Уравнения математической физики

доцент А.Е.Мамонтов

Часть I. Элементы общей теории УЧП.

1. **Введение.** Предмет теории уравнений в частных производных (УЧП) и уравнений математической физики (УМФ), цели курса. Мультииндексы. УЧП, редуцируемые к ОДУ, т.е. квазилинейные системы I порядка с общей главной частью и сводящиеся к ним (нелинейные УЧП I порядка). Роль характеристик, расширение на гиперболические по Петровскому системы I порядка на плоскости (римановы инварианты), пример одномерных уравнений акустики.
2. **Задача Коши и характеристические многообразия (ХМ) для УЧП.** Наводящие соображения: аналитические решения задачи Коши для ОДУ. Постановка задачи Коши для УЧП, пример: аналитическое решение задачи Коши для двумерного уравнения Лапласа. Понятие ХМ, теорема Коши–Ковалевской. Частные случаи нахождения ХМ: квазилинейная система I порядка на плоскости, соотношения на ХМ; квазилинейная система I порядка в 3-мерном пространстве, пример двумерных уравнений акустики; квазилинейное уравнение II порядка и выше, понятие символа дифференциального оператора. Поведение ХМ при сведении УЧП друг к другу (исключением или введением неизвестных).
3. **Элементы классификации УЧП. Свойства гиперболических уравнений на примере уравнения колебаний струны (УКС).** Линейное уравнение II порядка: канонический вид (КВ) в точке. Возможность приведения к КВ сразу в окрестности (области). То же на плоскости: классификация, КВ в окрестности точки. Три «канонических» уравнения II порядка на плоскости: Лапласа, теплопроводности и УКС. УКС: задача Коши при t=0, формула Даламбера, гладкость, области единственности и влияния, конечная скорость распространения возмущений, понятие начально-краевых задач в стакане, метод Дюамеля, интеграл энергии и единственность решения разных задач. «Классификация» более общих УЧП: основные идеи (характеристические свойства 3 типов УЧП); уравнения II порядка; квазилинейные системы I порядка; гиперболичность по Фридрихсу: вещественность ХМ, интеграл энергии.
4. **Понятие корректности.** Понятие краевой задачи, примеры, связь с задачей Коши. «Наивное» понятие корректности (без непрерывной зависимости), пример Адамара для уравнения Лапласа. Корректность по Адамару, пример задачи Коши для УКС. Примеры типа Адамара: задача Коши на наклонных прямых, начальная задача при t<0 для уравнения теплопроводности. Дополнительные соображения: отсутствие аналитических решений (пример Ковалевской) и пример неединственности в начальной задаче для уравнения теплопроводности.

Часть II. Классические решения УМФ.

1. **Уравнение Лапласа: общие свойства; постановка краевых задач; задача Дирихле в круге и метод Фурье.** Понятие решения задачи Дирихле, принцип максимума. Задача Дирихле в круге: решение методом Фурье, сходимость ряда по Пуассону, эквивалентность формуле Пуассона. Многомерный аналог формулы Пуассона и его обоснование. Свойства гармонических функций: бесконечная гладкость, теоремы о среднем прямая и обратная (свойство средних как критерий гармоничности), усиленный принцип максимума, неравенство Гарнака, теорема Лиувилля, понятие фундаментального решения (ФР), интеграл Гаусса и теорема об устранимой особенности, преобразование Кельвина и асимптотика на бесконечности. Постановка внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана, связь между ними, смысл условий на ∞, смежные определения классов функций (правильная нормальная производная и т.д.) и областей (ляпуновская граница и т.д.). Формулы Грина и их обобщение на менее гладкие функции и границы. Единственность решений поставленных выше основных задач.
2. **Уравнение Лапласа: решение краевых задач методом потенциалов.** Интегральная формула Грина, уточненный интеграл Гаусса. Функция Грина как способ условного представления решений, получение как следствие формулы Пуассона. Потенциалы как слагаемые в интегральной формуле Грина, переход к случаю n=3. Дифференциальные свойства ляпуновских поверхностей (в локальных координатах). Основные свойства потенциалов простого и двойного слоя на ляпуновских поверхностях: представление через специальные углы и оценки углов, оценка абсолютной ограниченности потенциала двойного слоя, асимптотика на бесконечности, непрерывность и прямое значение на поверхности, формулы для скачков. Вспомогательные сведения из анализа: свойства фредгольмовых операторов в гильбертовом пространстве, следствия для интегральных операторов с ядром Гильберта–Шмидта и в частности для потенциалов, обобщения на полярные ядра в пространстве C. Существование решений поставленных выше основных задач. Переформулировка внутренней задачи Неймана для ее однозначной безусловной разрешимости. Отличия при других n. Непрерывная зависимость в задаче Неймана.
3. **Уравнение теплопроводности.** Постановка задач Коши–Дирихле и первой смешанной задачи, условия согласования, условия на рост. Принцип максимума, единственность для смешанной задачи и начальной задачи. Формальный вывод формулы Пуассона через преобразование Фурье, понятие ФР. Свойства интеграла Пуассона при произвольных ограниченных начальных данных. Существование решения начальной задачи с непрерывными данными. Свойства решений: бесконечная гладкость, бесконечная скорость распространения возмущений. Начальная задача с разрывными данными (единственность). Разрешимость первой смешанной задачи при n=1. Принцип Дюамеля для неоднородного уравнения.

4. **Волновое уравнение.** Постановка задачи Коши, переход к n=3, эвристический вывод формулы решения, изучение ее свойств и обоснование формулы Кирхгофа. Метод спуска и формула Пуассона, случай других n. Принцип Дюамеля для неоднородного уравнения. Интегралы энергии, энергетические неравенство и равенство, единственность решения задачи Коши. Наличие переднего (при всех n) и заднего (при n=3) фронтов, закон сохранения энергии. Задача Коши на других многообразиях и смешанные задачи. Проблема с гладкостью данных Коши, сферические волны, пример каустики, необходимость перехода к обобщенным решениям. Сферические волны как средство распространить эффекты при n=2,3 на любые четные и нечетные n соответственно.

Часть III. Обобщенные решения УМФ.

1. **Свойства интегрируемых функций и обобщенные производные (ОП).** Вспомогательные сведения из анализа: классы эквивалентных функций, непрерывные и компактные вложения пространств, пространства Лебега L_p. Операция усреднения и ее свойства: гладкость, формула дифференцирования, коммутация с классическим дифференцированием, аппроксимация в пространствах гладких функций, невозрастание нормы в L_p, аппроксимация в L_p. Лемма ДюБуа–Реймона, эквивалентное представление классических производных интегральными тождествами. Определение ОП через интегральное тождество и их элементарные свойства: единственность, связь с классическими производными, глобальность, локализация, суперпозиции (и их необратимость), линейность; примеры. Нетривиальные свойства ОП: слабая и сильная замкнутость оператора дифференцирования, коммутация с усреднениями внутри области, сходимость производных от усреднений внутри области, определение ОП через замыкание и его эквивалентность первому определению, дифференцирование произведения, описание функций с нулевыми ОП определенного порядка, поведение ОП при замене координат, связь с абсолютной непрерывностью.
2. **Изотропные пространства Соболева.** Определение пространств W^k_p и их тривиальные свойства: очевидные эквивалентные нормы, полнота, умножение на гладкие функции, локализация, сходимость усреднений на компактах, тривиальное продолжение финитных функций, поведение при замене координат. Пространство W^{ok}_p и его простые свойства: тривиальное продолжение, случай всего пространства, сходимость усреднений. Плотность гладких функций в W^k_p для звездных областей. Теорема о продолжении: основные моменты доказательства и одномерная иллюстрация. Плотность гладких функций в общем случае. Сепарабельность и рефлексивность W^k_p. Описание слабой сходимости. Неравенство Фридрихса (Стеклова), эквивалентная норма в W^{ok}_p. Интерполяционные неравенства и эквивалентная норма в W^k_p (без промежуточных производных). Интегральное представление гладких функций через градиент, оценки для гладких функций и теоремы вложения W^1_p в L_r или C; вложения для W^k_p (при n>1). Случай n=1, вложения в пространства Гельдера. Теорема Реллиха; компактность вложений в общем случае. Общая конструкция эквивалентных норм в W^k_p (через систему полунорм); неравенства Пуанкаре, Фридрихса и их аналоги. Конструкция следа на многообразиях размерности (n–1). Свойства оператора следа (без доказательства): компактность, непрерывность при сдвиге многообразия, случай многообразий меньшей размерности, общие теоремы вложения, критерий принадлежности W^{ok}_p. Формулы Гаусса–Остроградского и интегрирования по частям.
3. **Эллиптические уравнения в ограниченных областях.** Мотивация поиска обобщенных решений. Классическая постановка задачи: эквивалентные формы, условия эллиптичности и равномерной эллиптичности, сведение к случаю нулевых краевых условий. Постановка первой краевой задачи с негладкими данными; сильное и слабое обобщенные решения, связь между ними. Энергетическое неравенство, теорема единственности. Существование решения: абстрактная постановка задачи в W^{o1}_2; формально сопряженные дифференциальные операторы и краевая задача, и соответствующая абстрактная задача; теорема существования; структура множества решений и спектра. Повышение гладкости (внутренней и глобальной). Мотивация постановки III краевой задачи и определения сопряженных краевых задач III типа. Теорема существования обобщенного слабого решения III краевой задачи и структура спектра. Случай неоднородных краевых условий.
4. **Смешанная задача для уравнения теплопроводности.** Постановка первой начально-краевой задачи. Замечания о случаях общего эллиптического оператора, неограниченных областях, других краевых условиях; сведение к нулевому данному на боковой поверхности. Интегральное тождество для классического решения; необходимость анизотропных пространств Соболева, их определение и простые свойства: полнота, продолжения, плотность гладких функций, следы. Определение обобщенного решения задачи. Нетривиальные свойства анизотропного пространства Соболева: интегрирование по частям при ненулевом следе, свойства интеграла с переменным пределом. Априорные оценки (гладких) решений задачи, их роль в построении решения в соответствующих классах. Лемма Гронуолла для негладких функций. Теорема единственности. Теорема существования: метод Галеркина, разрешимость вспомогательной системы ОДУ; оценки приближенных решений; переход к пределу. Повышение гладкости. Аналогичная задача для гиперболических уравнений – сходства и различия.

Литература

1. Обязательная (на которой в основном построен курс):
   1.1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., Наука, 1988.
   1.2. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М., Наука, 1979.
   1.3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М., Наука, 1973.
   1.4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., Наука, 1983.
2. Обязательная (содержит небольшие фрагменты курса):

2.1. Избранные главы анализа и высшей алгебры. ЛГУ, 1981 (часть III в этой книге).
2.2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Физматлит, 2006.
2.3. Михлин С.Г. Курс математической физики. СПб, Лань, 2002.
2.4. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М., Наука, 1966.

3. Дополнительная:
   3.1. Демиденко Г.В. Введение в теорию соболевских пространств. Новосибирск, изд-во НГУ, 1995.
   3.2. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.
   3.3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М., Высшая школа, 1970.
   3.4. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., Физматлит, 1961.
   3.5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: МГУ Наука, 2004.
4. Дополнительная (для углубленного изучения):
   4.1. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М., Мир, 1966.
   4.2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., Мир, 1964.
   4.3. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М., Мир, 1977.
   4.4. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. 2-е изд. Бином. Лаборатория знаний. 2005.
   4.5. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными (перевод Т.Н.Рожковской под ред. Н.Н.Уральцевой) – Новосибирск: Тамара Рожковская (Университетская серия; Т. 7), 2003.

Рекомендуемый план семинарских занятий

I. Элементы (всего *22 занятия*), **обязательно** включаемые в годовую программу (всего *30 занятий*):
   1. **3 контрольные работы**.
   2. **Уравнения в частных производных (УЧП) первого порядка** (*2 занятия*):
      a) линейные однородные, метод первых интегралов;
      b) линейные неоднородные и квазилинейные, метод первых интегралов и метод характеристик;
      c) квазилинейные системы с общей главной частью;
      d) нелинейные уравнения; уравнение Гамильтона–Якоби.
   3. **Характеристические многообразия (ХМ) и смежные вопросы** (*5 занятий*):
      a) общее понятие ХМ в связи с задачей Коши и теоремой Коши–Ковалевской; его особенности для квазилинейных систем и линейных уравнений, примеры нахождения в обоих случаях;
      b) соотношения на ХМ, примеры их вывода для линейных систем первого порядка и уравнений второго порядка на плоскости, применение к решению задачи Коши для систем первого порядка;
      c) канонический вид линейных уравнений второго порядка и их классификация:
         i) на плоскости, с переменными коэффициентами;
         ii) в многомерном пространстве, с постоянными коэффициентами.
      d) гиперболические системы первого порядка на плоскости: инварианты Римана, решение смешанных краевых задач.
   4. **Уравнение колебаний струны (УКС)** (*2 занятия*):
      a) общее решение, задача Коши, формула Даламбера;
      b) принцип Дюамеля;
      c) области влияния и единственности;
      d) начально-краевые задачи в четверти плоскости и в «стакане», их однозначная разрешимость.
   5. **Метод разделения переменных для простейших линейных уравнений с постоянными коэффициентами (на плоскости или полное разделение переменных)** (*4 занятия*):
      a) уравнение Лапласа в круге, внешности круга, секторе, кольце – задачи Дирихле, Неймана, смешанные задачи;
      b) уравнение теплопроводности и волновое уравнение в «стакане» с однородными краевыми условиями;
      c) неоднородные краевые задачи; представление решения в виде ряда по собственным функциям соответствующей однородной задачи.
   6. **Понятие корректности по Адамару** (*1 занятие*):
      a) примеры корректных задач (задача Коши для ОДУ, задача Коши для УКС, и др.);
      b) примеры некорректных задач для простейших УЧП, построение примеров Адамара.
   7. **Обобщенные производные, регуляризация, пространства Соболева и обобщенные решения** (*5 занятий*):
      a) случай одной независимой переменной – возможность дифференцирования особенностей;
      b) простейшие многомерные примеры, обобщенное дифференцирование вырезанием особенностей;
      c) принадлежность функций пространствам Соболева: одномерный и многомерный случаи;
      d) отработка некоторых понятий на одномерном случае:
         i) вывод простейших теорем вложения, следы;
         ii) продолжение функций из W^1_p вовне отрезка с сохранением класса (оператор продолжения, его норма);
         iii) приближение функций усреднениями, разные ядра усреднения;
         iv) связь с понятием классической производной;

e) примеры применения обобщенных производных (задачи с разрывными данными).

II. **Факультативные** темы, из которых составляются недостающие *8 занятий*:

1. **Метод Римана в задаче Коши для гиперболических уравнений на плоскости, задача Гурса** (*1 занятие*).
2. **Свойства решений уравнений Лапласа, Гельмгольца, Коши–Римана** (*3 занятия*):
   a) теорема о среднем и уравнение Дарбу;
   b) свойства собственных функций (СФ) оператора Лапласа, формулы Грина;
   c) принцип максимума;
   d) неравенство Гарнака;
   e) теоремы о разрывной мажоранте, устранимой особенности;
   f) задача Гильберта.
3. **Функции Грина краевых задач для уравнения Пуассона** (*2 занятия*):
   a) случай многих переменных (метод отражения);
   b) на плоскости (метод конформных отображений на круг).
4. **Теория потенциала** (*2 занятия*):
   a) поведение и вид потенциалов при наличии симметрий;
   b) взаимосвязь потенциалов разных типов и размерностей (предельные переходы).
5. **Одномерное уравнение теплопроводности** (*3 занятия*):
   a) автомодельные решения, примеры применения (задача Стефана);
   b) задача Коши, формула Пуассона;
   c) принцип Дюамеля;
   d) принцип максимума, связь с корректностью;
   e) поведение решений при больших временах.
6. **Многомерное волновое уравнение** (*3 занятия*):
   a) анализ качественных свойств решений на основе формул Кирхгофа и Пуассона: области влияния и единственности, принцип Гюйгенса;
   b) специальные решения: сферические, цилиндрические и плоские волны; метод спуска.
7. **Метод разделения переменных как разложение по СФ стационарного оператора** (*2 занятия*):
   a) краевые и начально-краевые задачи для уравнений теплопроводности, Пуассона и волнового уравнения в параллелепипеде, цилиндре и шаре;
   b) СФ оператора Лапласа в круге, цилиндре, шаре; сферические функции; однородные гармонические полиномы;
   c) функции Бесселя и Лежандра, их основные свойства.
8. **Метод разделения переменных в смешанных задачах для гиперболических систем** (*2 занятия*).
9. **Элементы теории нелинейных УЧП** (*1 занятие*).

Литература.

1. Основная:
   1.1. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., Физматлит, 2001.
   1.2. Годунов С.К., Золотарева Е.В. Сборник задач по уравнениям математической физики. Новосиб., НГУ, 1987.
   1.3. Мамонтов А.Е., Мамонтов Е.В. Сборник задач по уравнениям математической физики, Новосиб., НГУ, 2006.
   1.4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва, Ижевск, РХД, 2000.
2. Дополнительная:
   2.1. Белов В.В., Воробьев Е.М. Сборник задач по дополнительным главам математической физики. М., Высшая школа, 1978.
   2.2. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., Наука, 1985.
   2.3. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М., Физматлит, 2003.
   2.4. Вентцель Т.Д., Горицкий А.Ю. и др. Сборник задач по уравнениям с частными производными. М., Бином, 2005.
   2.5. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. М., Наука, 1975.