Обыкновенные дифференциальные уравнения

доцент А.Е.Мамонтов

Часть I. Базовые понятия теории ОДУ.

1. **Введение.** Основные понятия об ДУ, ОДУ и их решениях. Минимальные требования к системе и к решению. Сведение произвольной системы ОДУ к нормальной системе I порядка. Задача Коши.
2. **Локальные теоремы существования и единственности.** Теоремы Пеано, Осгуда и Коши–Пикара; лемма Адамара. Другие теоремы единственности. Случай линейных систем (глобальная теорема). Переформулировка всех результатов для систем высшего порядка.
3. **Некоторые приемы интегрирования ОДУ I порядка при n=1.** Уравнения с разделяющимися переменными, линейные ОДУ, уравнения в полных дифференциалах. ОДУ, не разрешенные относительно производной.
4. **Глобальная разрешимость задачи Коши.** Понятия продолжения решений и непродолжаемого решения (НР). Формулировка теоремы Коши–Пикара в терминах НР. Поведение НР вблизи концов, теорема о покидании компакта. Признаки глобального существования НР.
5. **Зависимость решений ОДУ от параметров.** Лемма Гронуолла. Непрерывная зависимость от параметров в правой части и от начальных данных. Дифференциальная зависимость от параметров в правой части (первый порядок). Дифференциальная зависимость от начальных данных. Дальнейшее дифференцирование решений по параметрам.

Часть II. Линейные ОДУ.

1. **Общие свойства нормальной линейной системы I порядка и одного линейного ОДУ высокого порядка.** Пространство решений однородной системы, его размерность. Линейная зависимость, вронскиан. ФСР и ФМР. Теорема Остроградского–Лиувилля. Неоднородные системы. Непрерывная зависимость решений линейных систем от коэффициентов и данных Коши. Переформулировка всех результатов для ОДУ высокого порядка. Понижение порядка уравнения или системы.
2. **Линейные ОДУ с постоянными коэффициентами.** Система I порядка с постоянной матрицей, матричная экспонента. Вычисление матричной экспоненты и связь с понятием функции от матрицы вообще. Свойства матричной экспоненты, поведение при больших t. Линейное ОДУ высокого порядка с постоянными коэффициентами. Алгоритм построения ФСР. Явное построение решения неоднородного ОДУ. Уравнение Эйлера.
3. **Краевые задачи на отрезке.** Критерий безусловной разрешимости в терминах ФМР, единственность и непрерывная зависимость. Эквивалентная формулировка в терминах однородной задачи. Матрица Грина. Ситуация нарушения корректности. Переформулировка всех результатов для ОДУ высокого порядка. Функция Грина. Частный случай уравнения второго порядка. Самосопряженная форма записи уравнения.
4. **Задача Штурма–Лиувилля.** Краевая задача для уравнения второго порядка с параметром, задача о собственных значениях и собственных функциях. Элементарные свойства СЗ и СФ. Лемма Штурма о нулях. Перемежение нулей. Преобразование Прюфера. Теорема о колебании. Доказательство основной теоремы о счетной системе СЗ и СФ и о нулях СФ.
5. **Краевые задачи на бесконечных интервалах для линейных ОДУ с постоянными коэффициентами.** Задача на прямой для системы I порядка. Критерий безусловной разрешимости задачи в терминах спектра матрицы. Матрица Грина. Задача на полупрямой для системы I порядка. Сведение задачи к алгебраической, условие Лопатинского. Теория краевых задач на прямой или полупрямой для уравнений высокого порядка как следствие; формулировка результатов в «собственных» терминах.
6. **Линейные ОДУ с периодическими коэффициентами.** Постановка задачи для систем I порядка. Проблема нетривиальных ω-периодических решений (ОПР) однородной системы. Свойства ФМР, матрицы монодромии (ММ); мультипликаторы. Форма Флоке. Нормальные решения, структура всех решений и ОПР однородной системы. ОПР неоднородной системы, формулировка в виде краевой задачи. Критерий однозначного нахождения ОПР. ОПР для уравнения высокого порядка.

Часть III. Дальнейшая теория нелинейных ОДУ; УЧП I порядка.

1. **Автономные ОДУ.** Фазовое пространство и траектории, особые точки (ОТ). Фазовые портреты и их общие топологические свойства. Случаи n=1,2. Построение глобальных фазовых портретов на основе локальных в окрестностях ОТ (принцип линеаризации). Классификация ОТ для линейной системы на плоскости с постоянными коэффициентами. Автономные уравнения высокого порядка.
2. **Устойчивость по Ляпунову: базовые сведения.** Понятия устойчивости и асимптотической устойчивости (АУ) по Ляпунову. Формулировки в терминах возмущений. Случай линейных систем, формулировка в терминах ФМР. Частные случаи: постоянная матрица; периодическая матрица; стабилизирующаяся матрица. Переформулировка всех результатов для уравнений высокого порядка. Примеры. Трудности с применением спектральных критериев.
3. **Устойчивость точек покоя автономных систем.** Теоремы Ляпунова об устойчивости и АУ. Теоремы Четаева и Ляпунова о неустойчивости. Понятия вполне неустойчивости и условной устойчивости. Проблема построения функций Ляпунова (ФЛ) или Четаева. Эквивалентность АУ существованию ФЛ. Квадратичные ФЛ для линейных

систем: сведение к матричному уравнению Ляпунова, его решение. Теоремы об устойчивости и неустойчивости по первому приближению.

4. **Первые интегралы (ПИ) ОДУ; квазилинейные УЧП I порядка.** Понятие ПИ, его критерий в виде УЧП. Теорема о числе независимых ПИ и их локальном построении. Понижение порядка системы при известных ПИ. Применение ПИ для решения линейных однородных УЧП I порядка. Задача Коши и характеристики для неоднородных линейных УЧП I порядка, локальная однозначная разрешимость задачи Коши. Квазилинейные УЧП I порядка, их характеристики. Интегральная гиперповерхность, задача Коши и ее геометрический смысл; ее локальная однозначная разрешимость. Глобальная разрешимость задачи Коши. Единственность глобального решения с «правильной» областью определения. Построение общего решения и решения задачи Коши с помощью ПИ.

Литература

1. Обязательная (на которой в основном построен курс):
   1.1. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991.
   1.2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.
2. Обязательная (содержит небольшие фрагменты курса):
   2.1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
   2.2. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1962.
3. Дополнительная:
   3.1. Годунов С.К. Квадратичные функции Ляпунова. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 1982.
   3.2. Годунов С.К. Матричная экспонента, матрица Грина и условие Лопатинского. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 1983.
   3.3. Годунов С.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Т. 1: Краевые задачи. Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 1994.
   3.4. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 2002.
   3.5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959.
4. Дополнительная (для углубленного изучения):
   4.1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Издательство "РХД", Москва–Ижевск, 2000.
   4.2. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
   4.3. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976.
   4.4. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
   4.5. Блохин А.М. Равномерная ограниченность матричной экспоненты. Методические указания к курсу «Обыкновенных дифференциальных уравнений». Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 1986.
   4.6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
   4.7. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1949.
   4.8. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
   4.9. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964.
   4.10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: УРСС, 2002.
   4.11. Эрроусмат Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир, 1986.

Рекомендуемый план семинарских занятий

I семестр (16 занятий)

1. **Знакомство с ОДУ** [1, §1] (*1 занятие*).
2. **Приемы решения ОДУ в явном виде.I: уравнения I порядка в полных дифференциалах – общая конструкция и частные случаи** [1, §§2-6] (*4 занятия*).
3. Контрольная работа № 1.
4. **Существование, единственность и качественное поведение решений ОДУ** [1, §7] (*4 занятия*).
5. **Приемы решения ОДУ в явном виде.II: не разрешенные относительно производной (I порядка) и понижение порядка** [1, §§8,10] (*1 занятие*).
6. **Линейные уравнения и системы** [1, §§11,12,14], [2, §1] (*4 занятия*).
7. Контрольная работа № 2.

II семестр (14 занятий)

8. **Краевые задачи для линейных ОДУ** [1, §13], [2, §2] (*4 занятия*).
9. Контрольная работа № 3.
10. **Зависимость решений ОДУ от параметров** [1, §18] (*1 занятие*).

11. **Автономные ОДУ, их особые точки. Фазовое пространство** [1, §§16,17] (*2 занятия*).
12. **Устойчивость решений ОДУ** [1, §15], [2, §3] (*4 занятия*).
13. **Приемы решения ОДУ в явном виде.III: автономные нелинейные системы, их I интегралы. Элементы линейных и квазилинейных УЧП I порядка** [1, §§19-20] (*2 занятия*).

Литература.

1. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва, Ижевск, РХД, 2000.
2. Годунов С.К., ред. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Новосибирск, НГУ, 1986.