нужно помнить, что при сведéнии (1) к (2) (как ужé говорилось) нет полной эквивалентности. В данном случае может получиться, что будут потеряны постоянные решения $x = x_*$, которые имеются у (1) при $f(x_*) = b(x_*) = 0$. При делении (1) на $b(x)$ мы предполагаем $b \neq 0$, но тогда решение $x = x_*$ нужно добавить к списку решений, полученных из (2), т. к. среди последних его может не оказаться.

Однородные ОДУ I порядка и сводящиеся к ним. Напомним, что функция $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ называется однородной степени m, если $F(ky) = k^m y$ для всех $k \in \mathbb{R}$ (или хотя бы для $k > 0$, тогда говорят о положительной однородности).

[Такие функции играют ключевую роль в теории размерности и в вопросах масштабирования]

Говорят, что (1) — однородное, если f — однородная функция степени 0. Для (2) однородность понимается так: функции A

и B однородны с одинаковой степенью.

[Ясно, что тогда всякое однородное (2) записывается как однородное (1), но обратное неверно в том смысле что не всякое однородное (1), полученное из некоторого (2), свидетельствует об обязательной однородности этого исходного (2), т. к. однородность записи (2) можно всегда испортить неподходящим множителем. Так же как и для УРП — всегда можно испортить УПД (2) неподходящим множителем. Другими словами, в обоих случаях подразумевается, что скрытая в (2) структура уже́ выявлена на момент диагностики принадлежности классу.]

Несложно показать, что все такие f имеют вид $f(t,x) = h(x/t)$. В этом случае замена $z = x/t$ (т. е. вместо x ищется новая неизвестная функция $z(t)$) сводит (1) к УРП, т. к. для z получается ОДУ $tz' = h(z) - z$. В терминах ИМ это означает, что для однородных (1) ИМ имеет вид $(th(x/t) - x)^{-1}$. Впрочем, на практике удобнее получать формулы решений именно в процессе замен переменных, а не формулировкой готового ИМ.

Некоторые ОДУ сводятся к однородным заменами переменных. Например:

Смещенные однородные ОДУ I порядка
$x' = h\left(\dfrac{at+bx+c}{kt+lx+m}\right)$, где $\det\begin{bmatrix} a & b \\ k & l \end{bmatrix} \neq 0$, сводятся к однородным заменой $s = kt + lx + m$ (новая независимая переменная), $z = at + bx + c$ (новая неизвестная), которая приводит к ОДУ $\dfrac{dz}{ds} = \dfrac{a + bh(z/s)}{k + lh(z/s)}$. Если же $\det\begin{bmatrix} a & b \\ k & l \end{bmatrix} = 0$, то исходное ОДУ попадет в класс сводящихся к УРП, описанный выше.

Некоторые дробно-полиномиальные ОДУ I порядка (т. е. такие что f в (1) есть отношение полиномов) могут приводиться к однородным ОДУ заменой $x = z^m$ (т. е. вместо x ищется новая неизвестная функция $z(t)$), где постоянная m подбирается так чтобы новое ОДУ было однородным.

В обоих упомянутых случаях описанная процедура, естественно, может быть сформулирована в терминах ИМ, но это, как правило, нецелесообразно — проще именно проводить серию замен переменных, а после получения формулы решения «раскрутить» эти замены в обратном порядке.

Линейные ОДУ I порядка и сводящиеся к ним. Общий вид линейного ОДУ I порядка, как упоминалось в § 2, следующий:

$$x' = a(t)x + b(t). \tag{7}$$

Процедуру вывода формулы его решений в квадратурах можно сформулировать двумя (естественно, эквивалентными) способами.

Способ I — вариация постоянной. Рассмотрим сначала соответствующее так наз. однородное уравнение

$$x' = a(t)x. \tag*{$(7)_0$}$$

[Название подразумевает однородность (первой степени) правой части (или всего уравнения) по x, т. е. это не та однородность о которой шла речь выше.]

Это ОДУ имеет решение $x = 0$, а остальные решения (ввиду единственности НР задачи Коши) нигде в нуль не обращаются, поэтому для их поиска можно разделить ОДУ на x и легко получить ответ:

$$x(t) = C_1 \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds\right), \tag{8}$$

где C_1 — произвольная постоянная, а точка t_0 также произвольна (из области определения a); конечно, из этих двух параметров один независимый (т. е., например, считаем t_0 фиксированным, а C_1 произвольным). Формула (8), хотя и получена в предположении $x \neq 0$ (что означает $C_1 \neq 0$), однако она содержит и решение $x = 0$, если считать C_1 совершенно произвольным. Итак, (8) есть общее решение $(7)_0$. Метод вариации постоянной, соответственно со своим названием, состоит в том, чтобы искать решение (7) также в виде (8), но считая C_1 ужé не постоянной, а функцией от t. Подставляя такую модифицированную формулу (8) в (7), получим ОДУ которое легко решается, и общее решение (7) представляется в виде

$$x(t) = C_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) + \int_{t_0}^{t} b(\xi) \exp\left(\int_{\xi}^{t} a(s)ds\right) d\xi, \tag{9}$$

где C_0 — произвольная постоянная. На практике нет необходимости запоминать громоздкую формулу (9), а проще проделать описанную последовательность действий и тем самым получить формулу (9) для конкретных коэффициентов. Число t_0 при этом удобно выбирать равным точке где задаются данные Коши (если таковые имеются). А именно, если $x(t_0) = x_0$, то из (9) легко находим $C_0 = x_0$.

Способ II — с помощью ИМ. Найдем ИМ для (7), т. е. такую $v(t, x)$, после умножения на которую (7) примет вид $h(t, x)' = 0$. Для этого запишем (7) в виде $x' - a(t)x = b(t)$ и подберем v так чтобы выражение $v(x' - ax)$ было полной производной. Напрашивается $vx' - avx = (vx)'$, что имеет место при $v' = -av$. Но такое ОДУ мы только что решали (это $(7)_0$ с обратным знаком), т. е. искомый ИМ имеет вид $v(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$. После умножения (7) на этот ИМ получаем ОДУ $(vx)' = bv$, которое легко решается и дает, естественно, ту же формулу (9). В случае задачи Коши $x(t_0) = x_0$ удобно, опять же, интегрировать последнее ОДУ с нижним пределом t_0.

Отметим, что общее решение (9) линейного ОДУ (7) не просто содержит одну постоянную C_1 (как это происходит со всеми

ОДУ I порядка), а C_1 входит в него линейно. Другими словами,

Нетрудно показать, что такая структура возможна только для линейных ОДУ, причем коэффициент при параметре — это ЧРОУ.

Обоснование для преподавателя. Пусть ОДУ (1) имеет общее решение вида $x(t) = g(t) + \alpha h(t)$, где α — произвольная постоянная, $h \neq 0$. Очевидно g — частное решение. Подставляя общее решение в (1) и дифференцируя 2 раза по α, получим $f_{xx} = 0$, т. е. это ОДУ вида (7). Теперь легко проверить что h — решение $(7)_0$.

ОРНУ=ЧРНУ+ОРОУ. Этот факт мы в более общей форме и подробнее обсудим ниже, когда будем изучать общие линейные ОДУ.

К виду (7) могут быть приведены (и потому решены в квадратурах) некоторые другие ОДУ вида (1) или (2). Например:

Линейные по независимой переменной, т. е. такие ОДУ (1), что после записи в виде (2) обнаруживается их линейность по t, так что их можно записать в нормальной форме, но поменяв ролями t и x (считая x независимой переменной, а t — функцией от нее).

Уравнение Бернулли $x' = a(t)x + b(t)x^{\alpha}$, где $\alpha \neq 0, 1$, сводится к линейному заменой $z = x^{1-\alpha}$ (т. е. вместо x ищется новая неизвестная функция $z(t)$, для которой получаем ОДУ $z' = (1-\alpha)(az+b)$). При $\alpha > 0$ функция $x = 0$ является решением, но этой заменой не получается и его нужно «не потерять».

Уравнение Риккати $x' = a(t)x + b(t)x^2 + c(t)$ сводится к уравнению Бернулли, если известно одно его частное решение $x = \varphi(t)$ — для этого достаточно сделать замену $z = x - \varphi(t)$ (т. е. вместо x ищется новая неизвестная функция $z(t)$, для которой получаем ОДУ $z' = (a + 2b\varphi)z + bz^2$).

В завершение параграфа проведем анонсированный в § 1 анализ ОДУ, не разрешенных относительно производных, в скалярном случае I порядка, т. е. рассмотрим ОДУ

$$F(t, x, x') = 0. \tag{10}$$

Как уже́ говорилось в § 1, теоретически можно разрешить (10) относительно x' и свести его к ОДУ вида (1) (их может возникнуть несколько), но этот способ особенно нецелесообразен в плане поиска явной формулы решения, о котором идет речь в § 3. Может оказаться, что в процессе превращения (10) в (1) или в процессе последующего интегрирования потеряется конструктивность или обозримость формул, в то время как непосредственно в виде (10) это ОДУ может допускать решение в квадратурах, найти которое относительно легко. Таким способом непосредственного решения в виде (10) является метод введения параметра. Он состоит в том, чтобы временно рассмотреть $x' = p$ как третью переменную наряду с t и x. Тогда (10) задает поверхность $F(t, x, p) = 0$ в трехмерном пространстве, а искомыми ИК (10) будут кривые на этой поверхности, получаемые благодаря дополнительному дифференциальному соотношению $dx = pdt$, выражающему исходный смысл переменной p для искомых решений (точнее, ИК — это проекции указанных кривых на плоскость (t, x)). Чтобы найти эти кривые, т. е. использовать указанную дифференциальную связь, удобно записать поверхность $F(t, x, p) = 0$ в параметрическом виде

$$t = f(u, v), \qquad x = g(u, v), \qquad p = h(u, v). \tag{11}$$

Тогда связь $dx = pdt$ примет вид

$$g_u du + g_v dv = h(f_u du + f_v dv). \tag{12}$$

Решая это уравнение,

[т. е. если (12) решается в квадратурах, то и (10) в итоге решается в квадратурах — мы смогли избежать лишних неявных формул] находим связь между u и v, которая ввиду $(11)_{1,2}$ выражается как искомая связь между t и x. При этом в (12) может возникнуть вырождение, т. е. на каком-то множестве ОДУ превратится в тождество. Это множество следует отдельно проверять на предмет того, содержит ли оно ИК (10). Если да, то такие решения называются особыми. Их ИК являются огибающими всех прочих ИК. Как мы видим, эта ситуация отличается от нормальных ОДУ — гладкость F в (10) не гарантирует единственность решения задачи Коши, ИК могут пересекаться, касаться друг друга и т. д.

Пример. $x = tx' - x'^3/3$. Разрешение этого ОДУ относительно x' нецелесообразно — это приведет к громоздким формулам (хотя в итоге и не помешает выразить решение в квадратурах), в то время как по методу введения параметра решение весьма просто. Обозначаем $x' = p$, тогда $x = tp - p^3/3$, $pdt = dx = tdp + pdt - p^2dp$, т. е. $(t - p^2)dp = 0$. Либо $dp = 0$, откуда $p = \alpha = \text{const}$, и $x = \alpha t - \alpha^3/3$, либо $t - p^2 = 0$, откуда $p = t^{1/2}$, и $x = 2t^{3/2}/3$. Второй случай в самом деле дает решение (особое), это проверяется непосредственной подстановкой в ОДУ.

[Пересечение особого решения и любого из остальных происходит в точках $t = \alpha^2$ и $t = \alpha^2/4$, как это можно найти решая уравнение точки пересечения относительно α. В первой из них совпадают еще и производные, что означает касание.]

В случае более общего ОДУ $x = tx' - x'^\beta/\beta$ с параметром $\beta > 0$ решения строятся тем же методом так же просто: $x = \alpha t - \alpha^\beta/\beta$, $\alpha = \text{const}$, и $x = \dfrac{\beta - 1}{\beta} t^{\frac{\beta}{\beta-1}}$, в то время как путь через разрешение относительно x' совершенно невозможен для произвольных β. □

§ 4. Элементы теории линейных ОДУ (с произвольными коэффициентами)

Как было указано выше, среди всех ОДУ особую роль играют линейные, а для их теоретического изучения достаточно рассмотреть системы I порядка (в смысле порядка производных):

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t), \tag{1}$$

где $\dim x = \dim h = n$, $\dim A = n \times n$, $A, h \in C(a, b)$,
$-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. В § 2 сформулирован результат о том, что НР задачи Коши $x(t_0) = x_0$ для (1) при всех $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует на всем (a, b) и единственно на нем.

[Далее подразумевается, что рассматриваются только НР для (1).]

По сравнению с произвольными нормальными ОДУ, система (1), помимо упомянутого свойства глобальной разрешимости, обладает рядом других важных свойств, которые нам предстоит изучить. Аналогично случаю $n = 1$, рассмотренному в § 3, удобно наряду с (неоднородной) системой (1) рассматривать соответствующую однородную систему:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{2}$$

с нее и следует начать. Решения (1) и (2), согласно общей теории, понимаются как функции класса $C^1(a, b)$. Это бесконечномерное функциональное пространство, но, оказывается, решения (2) образуют в нем конечномерное подпространство размерности n, т. е.:

1. решения (2) образуют линейное пространство;

2. среди решений (2) имеется n линейно независимых (базис пространства решений) таких, что все остальные выражаются в виде их линейных комбинаций.

Первый из приведенных тезисов очевиден (непосредственно проверяется, что линейная комбинация $x(t) = C_1x_1(t)+C_2x_2(t)$ любых двух решений $x_{1,2}$ системы (2) также является ее решением), а второй требует пояснений формулировки и обоснования. Прежде всего следует уточнить, что означает линейная зависимость или независимость набора функций. Говорят, что набор функций $x_1, \ldots, x_k$ линейно зависимый на интервале (c, d), если найдутся такие числа $C_1, \ldots, C_k$, не равные нулю все сразу (т. е. хотя бы одно не нуль), что $C_1x_1 + \ldots + C_kx_k \equiv 0$ на (c, d), в противном случае эти функции называются линейно независимыми на этом интервале. Линейная зависимость очевидно эквивалентна тому что одна из функций выражается как линейная комбинация остальных (с постоянными коэффициентами) на всем интервале. Для постоянных векторов линейная независимость эквивалентна полному рангу соответствующей (вообще говоря, прямоугольной) матрицы (ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых среди этих векторов, которые могут быть взяты в качестве базиса в этом наборе), но для (вектор-)функций появляется три нюанса:

- линейная зависимость набора функций зависит от интервала, на котором она исследуется, а именно независимость на некотором интервале не влечет независимость на его подинтервалах (обратное очевидно невозможно) — примером служат функции $\begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} |t| \\ t|t| \end{bmatrix}$ на интервалах $(-1, 1)$, $(-1, 0)$ и $(0, 1)$;

- если функции линейно зависимы на интервале, то их значения в каждой его точке зависимы как векторы (очевидно), но обратное неверно, как показывает тот же пример;

- линейная зависимость значений набора функций как векторов в каждой точке интервала влечет таковую в одной наперед выбранной (это тавтология), но обратное неверно, как показывает пример векторов $\begin{bmatrix}1\\t\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}1\\t^2\end{bmatrix}$ в точках $t = 0, 1$ и других.

Наиболее важным для дальнейшего будет случай $k = n$ (этот случай практически ничем не примечателен для произвольных функций, но проявляет себя применительно к решениям (2)), тогда матрица, составленная из векторов, квадратная, и полнота ее ранга означает невырожденность. Последние 2 приведенных тезиса тогда звучат так: линейная зависимость набора функций $x_1, \ldots, x_n$ (векторных, со значениями в $\mathbb{R}^n$) на (c, d) влечет вырожденность составленной из них матрицы тождественно на (c, d) (но обратное неверно), что в свою очередь влечет вырожденность этой матрицы в конкретной выбранной точке $t_* \in (c, d)$ (но обратное неверно).

Описанные свойства линейной зависимости делают ее достаточно запутанной для произвольных функций, но, оказывается, в случае если речь идет о решениях (2), то все упрощается, а именно, все перечисленные свойства становятся верными и в обратную сторону, а именно, если в какой-то одной точке $t_* \in (c, d)$ (где интервал $(c, d) \subset (a, b)$ произволен) решения $x_1, \ldots, x_n$ линейно зависимы как векторы (т. е. соответствующая матрица $\begin{bmatrix}x_1 & \ldots & x_n\end{bmatrix}$, называемая матрицей Вронского, вырождена), то это верно в любой другой точке из (c, d) (т. е. матрица Вронского вырождена всюду на (c, d)), и более того, эти функции линейно зависимы на (c, d). Доказательство тривиально: если $C_1x_1 + \ldots + C_nx_n = 0$ в какой-то одной точке, то эта функция, будучи решением задачи Коши для (2) с нулевыми данными, обязана равняться нулю всюду. Итак, определитель матрицы Вронского (вронскиан) из решений (2) либо всюду нулевой, либо всюду ненулевой, и его обращение в нуль есть критерий линейной зависимости выбранного набора из n решений (2).

Теперь тезис 2 выше доказывается тривиально: чтобы построить n линейно независимых решений (2) $x_1, \ldots, x_n$, доста-

точно задать n линейно независимых векторов и решить n задач Коши для (2), взяв эти векторы в качестве начальных значений. Эти решения образуют базис, т. к. любое решение x выражается через них в начальной точке: $x - C_1x_1 - \ldots - C_nx_n = 0$, а тогда эта функция обращается в нуль тождественно как решение задачи Коши для (2) с нулевыми данными, т. е. это же представление для x имеет место на всем (a, b). Базис $x_1, \ldots, x_n$ пространства решений (2) называется ФСР для (2). Представление $x = C_1x_1 + \ldots + C_nx_n$ для любого решения можно записать в матричном виде: $x(t) = X(t)c$, где
$c = (C_1, \ldots, C_n) = \mathrm{const} \in \mathbb{R}^n$, а $X = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$ — матрица Вронского из ФСР, называемая ФМР для (2). В терминах ФМР описанная конструкция ФСР выглядит так: объединяя по столбцам те факты, что элементы ФСР являются решениями (2), получаем, что ФМР также является (матричным) решением того же ОДУ, а начальные данные для ФМР — это любая невырожденная матрица. Итак, ФМР являются те и только те матрицы X, которые являются решениями задачи Коши вида

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \qquad X(t_*) = Z, \tag{3}$$

где Z — произвольная невырожденная матрица, а $t_* \in (a, b)$ — произвольное число.

Как и любой базис, ФСР (2) не единственна. Но все ФСР друг через друга выражаются. Этот факт проще всего записать в терминах ФМР: если X_1 и X_2 — две ФМР (2), то каждый столбец X_2 есть решение (2) и потому представляется в виде $(X_2)^k = X_1C_k$; объединяя все эти столбцы, получаем представление $X_2 = X_1C$, где C — невырожденная постоянная матрица.

Итак, если известна какая-то ФМР X для (2) (ее можно получить как решение (3)), то все остальные ФМР получаются из нее по формуле XC, где C — невырожденная постоянная матрица, а все (векторные) решения (2) представляются в виде $x = Xc$, где c — постоянный вектор из $\mathbb{R}^n$. В частности, решение задачи Коши $x(t_0) = x_0$ для (2) легко получить, подставив формулу общего решения (2) в данные Коши: $x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0$.

Вронскиан $w = \det X$, как мы установили выше, обращается в нуль либо всюду, либо нигде (тогда это ФМР и ФСР), но эта формулировка не дает количественного соотношения между значениями w в различных точках. Сформулируем без доказательства утверждение, дающее такое соотношение:

Теорема. (Остроградского—Лиувилля). Для любого набора $x_1, \ldots, x_n$ решений (2) соответствующий вронскиан w удовлетворяет ОДУ $\dfrac{dw}{dt} = w \mathrm{tr} A$ на (a, b). □

[А значит, $w(t) = w(t_0) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{tr} A(s) ds\right)$, где $t_0 \in (a, b)$ произвольно.]

Перейдем к неоднородной системе (1). Нас интересуют два вопроса:

- какова структура множества решений (1);
- как описать решения (1), если известны решения (2), т. е. построена ФМР X для (2).

На оба вопроса мы дадим ответ одновременно, выписав явно решения (1) с использованием X. Эта процедура полностью аналогична скалярному случаю, рассмотренному в § 3:

Способ I — вариация постоянных. Поскольку общее решение (2) имеет вид $X(t)c$, то решение (1) ищем в виде $X(t)c(t)$, что после подстановки в (1) с учетом $(3)_1$ легко дает ответ

$$x(t) = X(t)\left(c_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(s)h(s)ds\right), \tag{4}$$

где $c_0 \in \mathbb{R}^n$ произволен. В частности, решение задачи Коши $x(t_0) = x_0$ для (1) представляется в виде

$$x(t) = X(t) \left(X^{-1}(t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(s)h(s)ds \right). \qquad (5)$$

Способ II — с помощью ИМ. Запишем (1) в виде $x' - Ax = h$ и найдем ИМ, т. е. такую матрицу $Y(t)$, после умножения слева на которую левая часть превратится в полную производную. Напрашивается $Yx' - YAx = (Yx)'$, что означает $Y' = -YA$. По аналогии со скалярным случаем (см. § 3) можно предположить что $Y = X^{-1}$. И в самом деле, дифференцируя тождество $XX^{-1} = E$ и пользуясь $(3)_1$, убеждаемся что $Y = X^{-1}$ является решением ОДУ $Y' = -YA$ и потому годится в качестве ИМ. В итоге получаем новое ОДУ $(X^{-1}x)' = X^{-1}h$, которое легко решается и дает те же результаты (4) и (5), причем для задачи Коши удобно сразу брать интеграл с нижним пределом t_0.

Так же как и в скалярном случае, (4) показывает структуру множества решений (1): ОРНУ=ЧРНУ+ОРОУ. На геометрическом языке это означает, что решения (1) образуют в $C^1(a, b)$ линейное многообразие размерности n. Дальнейшее изучение (1) в общем виде не имеет особого смысла, т. к. это требует анализа ФМР, которую мы подразумевали известной, в то время как на практике ее поиск (т. е. выражение в явном виде) для произвольных A затруднителен. Далее мы продолжим анализ в частном случае постоянных A, когда ФМР выписывается в явном виде.

Линейные ОДУ производных порядков сводятся к (1) по процедуре, уже́ неоднократно описанной нами, и потому все приведенные факты распространяются и на них. Проиллюстрируем данный тезис на примере одного линейного ОДУ произвольного порядка:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = r(t), \qquad (6)$$

где все $a_k, r \in C(a,b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Решения (6) понимаются как функции класса $C^n(a,b)$. Обозначим $x = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})^*$, тогда (6) примет вид (1), где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E_{n-1} \\ -a_0 & \ldots - a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ r \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Соответственно, задача Коши для (6) имеет вид

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \tag{8}$$

где $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ — произвольная точка, а $t_0 \in (a,b)$. Как говорилось в § 2, задача (6), (8) имеет единственное НР на (a,b). Изучение (неоднородного) ОДУ (6) идет параллельно с соответствующим однородным $(6)_0$, в котором $r := 0$ (что соответствует (2) при описанной замене).

Хотя смысл рассмотрения (6) отдельно от (1) именно в том, чтобы формулировать его свойства не прибегая к соответствующей (1), но часть фактов (особенно теоретических) неизбежно (или по крайней мере более удобно) формулируются с привлечением (1). Так, удобно составить матрицу Вронского для $(6)_0$, имеющую вид $X = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$, т. е. с позиций $(6)_0$ первая строка этой матрицы состоит из любых n решений этого ОДУ, а последующие строки получаются дифференцированием первой. Линейная зависимость любого набора решений $(6)_0$ очевидно эквивалентна таковой для набора соответствующих столбцов $x = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})^*$, являющихся решениями (2) в обозначениях (7). Поэтому вопрос о структуре множества решений $(6)_0$ решается мгновенно — это линейное пространство (что очевидно сразу из $(6)_0$), размерность которого равна n (т. к. это верно для соответствующего (2)). Базис

$y_1, \ldots, y_n$ пространства решений $(6)_0$ называется ФСР для $(6)_0$. Роль ФМР играет матрица Вронского, построенная на ФСР. Для любого набора решений $(6)_0$ линейная зависимость на интервале эквивалентна зависимости значений соответствующих столбцов $x = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})^*$ в каждой точке интервала, что эквивалентно зависимости этих столбцов в какой-то одной точке. Вронскиан $w = \det X$ для любого набора из n решений $y_1, \ldots, y_n$ ОДУ $(6)_0$ либо всюду нулевой, либо всюду ненулевой, в последнем случае эти функции образуют ФСР. Более того, справедлива ТО—Л:

$$\frac{dw}{dt} = -wa_{n-1}, \qquad \text{т. е.} \quad w(t) = w(t_0) \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} a_{n-1}(s)ds\right),$$

выражающая эволюцию вронскиана количественно. ФСР $(6)_0$ можно построить как решения задач Коши $(6)_0$, (8) с данными, представляющими собой любой базис в $\mathbb{R}^n$.

Представление общего решения (6) легко выписать, используя матрицу Вронского X. В самом деле, общее решение x соответствующей системы (1) (связанной с (6) соотношениями (7)) дается формулой (4): $x(t) = X(t)c + \int\limits_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)h(s)ds$, но нас интересует только первая компонента $y = x_1$ этого вектора, так что с учетом $(7)_2$ получаем требуемое представление

$$\begin{aligned} y(t) &= X_1(t)c + \int\limits_{t_0}^{t} (X(t)X^{-1}(s))_{1n} r(s)ds = \\ &= \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(t) + \int\limits_{t_0}^{t} (X(t)X^{-1}(s))_{1n} r(s)ds, \end{aligned} \tag{9}$$

где X_1 — первая строка X, состоящая из ФСР $(6)_0$: $y_1, \ldots, y_n$. Как и следовало ожидать, (9) показывает структуру решений (6): ОРНУ=ОРОУ+ЧРНУ. Отметим, что если данные Коши (8) нулевые, т. е. $x(t_0) = 0$, то $x_0 = 0$ в (5), что означает $c = 0$ в (9), т. е. ЧРНУ в (9) — это решение (6), $(8)_0$. На практике при нахождении ОРНУ удобнее пользоваться не формулой (9), а непосредственно искать решение методом вариации постоянных (хотя это, конечно, эквивалентно (9)). А именно, поскольку ОРОУ имеет вид $y(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_i(t)$, что соответствует общему решению (2) в виде $x(t) = X(t)c$, то ОРНУ ищем в виде $y(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(t) y_i(t)$, что соответствует поиску решения (1) в виде $x(t) = X(t)c(t)$. Такой путь приводит, как мы ужé знаем, к ОДУ для $c(t)$ вида $Xc' = h = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(t) y_i(t) = 0, \quad \dots, \quad \sum_{i=1}^{n} C_i'(t) y_i^{(n-2)}(t) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(t) y_i^{(n-1)}(t) = r(t).$$

Находя отсюда C_i, получим искомое решение (6).

[И в самом деле видно что эта система эквивалентна (9), т. к. она имеет вид

$c' = X^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = (X^{-1})^n r$, откуда

$c(t) = c_0 + \int\limits_{t_0}^{t} (X^{-1})^n(s) r(s) ds$, что уже очевидно дает (9).]

В завершение § 4 приведем анонсированный в § 3 метод понижения порядка ОДУ (6) при известном частном решении ψ уравнения $(6)_0$. Естественно, оно предполагается нетривиальным, т. е. не равным тождественно 0, а потому не равное 0 на некотором интервале, на котором и будут проводиться рассуждения.

[Более того, нули нетривиального решения $(6)_0$ очевидно не могут образовать целый интервал, так что эти рассуждения верны всюду кроме, возможно, отдельных точек.]

Тогда решения (6) ищем в виде $y = \psi z$, где z — новая неизвестная. Вычисляя $y' = \psi z' + \psi' z$, и т. д., получим, что (6) принимает вид линейного ОДУ порядка n для z (коэффициент при $z^{(n)}$ равен ψ), а поскольку при $r = 0$ это ОДУ имеет решение $z = 1$, то коэффициент при z равен 0. Разделив на ψ, получим линейное ОДУ того же типа что и (6), но для z и без младшего члена, т. е. это ОДУ порядка $n - 1$ для z'. Этот процесс можно продолжить, если известны другие частные решения $(6)_0$, т. е. в итоге порядок (6) понижается на столько, сколько известно частных решений $(6)_0$. В пределе (если это число равно n) порядок понижается до 0 в том смысле, что остается вычислить n первообразных для нахождения всех решений (6).

[ср. метод вариации постоянных выше, где также нужны были n первообразных для нахождения C_k после того как вычислены все C'_k — т. е. для случая n частных решений это просто переформулировка тех же действий]

Аналогично, если известно одно решение (2), то можно снизить число уравнений и неизвестных в (1) на 1, но мы не приводим конкретной формулировки метода за недостатком времени.

Список литературы

Основная литература

1. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие. Изд. 4-е., испр. М.: Едиториал УРСС, 2002.

2. Мамонтов А.Е. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Ч. 1: Элементы общей теории. Новосибирск: Изд. НГПУ, 2010.

3. Мамонтов А.Е. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Ч. 2: Линейные уравнения. Новосибирск: Изд. НГПУ, 2011.

4. Мамонтов А.Е. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Ч. 3: Дополнительные вопросы общей теории. Новосибирск: Изд. НГПУ, 2012.

5. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.

6. Романко В.К. Разностные уравнения. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2006.

7. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Эдиториал УРСС, 2002.

Дополнительная литература

8. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991.

9. Годунов С.К. Квадратичные функции Ляпунова. Новосибирск: НГУ, 1982.

10. Дементьева Н.В., Лисейкин В.Д., Чуркин В.А. Линейные системы ДУ с постоянными коэффициентами, построение ФСР однородной системы с использованием корневого базиса. Новосибирск: НГУ, 2008.

11. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

12. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1979.

13. Лисейкин В.Д. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 2002.

14. Мамонтов А.Е. Лекции по уравнениям математической физики, Ч. 1: Элементы общей теории уравнений в частных производных. Новосибирск: Изд. НГПУ, 2013.

15. Мамонтов А.Е. Лекции по уравнениям математической физики, Ч. 2: Классические решения. Новосибирск: Изд. НГПУ, 2014.

16. Мамонтов А.Е. Лекции по уравнениям математической физики, Ч. 3: Обобщенные решения. Новосибирск: Изд. НГПУ, 2015.

17. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МГУ, 2002.

18. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.

19. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959.

20. Треногин В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2009.

21. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1962.

22. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964.

Задачники

23. Романко В.К. Разностные уравнения. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2006.

24. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., Ижевск: РХД, 2000.

Список аббревиатур и обозначений

АО	—	априорная оценка
ДУ	—	дифференциальное уравнение
ИК	—	интегральная кривая
ИМ	—	интегрирующий множитель
НР	—	непродолжаемое решение
ОДУ	—	обыкновенное дифференциальное уравнение
ОРНУ	—	общее решение неоднородного уравнения
ОРОУ	—	общее решение однородного уравнения
ТК—П	—	теорема Коши—Пикара
ТоДЗ	—	теорема о дифференциальной зависимости (решений от параметров)
ТО—Л	—	теорема Остроградского—Лиувилля
ТоНЗ	—	теорема о непрерывной зависимости (решений от параметров)
УПД	—	уравнение в полных дифференциалах
УРП	—	уравнение с разделяющимися переменными
УЧП	—	уравнение в частных производных
ЧРНУ	—	частное решение неоднородного уравнения
ЧРОУ	—	частное решение однородного уравнения
ФМР	—	фундаментальная матрица решений
ФСР	—	фундаментальная система решений

$:=$, $=:$	—	равенство по определению (обозначению) — двоеточие со стороны определяемого символа; или замена переменной с сохранением ее старого обозначения
$(\cdot)^*$	—	транспонирование (матрицы или вектора)
$C(A)$	—	множество непрерывных функций на множестве A

$C^k(A)$	—	множество функций, непрерывных на множестве A и имеющих на нем все непрерывные производные до порядка k
$\dim$	—	размерность (вектора или матрицы)
E_m	—	единичная матрица размерности m
I_P	—	интервал Пеано (Пикара) — см. § 2

Оглавление

Обыкновенные дифференциальные уравнения
для студентов-нематематиков.
Семестровый курс лекций.
Часть 1

Мамонтов Александр Евгеньевич

Подписано в печать 28.09.2015. Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 4.7. Уч.-изд. л. 4.7.
Тираж 150 экз. Заказ № 215.

Лицензия ЛР № 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.