ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Новосибирский государственный университет

С.Л. Гаврилюк, Н.И. Макаренко, С.В. Сухинин

ВОЛНЫ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

Учебное пособие

Допущено УМО по классическому университетскому
образованию в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений

Новосибирск
2011

УДК 517

Гаврилюк С.Л., Макаренко Н.И., Сухинин С.В. Волны в сплошных средах // Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2011.

Учебное пособие соответствует программе курса лекций и семинаров "Волны в сплошных средах", читаемого студентам 4-го курса механико-математического факультета НГУ. Элементы данного курса читаются также студентам геолого-геофизического факультета НГУ и студентам Университета Aix – Marseille (Франция). Основной целью курса является изучение математических моделей волновых процессов и овладение методами их исследования. Пособие содержит теоретический материал по всем разделам курса, иллюстрируемый примерами и решениями типовых задач. Каждая из глав сопровождается списком задач и упражнений различной степени трудности для практических занятий и семестровых заданий.

Пособие предназначено для студентов старших курсов университетов, аспирантов и научных работников в области механики сплошных сред и прикладной математики.

Издание осуществлено при финансовой поддержке национального проекта "Образование"и гранта N 2.1.1.4918 "Математические проблемы динамики сильно неоднородных сред" Министерства образования и науки Российской Федерации.

Оглавление

Предисловие

Волновые явления встречаются повсеместно в природе и поэтому уже давно изучаются во многих естественнонаучных дисциплинах. Математическая теория волн выделилась в большое самостоятельное научное направление в середине 70-х годов двадцатого столетия. Это произошло благодаря ее многочисленным применениям в естествознании и технике, стимулировавшим бурное развитие соответствующих математических методов.

Курс "Волны в сплошных средах"является составной частью цикла дисциплин по механике сплошных сред и математическому моделированию, входящих в программу обучения студентов механико-математического факультета Новосибирского государственного университета. В НГУ данный лекционный курс был впервые прочитан академиком Л.В. Овсянниковым, которому принадлежит целый ряд основополагающих результатов в волновой гидродинамике. Сформулированные им принципы отбора материала использовались авторами пособия при чтении нескольких вариантов курса лекций студентам разных специальностей — математикам, механикам и геофизикам.

Данное учебное пособие содержит упражнения для практических занятий и задачи для индивидуальных семестровых заданий, требующие от студентов развития навыков самостоятельной работы. Эти задачи прошли тщательный отбор и многолетнюю апробацию в ходе преподавания на механико-математическом и геолого-геофизическом факультетах НГУ, а также Университета Aix – Marseille (Франция). Для облегчения работы в пособие включен необходимый теоретический материал, приведены иллюстрирующие примеры и образцы решения некоторых типичных задач. Большинство задач снабжены ответами к решению, а наиболее трудные из них — указаниями.

Два первых раздела знакомят читателя с основными понятиями и алгоритмами математической теории волн. Представленные здесь задачи связаны с выявлением свойств гиперболичности и дисперсии волновых систем. Эти упражнения развивают навыки отыскания характеристик, инвариантов

Римана и законов сохранения для систем квазилинейных уравнений гиперболического типа. Здесь же предполагается построение и анализ решений со слабыми и сильными разрывами, описывающих гиперболические волны.

Задачи второй части подразумевают вывод и исследование дисперсионных соотношений, нахождение фазовых и групповых скоростей для волн, описываемых дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями, построение асимптотик решений систем с дисперсией. Часть задач посвящена построению и исследованию решений типа бегущих волн для моделей, сводящихся к нелинейным эволюционным уравнениям. Большинство задач первой и второй частей формулируется в рамках и терминах моделей волновых процессов, возникающих в газовой динамике и магнитной гидродинамике, теории упругости и пластичности, линейной и нелинейной акустике, химической кинетике. Тем самым преследуется цель попутного ознакомления с конкретными математическими моделями, встречающимися в теории волн.

Все задачи третьей части относятся к теории поверхностных и внутренних волн в несжимаемой жидкости. Эффективность математических методов здесь последовательно иллюстрируется на примере одной общей гидродинамической модели, порождающей иерархию приближенных подмоделей. Часть задач данного раздела заимствована из классической линейной теории поверхностных волн и теории длинных волн на мелкой воде. Другая часть сформулирована для нелинейных уравнений поверхностных волн с дисперсией и уравнений внутренних волн в неоднородной (стратифицированной по плотности) жидкости. Кроме того, некоторые задачи иллюстрируют влияние эффектов вязкости и завихренности.

Каждый из трех разделов сопровождается списком дополнительной литературы, в котором указаны источники для самостоятельного углубленного изучения предмета. В то же время авторы стремились к замкнутому изложению материала, базирующемуся на лекционном курсе и вполне достаточному для решения задач. Большую помощь при подготовке пособия к изданию оказали коллеги по кафедре гидродинамики НГУ, которым авторы выражают свою искреннюю признательность. Мы особо благодарны безвременно ушедшему члену-корреспонденту РАН В.М. Тешукову за многочисленные обсуждения, советы и замечания.

Основная литература

1. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред в приложении к теории волн. М.: Наука, 1982. 336 с.

2. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.

3. Овсянников Л.В. Волновые движения сплошных сред. Методическая разработка. Новосибирск, НГУ, 1985.

4. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир. 1977. 624 с.

1. Гиперболические волны

1.1. Гиперболические системы

Рассматриваются квазилинейные системы уравнений первого порядка

$$\mathbf{u}_t + A(\mathbf{u}, x, t)\mathbf{u}_x + \mathbf{b}(\mathbf{u}, x, t) = 0 \tag{1}$$

с матрицей A порядка $n \times n$ и вектором $\mathbf{b}$, зависящими от x, t и $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$. Направление $dx/dt = c$ называется *характеристическим*, если существует такая линейная комбинация уравнений (1), в которой каждая из искомых функций u_i дифференцируется в этом направлении. Величина c, задающая характеристическое направление, является собственным значением матрицы A:

$$det\,(A - cI) = 0. \tag{2}$$

Для каждого собственного значения c и соответствующего ему левого собственного вектора $\mathbf{l}$ матрицы A, $\mathbf{l}A = c\mathbf{l}$, следствием уравнений (1) является условие на характеристике

$$\mathbf{l} \cdot (d_t\mathbf{u} + \mathbf{b}) = 0, \tag{3}$$

где $d_t = \partial_t + c\partial_x$ — оператор дифференцирования вдоль характеристики.

Система (1) называется *гиперболической*, если существуют n линейно независимых вещественных левых собственных векторов матрицы A. Гиперболическая система уравнений эквивалентна системе n соотношений на характеристиках. Система гиперболична тогда и только тогда, когда все корни характеристического уравнения (2) вещественны и нормальная жорданова форма матрицы A диагональна. Достаточными условиями для этого являются: (а) матрица A симметрична; (б) все корни уравнения (2) вещественны и различны. В последнем случае, когда матрица A не имеет кратных собственных значений, гиперболическая система (1) называется *строго гиперболической* системой.

Пример. Процесс химической сорбции, используемый для разделения веществ в жидкой или газообразной смеси методом хроматографии, описывается системой уравнений

$$\partial_t\,(\mathbf{u}+\mathbf{f}(\mathbf{u}))+v\,\partial_x\mathbf{u}=0. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{u}=(u_1,...,u_n)$ — концентрации разделяемых веществ в смеси, пропускаемой через сорбционную колонку, $\mathbf{f}(\mathbf{u})=(f_1(u),...,f_n(u))$ — концентрации этих же веществ, поглощенных сорбентом, $v=const>0$ — скорость движения смеси. Пусть вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{u})$, называемая изотермой сорбции, такова, что все собственные значения матрицы Якоби $\mathbf{f}'(\mathbf{u})=\partial(f_1,...,f_n)/\partial(u_1,...,u_n)$ вещественны, положительны и различны: $0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n$. Тогда исходные уравнения (4) можно преобразовать к виду (1) с матрицей $A(\mathbf{u})=v\,(I+\mathbf{f}'(\mathbf{u}))^{-1}$ и вектором $\mathbf{b}=0$. Поскольку

$$A-cI=\Big((v-c)I-c\,\mathbf{f}'(\mathbf{u})\Big)\,(I+\mathbf{f}'(\mathbf{u}))^{-1},$$

собственные значения матрицы A связаны с собственными значениями матрицы $\mathbf{f}'(\mathbf{u})$ равенствами $c_j=v/(1+\lambda_j)$ $(j=1,2,...,n)$. Следовательно, в рассматриваемой ситуации система (4) является строго гиперболической, причем все ее характеристические скорости положительны и не превосходят скорости движения смеси. Различие этих скоростей $c_i\neq c_j$ $(i\neq j)$ лежит в основе метода хроматографии.

Соотношение (3) равносильно уравнению $d_t\,r(\mathbf{u})=-\mu\,\mathbf{l}\cdot\mathbf{b}$, если существуют скалярные функции $r(\mathbf{u})$ и $\mu(\mathbf{u},x,t)$, для которых

$$\frac{\partial r}{\partial u_i}=\mu\,l_i\quad(i=1,...,n).$$

Величина $r(\mathbf{u})$ называется *инвариантом Римана.* Мотивировка этого названия становится ясной в случае $\mathbf{l}\cdot\mathbf{b}=0$, когда инвариант Римана r постоянен вдоль характеристики. Инварианты Римана всегда существуют для системы (1), состоящей из одного или двух уравнений. При $n\geqslant 3$ инварианты могут не существовать.

Задача. Найти характеристики и инварианты Римана для системы уравнений длинных волн в слое жидкости над ровным дном

$$h_t+(uh)_x=0,\quad u_t+uu_x+gh_x=0, \tag{5}$$

где $h(x,t)$ — глубина слоя, $u(x,t)$ — горизонтальная скорость жидкости, g — ускорение силы тяжести.

Решение. *Составляя матрицу коэффициентов исходной системы уравнений, получаем:*

$$A - c\,I = \begin{pmatrix} u-c & h \\ g & u-c \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим характеристические скорости $c^{\pm} = u \pm \sqrt{gh}$*. Система является гиперболической в области* $h > 0$*. Для характеристики* $dx/dt = c^{+}$ *левый собственный вектор, определяемый с точностью до произвольного скалярного множителя, имеет вид* $l = (\sqrt{g}, \sqrt{h})$*. Следовательно, для отыскания инварианта Римана* $r(h,u)$ *получаем систему уравнений*

$$\frac{\partial r}{\partial h} = \mu\,\sqrt{g}, \quad \frac{\partial r}{\partial u} = \mu\,\sqrt{h},$$

где $\mu(h,u)$ *— неизвестный интегрирующий множитель. Исключая этот множитель, получаем линейное уравнение в частных производных первого порядка для функции* r

$$\frac{\partial r}{\partial u} - \sqrt{\frac{h}{g}}\,\frac{\partial r}{\partial h} = 0.$$

Составляя для него уравнение характеристик $du = -\sqrt{g/h}\;dh$*, находим первый интеграл* $r = u + 2\,\sqrt{gh}$*. Поскольку в определении инварианта Римана имеется функциональный произвол, найденный первый интеграл можно взять в качестве искомого инварианта. Характеристика* $dx/dt = c^{-}$ *рассматривается аналогично.*

Ответ: $\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{gh}: \;\; u + 2\sqrt{gh} = const;$ $\qquad \frac{dx}{dt} = u - \sqrt{gh}: \;\; u - 2\sqrt{gh} = const.$

1.2. Распространение слабых разрывов

Задача Коши для системы уравнений (1) ставится следующим образом: при $t = t_0$ заданы значения $u_i(x,t_0) = u_{i0}(x)$, требуется найти решение при $t > t_0$.

Теорема единственности. Пусть система (1) гиперболична, а коэффициенты матрицы A и вектора $\mathbf{b}$ непрерывно дифференцируемы. Пусть кусочно-гладкое непрерывное решение $\mathbf{u}(x,t)$ определено в характеристическом треугольнике X_1MX_n. Тогда если если $\bar{\mathbf{u}}$ — непрерывное кусочно-гладкое решение системы (1), определенное в X_1MX_n, и если $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ на отрезке X_1X_n, то $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ во всем характеристическом треугольнике X_1MX_n.

Из этой теоремы вытекает существование волновых фронтов, разделяющих состояния покоя и движения. Пусть область D разделена гладкой кривой $\Gamma: \; x = \chi(t)$ на две подобласти D_- и D_+. Предполагается, что решение гиперболической системы уравнений непрерывно в замкнутой области $\overline{D}$ и является непрерывно дифференцируемым в замыканиях $\overline{D}_-$ и $\overline{D}_+$. При этом допускается, что на линии Γ производная решения $\partial_x \mathbf{u} = \mathbf{v}$ может иметь разрыв первого рода со скачком $[\mathbf{v}] = \mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-$. В силу непрерывности решения $\mathbf{u}$ скачок его касательной производной $d_t\mathbf{u} = \partial_t \mathbf{u} + \chi'(t)\partial_x \mathbf{u}$ на линии Γ равен нулю, откуда следуют выражения для скачков производных

$$[\partial_x \mathbf{u}] = [\mathbf{v}], \quad [\partial_t \mathbf{u}] = -\chi'[\mathbf{v}].$$

Следовательно, в силу системы (1) имеем $(A - \chi' I)[\mathbf{v}]$. Таким образом, разрыв производной решения возможен только на характеристике, причем сам скачок является правым собственным вектором матрицы A. В случае простого собственного значения матрицы A амплитуда слабого разрыва характеризуется скалярным множителем σ, с которым $[\mathbf{v}] = \sigma\,\mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_n)$ — заданный правый собственный вектор. Величина σ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению вдоль характеристики

$$(\mathbf{l}\cdot\mathbf{r})\, d_t\sigma + P\,\sigma \,+\, Q\,\sigma^2 = 0, \tag{6}$$

где P и Q — известные функции. В частности, $Q = \sum\limits_{i,j,k=1}^{n} l_i\,(\partial a_{ij}/\partial u_k)\, r_k r_j$. Соотношение (6), по своему виду являющееся уравнением Риккати, называется транспортным уравнением для амплитуды слабого разрыва.

Задача. Для системы уравнений одномерного изэнтропического движения политропного газа

$$\begin{cases} r_t + (u+c)\, r_x = 0, \\ l_t + (u-c)\, l_x = 0, \end{cases} \qquad r = u + \frac{2}{\gamma-1}\, c, \quad l = u - \frac{2}{\gamma-1}\, c$$

заданы начальные данные

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x \geqslant a, \\ c_0\,(x-a)/(l_0+a-x), & x < a, \end{cases} \qquad c(x,0) = c_0,$$

где $a = const$, $c_0 = const$, $l_0 = const$ $(c_0 > 0,\ l_0 > 0)$. Требуется вычислить скачок производной $[u_x]$ на характеристике $x = c_0\,t + a$ в момент времени t.

Решение. *Из теоремы единственности решения задачи Коши следует* $u(x,t) \equiv 0$, $c(x,t) \equiv c_0$ *при* $x \geqslant c_0\,t + a$. *Далее, для инварианта Римана* l *вдоль характеристики* $dx/dt = u + c$

имеем

$$[l_t]+(u-c)[l_x]=0,\qquad [l_t]+(u+c)[l_x]=0.$$

Первое из этих соотношений вытекает непосредственно из уравнений движения, второе означает непрерывность касательной производной инварианта l на линии слабого разрыва. Отсюда вдоль рассматриваемой характеристики получаем $[l_t]=0$, $[l_x]=0$ и, как следствие, $[u_x]=[r_x]/2$. Дифференцируя по x первое уравнение исходной системы и беря скачок, с учетом установленного свойства $l_x(x-0,t)=l_x(x+0,t)=0$ при $x=c_0\,t+a$ получаем транспортное уравнение

$$d_t\,[r_x]-\frac{\gamma+1}{4}\,[r_x]^2=0$$

с вытекающим из начальных данных условием $[r_x]=-c_0/l_0$ при $t=0$. Интегрирование уравнения дает для искомого скачка $[u_x]$ следующий результат.

Ответ:

$$[u_x]=-\frac{c_0}{2l_0+\frac{\gamma+1}{2}\,c_0\,t}.$$

1.3. Движения с сильными разрывами

Решения, описывающие распространение ударных волн, строятся на основе законов сохранения

$$\partial_t\,\boldsymbol{\varphi}(x,t,\mathbf{u})+\partial_x\boldsymbol{\psi}(x,t,\mathbf{u})=\mathbf{f}(x,t,\mathbf{u}) \tag{7}$$

с n-мерными векторами плотностей искомых величин $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,...,\varphi_n)$, их потоков $\boldsymbol{\psi}=(\psi_1,...,\psi_n)$ и источников $\mathbf{f}=(f_1,...,f_n)$. Не всякая система дифференциальных уравнений (1) может быть записана в дивергентной форме (7). Для моделей сплошных сред указанное свойство автоматически вытекает из формулировки основных уравнений в виде системы интегральных законов сохранения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{x_1}^{x_2}\boldsymbol{\varphi}(x,t,\mathbf{u})\,dx+\boldsymbol{\psi}(x,t,\mathbf{u})\Big|_{x=x_1}^{x=x_2}=\int\limits_{x_1}^{x_2}\mathbf{f}(x,t,\mathbf{u})\,dx. \tag{8}$$

Уравнения (1), допускающие представление в виде системы независимых законов сохранения с отличным от нуля якобианом $|\partial(\varphi_1,...,\varphi_n)/\partial(u_1,...,u_n)|\neq$

0 называются *консервативными.* В ряде случаев системы дифференциальных уравнений имеют дивергентные формы в большем количестве, чем число уравнений исходной системы. В такой ситуации выбор системы законов сохранения для описания движений с сильными разрывами определяется с учетом дополнительных условий (устойчивость решения, существование разрывного решения как предела гладких решений, физическая интерпретация законов сохранения и т.п.)

Задача. Найти все скалярные законы сохранения $\partial_t\varphi(u,v)+\partial_x\psi(u,v)=0$ с полиномиальными по v плотностями φ степени, не выше второй, для системы уравнений нелинейных упругих волн

$$u_t = v_x, \quad \rho_0\, v_t = \sigma_x, \quad \sigma = \sigma(u), \quad \rho_0 = const.$$

Решение. *Согласно определению закона сохранения имеем*

$$\varphi_u\, u_t + \varphi_v\, v_t + \psi_u\, u_x + \psi_v\, v_x = 0.$$

Исключая производные u_t и v_t в силу уравнений исходной системы и затем собирая и приравнивая нулю величины отдельно при u_x и v_x, получаем систему уравнений для φ, ψ

$$\rho_0\, \psi_u + \sigma'(u)\, \varphi_v = 0, \quad \psi_v + \varphi_u = 0.$$

Исключая отсюда перекрестным дифференцированием функцию ψ, получаем линейное уравнение в частных производных второго порядка для плотности φ

$$\rho_0\, \varphi_{uu} = \sigma'(u)\, \varphi_{vv}.$$

В задаче требуется найти все решения этого уравнения, имеющие вид $\varphi = \alpha(u)\, v^2 + \beta(u)\, v + \gamma(u)$. Для коэффициентов указанного полинома имеем следующие соотношения: $\alpha'' = 0$, $\beta'' = 0$, $\rho_0\, \gamma'' = 2\sigma'\alpha$. Их интегрирование дает пятимерное пространство квадратичных по v решений $\varphi = C_1\, \varphi_1 + ... + C_5\, \varphi_5$ с произвольными вещественными постоянными C_j и указанными ниже базисными плотностями φ_j.

Ответ:

$$\varphi_1 = u, \quad \varphi_2 = \rho_0\, v,\ \varphi_3 = uv,\ \varphi_4 = \frac{1}{2}\,\rho_0\, v^2 + \int\limits_0^u \sigma(\xi)\, d\xi, \quad \varphi_5 = \frac{1}{2}\,\rho_0\, uv^2 + \int\limits_0^u (2\xi - u)\,\sigma(\xi)\, d\xi.$$

Пусть решение $\mathbf{u}$ имеет разрыв первого рода на линии $x = X(t)$ и является гладким по обе стороны от нее. Выберем неподвижные пределы интегрирования x_1 и x_2 в интегральном законе сохранения (8) так, чтобы в данный момент времени было $x_1 < X(t) < x_2$. Разбивая промежуток интегрирования точкой $x = X(t)$ на две части и дифференцируя по времени возникающие интегралы, в пределе при $x_1 \to x_2$ получаем соотношения на сильном разрыве — условия Рэнкина–Гюгонио

$$D[\boldsymbol{\varphi}] = [\boldsymbol{\psi}], \tag{9}$$

где $D = \dot{X}(t)$ — скорость распространения сильного разрыва. Зафиксируем состояние с одной из сторон разрыва, задаваемое точкой $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ в пространстве $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Тогда в качестве геометрического места допустимых состояний по другую сторону волны будет выступать кривая в $\mathbb{R}^n$, задаваемая уравнениями (9). Эта кривая называется *ударной адиабатой*, она может состоять из нескольких гладких ветвей, проходящих через центр адиабаты $\mathbf{u}_0$.

Пример. Рассматривается система законов сохранения нелинейной теории упругости (7) с векторами $\boldsymbol{\varphi} = (u, v)$, $\boldsymbol{\psi} = -(v, \sigma(u)/\rho_0)$, $\mathbf{f} = 0$. Предполагается, что функция напряжений $\sigma(u)$ обладает свойствами $\sigma'(u) > 0$, $\sigma(0) = 0$, $\sigma'(0) = \lambda + 2\mu$ (здесь $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ — коэффициенты Ламе). Выписывая соотношения (9) на сильном разрыве, сопрягающем состояния (u_0, v_0) и (u, v), исключим из них скорость волны D. В результате возникает уравнение ударной адиабаты

$$\rho_0\,(v - v_0)^2 = \big\{\sigma(u) - \sigma(u_0)\big\}(u - u_0). \tag{10}$$

Данная кривая в плоскости переменных (u, v) (деформация и скорость материала) представляет собой геометрическое место состояний, которые получаются в результате прохождения ударной волны по состоянию (u_0, v_0). Ударная адиабата (10) состоит из двух ветвей, описывающих распространение волн влево ($v < v_0$) или вправо ($v > v_0$). Соответственно, для скорости волны получается выражение

$$D = \pm\sqrt{\frac{1}{\rho_0}\,\frac{\sigma(u) - \sigma(u_0)}{u - u_0}}.$$

Рассмотрим упругий полубесконечный стержень $x \geqslant 0$, который находится в равновесии под нагрузкой $\sigma_0 = \sigma(u_0)$, возникшей в результате однородной начальной деформации $u_0 = const$. При внезапном снятии нагрузки на конце стержня $x = 0$ он вернется в недеформированное состояние $u = 0$, $\sigma = 0$ в результате прохождения ударной волны разгрузки, бегущей вправо со скоростью $D = \sqrt{\frac{\sigma(u_0)}{\rho_0 u_0}}$. При малых начальных деформациях u_0

скорость ударной волны приближенно равна скорости $c_0 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}}$ линейной продольной упругой волны.

1.4. Кинематические волны

Кинематическими волнами называют класс одномерных движений сплошной среды, для которых задана зависимость $q = Q(\rho)$ массового расхода от плотности. Знание такой зависимости позволяет получить замкнутую модель движения, используя только лишь закон сохранения массы

$$\rho_t + q_x = 0. \tag{11}$$

Для конкретных сред функциональная связь между расходом и плотностью обычно находится опытным путем или в результате интегрирования других уравнений более общей модели. В приближении кинематических волн описание движения сводится к отысканию решений квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0,$$

где $c(\rho) = Q'(\rho)$ — характеристическая скорость.

Пример. Рассматривается модель кинематических волн в потоке автомобильного транспорта. В случае одностороннего движения функция Q, определенная на промежутке $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_*$, характеризуется свойствами

$$(a)\ Q(\rho) > 0 \quad (0 < \rho < \rho_*), \quad (b)\ Q''(\rho) < 0, \quad (c)\ Q(0) = Q(\rho_*) = 0. \tag{12}$$

В этой модели сплошной среды скорость "частиц"(отдельных автомобилей) равна величине $u = Q(\rho)/\rho$. Значение $\rho_* > 0$ дает предельную плотность автомобилей на дороге, когда они стоят вплотную бампер к бамперу, так что согласно второму из равенств (12c) движение оказывается невозможным. С другой стороны, согласно первому из равенств (12c) существует предел $u_0 = \lim\limits_{\rho\to 0} Q(\rho)/\rho > 0$, равный максимально допустимой скорости движения по свободному шоссе. Из условия (12b) вытекает, что $c'(\rho) < 0$, так что характеристическая скорость является монотонно убывающей функцией плотности ρ. Возмущения с резкими фронтами могут распространяться по потоку движущегося транспорта при его внезапном торможении в каком-либо месте.

Соотношение на сильном разрыве для закона сохранения (11) имеет вид $D[\rho] = [q]$, или в развернутой форме

$$D = \frac{Q(\rho_2) - Q(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1}. \tag{13}$$

Задача о распаде разрыва (задача Римана) для уравнения кинематических волн ставится как задача Коши с кусочно-постоянными начальными данными

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_1, & x < 0, \\ \rho_2, & x > 0, \end{cases}$$

где $\rho_i = const,\ \rho_1 \neq \rho_2$. Решение этой задачи существует в классе автомодельных движений $\rho = \rho(x/t)$ с сильными и слабыми разрывами. При $\rho_1 < \rho_2$ оно кусочно-постоянно и имеет сильный разрыв на прямой $x = Dt$, где величина D дается равенством (13). Согласно этой формуле

$$D = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} c(\rho)\, d\rho,$$

откуда в случае монотонно убывающей функции $c(\rho)$ следуют неравенства $c_1 > D > c_2$, где $c_i = Q'(\rho_i)$. Сильные разрывы, удовлетворяющие указанному условию, устойчивы. Если же начальные данные таковы, что $\rho_1 > \rho_2$, то для скорости распространения ударной волны выполнены противоположные неравенства $c_1 < D < c_2$ — указанные сильные разрывы неустойчивы по отношению к малым возмущениям начальных данных. В этом случае существует устойчивое непрерывное решение, имеющее вид центрированной волны с распределением характеристической скорости

$$c(x,t) = \begin{cases} c_1, & x < c_1\, t, \\ x/t, & c_1 t < x < c_2 t \\ c_2, & x > c_2\, t. \end{cases}$$

Таким образом, выбор устойчивого решения задачи о распаде разрыва для уравнения кинематических волн определяется знаком разности $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$.

Задача. Поток автомобилей движется со скоростью $u_0 > 0$ и плотностью ρ_0 по улице, на которой в момент времени $t = 0$ на светофоре, стоящем в точке $x = 0$, загорается красный свет. В приближении кинематических волн описать движение транспорта при $t > 0$ в окрестности светофора.

Решение. *В процессе движения при $t > 0$ слева от светофора должны быть сопряжены два состояния — набегающего потока транспорта со скоростью u_0 вдали от светофора и колонны неподвижных автомобилей с плотностью ρ_* в непосредственной близости от светофора. Эту ситуацию моделирует постановка задачи с разрывными в точке $x = 0,\ t = 0$ начально-краевыми условиями*

$$\rho(x, 0) = \rho_0 \ \ (x < 0), \qquad \rho(0, t) = \rho_*.$$

Поскольку $\rho_0 < \rho_*$, в движении возникает ударная волна (волна внезапной остановки автомобилей), которая распространяется назад по потоку транспорта. Согласно формуле (13) и ввиду свойства (12c) ее скорость равна величине $D_0 = -Q(\rho_0)/(\rho_* - \rho_0) < 0$. Далее, на участке дороги справа от светофора при $t > 0$ автомобили должны отсутствовать. Указанное состояние необходимо согласовать с уходящим потоком транспорта, успевшим пройти мимо светофора до красного света. Этому соответствует задача с разрывными данными

$$\rho(x, 0) = \rho_0 \ \ (x > 0), \qquad \rho(0, t) = 0.$$

Здесь возникает ударная волна, бегущая вправо со скоростью $D = (Q(\rho_0) - Q(0))/\rho_0$. Поскольку $Q(0) = 0$, фронт этой волны отмечает положение хвоста колонны автомобилей, уходящей от перекрестка с постоянной скоростью $u_0 = Q(\rho_0)/\rho_0$.

Ответ: $u = u_0,\ \rho = \rho_0\ (x < D_0\, t);\quad u = 0,\ \rho = \rho_*\ (D_0\, t < x < 0);$

$u = 0,\ \rho = 0\ (0 < x < u_0\, t);\quad u = u_0,\ \rho = \rho_0\ (x > u_0\, t).$

1.5. Многомерные волновые фронты

Рассматривается линейная система уравнений для n-мерного вектора $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$

$$\partial_t \mathbf{u} + \sum_{i=1}^{3} A^i \partial_{x_i} \mathbf{u} + B\mathbf{u} = 0 \tag{14}$$

с заданными матрицами $A^i(\mathbf{x}, t)$ и $B(\mathbf{x}, t)$ порядка $n \times n$, зависящими от t и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Пусть

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \tau t = const$$

— гиперплоскость в $\mathbb{R}^4$ с нормальным вектором $\boldsymbol{\nu} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau)$. Направление $\boldsymbol{\nu}$ называется *характеристическим*, если для него выполнено соотношение

$$det\,(\tau I + \sum_{i=1}^{3} \xi_i A^i) = 0. \tag{15}$$

Система (14) называется *гиперболической* в точке $(\mathbf{x}, t)$, если уравнение (15) при любых $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ имеет n вещественных корней $\tau_k = H_k(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{x}, t)$ $(k = 1, ..., n)$, а характеристическая матрица $A(\boldsymbol{\nu}) = \tau I + \sum\limits_{i=1}^{3} \xi_i A^i$ обладает набором n линейно независимых векторов $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\mathbf{l} \cdot A(\boldsymbol{\nu}) = 0$.

Гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^4$, для которой касательная гиперплоскость в каждой точке имеет характеристическое направление, называется *характеристикой* системы (14). Пусть характеристика, соответствующая корню $\tau = H(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{x}, t)$, задается уравнением

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = 0.$$

Тогда ее нормаль $\boldsymbol{\nu} = (\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \varphi_{x_3}, \varphi_t)$ имеет характеристическое направление, и поэтому функция φ должна удовлетворять нелинейному уравнению в частных производных первого порядка — уравнению Гамильтона—Якоби

$$\varphi_t = H(\nabla_{\mathbf{x}}\varphi;\, \mathbf{x}, t). \tag{16}$$

Характеристики этого уравнения называются *бихарактеристиками* системы (14). В теории волн их называют *лучами*. Дифференциальные уравнения для бихарактеристик имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

где $p_i = \partial\varphi/\partial x_i$. Для линейной гиперболической системы (14) с постоянными матрицами A^i функция H не зависит от $\mathbf{x}$ и t, и поэтому имеем $dp_i/dt = 0$, так что правые части $H_{p_i}(p_1, p_2, p_3)$ дифференциальных уравнений для x_i постоянны вдоль лучей. Следовательно, сами лучи в этом случае прямолинейны,

$$x_i = x_i^{(0)} - H_{p_i}^{(0)}\, t.$$

Задача. Фронт двумерной звуковой волны, распространяющейся по покоящемуся газу со скоростью звука c_0, при $t = 0$ имеет форму параболы $y = x^2$. Найти время T, за которое звук достигнет наблюдателя, находящегося в точке $A(3, 0)$.

Решение. *Уравнения акустики в покоящемся газе имеют вид*

$$\rho_0\, u_t + p_x = 0, \quad \rho_0\, v_t + p_y = 0, \quad p_t + \rho_0\, c_0^2\, (u_x + v_y) = 0,$$

где u, v — компоненты вектора скорости, p — возмущение давления. Записывая эту систему в матричном виде (14) и составляя характеристический определитель с нормальным вектором $\nu = (\xi, \eta, \tau)$, получаем

$$det\,(\tau\, I + \xi\, A^x + \eta\, A^y) = \begin{vmatrix} \tau & 0 & \xi/\rho_0 \\ 0 & \tau & \eta/\rho_0 \\ \rho_0 c_0^2 \xi & \rho_0 c_0^2 \eta & \tau \end{vmatrix} = \tau\, \left(\tau^2 - c_0^2(\xi^2 + \eta^2)\right) = 0.$$

Отсюда для звуковых характеристик имеем $H(p, q) = \pm c_0 \sqrt{p^2 + q^2}$, где $p = \varphi_x$, $q = \varphi_y$ ($\varphi(x, y, t) = 0$ — положение фронта в момент времени t). Поскольку функция H не зависит от x, y, бихарактеристики прямолинейны. Интегрирование дает уравнения звуковых лучей в виде

$$x = x_0 \pm \frac{p_0\, c_0\, t}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}}, \quad y = y_0 \pm \frac{q_0\, c_0\, t}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}}.$$

Следовательно, бихарактеристики в каждый момент времени направлены по нормали к фронту, причем возмущения распространяются вдоль лучей с постоянной скоростью c_0. Это означает, что наблюдателя раньше всего достигнет возмущение, идущее из точки $B(x, x^2)$ в начальном положении фронта, ближайшей к A. Минимум расстояния $|AB|$ достигается в точке B с абсциссой, удовлетворяющей условию экстремума $2x^3 + x - 3 = 0$. Такая точка единственна — $B(1, 1)$, соответствующее расстояние равно $\sqrt{5}$.

Ответ: $T = \sqrt{5}/c_0$.

В ряде случаев уравнение характеристической поверхности удобно искать в виде $t = \psi(\mathbf{x})$. В силу уравнения (16) с $\varphi = \psi(\mathbf{x}) - t$ функция ψ должна удовлетворять уравнению

$$H(\nabla_{\mathbf{x}}\psi) = -1.$$

Это уравнение называется уравнением *эйконала*. Система уравнений для бихарактеристик в данном случае упрощается до следующей:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

где $q_i = \partial\psi/\partial x_i$.

1.6. Симметризация законов сохранения

Рассмотрим систему квазилинейных уравнений

$$A(\mathbf{u})\,\partial_t \mathbf{u} + \sum_{i=1}^{3} B^i(\mathbf{u})\,\partial_{x_i}\mathbf{u} = 0 \qquad (17)$$

с искомой вектор-функцией $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$, зависящей от переменных t и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Предполагается, что квадратные матрицы $A(\mathbf{u})$ и $B^i(\mathbf{u})$ порядка $n \times n$ симметричны, причем матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ положительно определена: $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,p_i p_j > 0$ для любого вектора $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$, $\mathbf{p} \neq 0$. Система (17) с указанными матрицами носит название *симметрической* t *– гиперболической системы уравнений по Фридрихсу.*

Ясно, что система уравнений (1) с двумя независимыми переменными t, x и симметричной матрицей A является симметрической t – гиперболической системой по Фридрихсу. Свойство t – гиперболичности вместе со свойством консервативности играет важную роль при анализе качественных свойств таких систем и их численном решении. Поэтому полезно уметь приводить заданную гиперболическую систему квазилинейных уравнений к симметрическому виду (17). Такое приведение возможно в следующем случае.

Теорема (*Годунов, Фридрихс, Лакс*). Пусть система законов сохранения

$$\partial_t \mathbf{u} + \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} \boldsymbol{\psi}^i(\mathbf{u}) = 0 \qquad (18)$$

допускает дополнительный закон сохранения

$$\partial_t e(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} f^i(\mathbf{u}) = 0, \qquad (19)$$

где функция $e(\mathbf{u})$ является выпуклой по переменным $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$, т.е. матрица Гессе $e''(\mathbf{u}) = (\partial_{u_i}\partial_{u_j}\, e(\mathbf{u}))_{i,j=1}^n$ является положительно определенной. Тогда система (18) приводится к виду (17).

Доказательство. *Одновременное выполнение уравнений (18) и (19) влечет выполнение условий совместности*

$$\nabla_u f^i(\mathbf{u}) = \nabla_u e(\mathbf{u})\big(\boldsymbol{\psi}^i(\mathbf{u})\big)' \quad (i = 1, ..., n) \tag{20}$$

для скалярных функций f^i *и вектор-функций* $\boldsymbol{\psi}^i$. *Введем преобразование Лежандра* $e^*(\mathbf{v})$ *функции* $e(\mathbf{u})$, *полагая*

$$e^*(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - e(\mathbf{u}),$$

где вектор $\mathbf{u}$ *определяется неявно уравнением* $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{u}} e(\mathbf{u})$. *Обращение указанной зависимости* $\mathbf{v}$ *от* $\mathbf{u}$ *возможно, поскольку якобиан* $|\partial(v_1, ..., v_n)/\partial(u_1, ..., u_n)| = \det e''(\mathbf{u})$ *отличен от нуля в случае выпуклой функции* $e(\mathbf{u})$. *При этом, очевидно, имеем* $\mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{v}} e^*(\mathbf{v})$. *Более того, функция* $e^*(\mathbf{v})$ *также является выпуклой функцией от* $\mathbf{v}$. *Введем дополнительно функции*

$$f^{i*}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi}^i(\mathbf{u}) - f^i(\mathbf{u}) \quad (i = 1, ..., n).$$

Тогда в силу соотношения (20) получаем $\boldsymbol{\psi}^i(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{v}} f^i(\mathbf{v})$. *Следовательно, система уравнений (18) может быть записана в виде*

$$\partial_t \nabla_{\mathbf{v}} e^*(\mathbf{v}) + \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} \nabla_{\mathbf{v}} f^{i*}(\mathbf{v}) = 0,$$

т.е. в виде (17) с матрицами Гессе $A(\mathbf{v}) = (\partial_{v_k}\partial_{v_j}\, e^*(\mathbf{v}))_{k,j=1}^n$ *и* $B^i(\mathbf{v}) = (\partial_{v_k}\partial_{v_j}\, f^{i*}(\mathbf{v}))_{k,j=1}^n$

•

Доказательство данной теоремы содержит конструктивный метод симметризации систем законов сохранения.

Пример. Рассматривается система уравнений с двумя независимыми переменными t и x

$$h_t + (uh)_x = 0, \quad (hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}\, gh^2\right)_x = 0, \tag{21}$$

представляющая собой дивергентную форму записи уравнений мелкой воды (5) в виде системы законов сохранения массы и импульса. В качестве дополнительного закона сохранения (19) воспользуемся законом сохранения энергии

$$\partial_t e(h, u) + \partial_x f(h, u) = 0$$

с функциями

$$e = \frac{1}{2}\, u^2 h + \frac{1}{2}\, gh^2, \qquad f = \frac{1}{2}\, u^3 h + guh^2.$$

Запишем сначала уравнения (21) в исходной форме (18) с вектором плотностей сохраняющихся величин $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, где $u_1 = h,\ u_2 = uh$. В этих обозначениях для функций e, f и компонент вектора $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ имеем выражения

$$e(\mathbf{u}) = \frac{u_2^2}{2u_1} + \frac{1}{2}\, g u_1^2, \quad f(\mathbf{u}) = \frac{u_2^3}{2u_1^2} + g u_1^2 u_2, \quad \psi_1(\mathbf{u}) = u_2, \quad \psi_2(\mathbf{u}) = \frac{u_2^2}{u_1} + \frac{1}{2}\, g u_1^2.$$

Отсюда находим

$$v_1 = e_{u_1} = g u_1 - \frac{u_2^2}{2u_1}, \qquad v_2 = e_{u_2} = \frac{u_2}{u_1}.$$

Обращая зависимость $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{u}} e(\mathbf{u})$, получаем

$$u_1 = \frac{1}{g}\left(v_1 + \frac{1}{2}\, v_2^2\right) \qquad u_2 = \frac{1}{g}\, v_2 \left(v_1 + \frac{1}{2}\, v_2^2\right).$$

Следовательно, функции $e^* = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - e$ и $f^* = \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\psi} - f$ имеют вид

$$e^*(\mathbf{v}) = \frac{1}{2g}\left(v_1 + \frac{1}{2}\, v_2^2\right)^2, \qquad f^*(\mathbf{v}) = \frac{1}{2g}\, v_2 \left(v_1 + \frac{1}{2}\, v_2^2\right)^2.$$

Вычисляя матрицы Гессе для указанных функций, получаем симметрическую форму $A(\mathbf{v})\mathbf{v}_t + B(\mathbf{v})\mathbf{v}_x = 0$ системы (21) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & v_2 \\ v_2 & v_1 + \frac{3}{2}\, v_2^2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} v_2 & v_1 + \frac{3}{2}\, v_2^2 \\ v_1 + \frac{3}{2}\, v_2^2 & 3v_1 + \frac{5}{2}\, v_2^2 \end{pmatrix}.$$

Возможны и другие формы записи гиперболических систем уравнений в симметрическом виде. Например, для систем с двумя независимыми переменными такую форму дает преобразование исходных уравнений к уравнениям в инвариантах Римана (при условии, что таковые существуют). Так, для уравнений мелкой воды (5) указанная форма имеет вид

$$r_t + (u + \sqrt{gh})\, r_x = 0, \qquad l_t + (u - \sqrt{gh})\, l_x = 0,$$

где $r = u + 2\sqrt{gh}$ и $l = u - 2\sqrt{gh}$. Однако этот подход является менее общим, поскольку он ограничен условиями существования инвариантов Римана.

Литература

1. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука. 1990. 432 с.

2. Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск.: Научная книга. 1998. 268 с.

3. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: 1998. 416 с.

4. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 496 с.

5. Нелинейные волны. Ред. С. Лейбович, А. Сибасс. М.: Мир, 1977. 320 с.

6. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. Москва, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.

7. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике М.: Наука. 1968. 592 с.

Задачи

1. Найти поле скоростей $u(x,t)$ в одномерном движении сплошной среды, все частицы которой перемещаются по инерции, если в начальный момент времени $t=0$ среда заполняла полупространство $x \geqslant 0$ и распределение скоростей имело следующий вид: (a) $u(x,0)=x^2$; (b) $u(x,0)=\sqrt{x}$.

   Ответ: (a) $u(x,t)=\frac{2x^2}{2xt+1+\sqrt{4xt+1}}$; (b) $u(x,t)=\frac{\sqrt{4x+t^2}-t}{2}$.

2. Проинтегрировать уравнение характеристик для решения задачи Коши

$$u_t+uu_x+u=0, \quad u(x,0)=ax+b \quad (a,b=const).$$

   Ответ: $x=x_0+(ax_0+b)\left(1-e^{-t}\right)$.

3. Построить решение задачи Коши

$$u_t+c(u)u_x=0, \quad u(x,0)=c^{-1}(ax+b) \quad (a,b=const)$$

   с гладкой монотонной функцией $c(u)$. При каких значениях a и b наступает градиентная катастрофа?

   Ответ: $u(x,t)=c^{-1}\left(\frac{ax+b}{1+at}\right)$

4. Найти характеристики и инварианты Римана для системы уравнений

$$\begin{cases} u_t+2\cos v\, u_x+\sin u\, v_x=0, \\ v_t+\cos v\, u_x+(\sin u+\cos v)\, v_x=0. \end{cases}$$

   Ответ:

$$\frac{dx}{dt}=\cos v: \quad u-v=const; \qquad \frac{dx}{dt}=\sin u+2\cos v: \quad \frac{1+\sin v}{\cos v}\ \mathrm{tg}\,\frac{u}{2}=const.$$

5. Показать, что якобиан $|\partial(r_1,...,r_n)/\partial(u_1,...,u_n)|$ преобразования $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{u})$, приводящего гиперболическую систему уравнений $\mathbf{u}_t+A(\mathbf{u})\mathbf{u}_x=0$ к системе в инвариантах Римана

$$\mathbf{r}_t+C(\mathbf{r})\mathbf{r}_x=0 \qquad (22)$$

с диагональной матрицей $C(\mathbf{r}) = diag(c_1, ..., c_n)$, отличен от нуля.

6. Рассматривается приведенная к инвариантам Римана строго гиперболическая система уравнений (22) (т.е. $c_i \neq c_j$ при $i \neq j$). Доказать, что в невырожденной простой волне $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha(x,t)),\ \mathbf{r}'(\alpha) \neq 0$, все инварианты r_i за исключением одного тождественно постоянны, а линии уровня простой волны $\alpha(x,t) = const$ — семейство прямолинейных характеристик, соответствующих не тождественно постоянному инварианту Римана.

7. Для гиперболической системы уравнений

$$\begin{cases} u_t + c(u,v)u_x = 0, \\ v_t + c(u,v)v_x = 0 \end{cases}$$

с кратной характеристикой $dx/dt = c(u,v)$ доказать, что неравенства $u_x > v_x > 0$ сохраняются вдоль этой характеристики, если они были выполнены в начальный момент времени $t = 0$.

8. Одномерное движение баротропной сплошной среды описывается системой уравнений

$$\begin{array}{l} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0 \\ u_t + uu_x + \frac{c^2(\rho)}{\rho}\,\rho_x = 0 \end{array}$$

с гладкой функцией $c(\rho),\ c'(\rho) > 0,\ c(0) = 0$. Для каких функциональных зависимостей $c = c(\rho)$ все характеристики данной системы в любом движении среды являются прямыми?

Ответ: $\quad c = A\,\rho \quad (A = const > 0)$.

9. Рассматриваются уравнения одномерных движений смеси двух баротропных сред

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \quad u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}p_x = 0, \quad y_{1t} + uy_{1x} = 0,$$

где u — скорость смеси; $\rho = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2$ — плотность смеси (здесь ρ_i — плотности сред, α_i — их объемные концентрации: $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1,\ \alpha_1 +$

$\alpha_2 = 1$); $p = p_1(\rho_1) = p_2(\rho_2)$ — давление ($dp_1/d\rho_1 > 0$, $dp_2/d\rho_2 > 0$ при $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0$); функция y_1 — массовая концентрация первой из сред ($y_i = \alpha_i \rho_i/\rho$). Показать, что система является гиперболической и ее характеристики имеют вид $dx/dt = u$, $dx/dt = u \pm c$, где скорость звука в смеси c (скорость Вуда — Уоллиса) дается соотношениями

$$\frac{1}{\rho c^2} = \frac{\alpha_1}{\rho_1 c_1^2} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 c_2^2}, \qquad c_i^2 = \frac{dp_i}{d\rho_i} \qquad (i = 1, 2)$$

10. В условиях предыдущей задачи показать, что при заданных значениях $0 < \rho_1 < \rho_2$, $0 < c_1 < c_2$ и переменной концентрации α_1 скорость звука в смеси $c = c(\alpha_1)$ имеет единственный минимум c_{min} в промежутке $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$. Найти этот минимум. Чему равняется c_{min} для воздушно–водяной смеси с параметрами $\rho_1 = 1\,\text{кг}/\text{м}^3$, $\rho_2 = 1000\,\text{кг}/\text{м}^3$, $c_1 = 340\,\text{м}/\text{сек}$, $c_2 = 1500\,\text{м}/\text{сек}$?

Ответ: $\quad c_{min}^2 = \dfrac{4\rho_1\rho_2\,(\rho_2 - \rho_1)\,c_1^2 c_2^2}{(\rho_1 + \rho_2)\,(\rho_2^2 c_2^2 - \rho_1^2 c_1^2)}, \quad 21.5\,\text{м}/\text{сек}.$

11. Показать, что любая гиперболическая система (1) с двумя независимыми переменными t, x приводится умножением слева на подходящую матрицу к виду

$$B\mathbf{u}_t + C\mathbf{u}_x + D\mathbf{b} = 0,$$

где B, C, D — симметрические матрицы, зависящие от $\mathbf{u}, x, t$, причем матрица B положительно определена (система такого вида называется симметрической t–гиперболической по Фридрихсу).

12. Пусть $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$ и задано гладкое отображение $e : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такое, что матрица Гессе $e''(\mathbf{u}) = \|\partial_{u_i}\partial_{u_j} e(\mathbf{u})\|_{i,i=1}^n$ положительно определена, т.е. $e(\mathbf{u})$ — выпуклая функция. Рассмотрим преобразование Лежандра e^* функции e,

$$e^*(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - e(\mathbf{u}),$$

где $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{u}} e(\mathbf{u})$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{v})$ — прообраз элемента $\mathbf{v}$ при действии локально обратимого отображения $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{u}} e(\mathbf{u})$. Показать, что $e^*(\mathbf{v})$ — выпуклая функция от $\mathbf{v}$. Показать, что преобразование Лежандра *инволютивно*, т.е. его повторное применение дает исходную функцию e.

Указание: показать, что $\mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{v}} e^*(\mathbf{v})$ и $\big(e^*(\mathbf{v})\big)'' = (e''(\mathbf{u}))^{-1}$.

13. Рассматриваются уравнения одномерного движения идеального газа с нулевым давлением

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + u u_x = 0.$$

(это приближение возникает в астрофизике). Показать, что данная система не является гиперболической. Найти все законы сохранения $\partial_t P(\rho, u) + \partial_x Q(\rho, u) = 0$, допускаемые этой системой. Существуют ли среди них законы сохранения с выпуклой функцией P?

Ответ: $P(\rho, u) = a(u)\rho + b(u)$, a, b — произвольные гладкие функции; P невыпукла.

14. Рассматривается система законов сохранения газовой динамики

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x = 0, \quad (\rho s)_t + (\rho u s)_x = 0, \quad p = p(\rho, s),$$

где ρ — плотность, u — скорость, p — давление и s — энтропия. Термодинамическое состояние среды при этом характеризуется внутренней энергией газа $\varepsilon(\rho, s)$ и температурой $T(\rho, s)$, которые связаны между собой тождеством

$$T\, ds = d\varepsilon + p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Показать, что система уравнений газовой динамики допускает дополнительный закон сохранения $e_t + f_x = 0$ с функциями

$$e = \rho\big(\varepsilon + \frac{1}{2} u^2\big), \qquad f = \rho u\big(\varepsilon + \frac{1}{2} u^2\big) + p u.$$

15. В условиях предыдущей задачи вычислить матрицу Гессе $e''(\mathbf{u})$ функции $e = \rho\,(\varepsilon + u^2/2)$ по переменным $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, где $u_1 = \rho$, $u_2 = \rho u$, $u_3 = \rho s$.

Ответ:

$$e''(\mathbf{u}) = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} u^2 + K & -u & \rho\varepsilon_{\rho s} - s\varepsilon_{ss} \\ -u & 1 & 0 \\ \rho\varepsilon_{\rho s} - s\varepsilon_{ss} & 0 & \varepsilon_{ss} \end{pmatrix},$$

где $K = \rho^2\varepsilon_{\rho\rho} - 2\rho s\varepsilon_{\rho s} + s^2\varepsilon_{ss} + 2\rho\,\varepsilon_\rho$

16. Используя результат предыдущей задачи, доказать, что функция $e = \rho\left(\varepsilon + u^2/2\right)$ является выпуклой функцией по переменным $\mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho s)$ тогда и только тогда, когда функция $E(\tau, s) = \varepsilon(1/\tau, s)$ выпукла по переменным (τ, s).

17. С помощью теоремы Годунова — Фридрихса — Лакса записать систему законов сохранения газовой динамики

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x = 0, \quad (\rho s)_t + (\rho u s)_x = 0, \quad p = p(\rho, s)$$

в виде симметрической t – гиперболической по Фридрихсу системы уравнений $A(\mathbf{v})\mathbf{v}_t + B(\mathbf{v})\mathbf{v}_x = 0$ ($A = A^T > 0$, $B = B^T$), используя для этого закон сохранения энергии с функцией $e = \rho(\varepsilon + \frac{1}{2}u^2)$ (здесь ε — внутренняя энергия).

Ответ: $A = (e^*(\mathbf{v}))'' = \left(e(\mathbf{u}))''\right)^{-1}$, $\quad B = \left(ue^*(\mathbf{v})\right)''$,

где $\quad e^*(\mathbf{v}) = p, \quad \mathbf{v} = (\varepsilon + \frac{p}{\rho} - Ts - \frac{1}{2}u^2,\ u,\ T).$

18. Показать, что для любого закона сохранения $\partial_t P + \partial_x Q = 0$ гиперболической системы уравнений (22), записанной в инвариантах Римана $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_n)$, функция $P(r_1, ..., r_n)$ удовлетворяет системе линейных уравнений

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r_i \partial r_j} = \frac{1}{c_i - c_j}\left(\frac{\partial c_j}{\partial r_i}\frac{\partial P}{\partial r_j} - \frac{\partial c_i}{\partial r_j}\frac{\partial P}{\partial r_i}\right) \qquad (i, j = 1, ..., n;\ i \neq j)$$

19. Найти все законы сохранения $\partial_t P(r,l) + \partial_x Q(r,l) = 0$ для системы уравнений в инвариантах Римана

$$r_t + l\, r_x = 0, \quad l_t + r\, l_x = 0$$

(изэнтропический газ Чаплыгина с показателем политропы $\gamma = -1$).

Ответ: $P(r,l) = \frac{f(r)-g(l)}{r-l}$, f и g — произвольные гладкие функции.

20. Выяснить, существуют ли законы сохранения $\partial_t P(r,l,s) + \partial_x Q(r,l,s) = 0$ для системы уравнений

$$r_t + l\, r_x = 0, \quad l_t + s\, l_x = 0, \quad s_t + r\, s_x = 0.$$

Ответ: не существуют.

21. Найти скачки производной ρ_x на линиях слабого разрыва решения задачи Коши для системы уравнений

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0 \\ u_t + uu_x + \rho\rho_x = 0 \end{cases}$$

с начальными данными

$$\rho(x,0) = \rho_0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ kx, & x > 0, \end{cases} \qquad k,\ \rho_0 = const > 0.$$

Ответ: $x = \pm\rho_0 t:$ $[\rho_x] = \pm\frac{k}{2(1+kt)}$.

22. Показать, что разрывы вторых производных решения гиперболической системы, непрерывного вместе со своими производными первого порядка, могут распространяться только вдоль характеристик.

23. Доказать, что для скорости распространения слабых кинематических ударных волн в сплошной среде с плотностью ρ справедливо выражение

$$D = \frac{1}{2}\,(c_1 + c_2) + O([\,\rho\,]^2),$$

где c_i — предельные значения характеристической скорости на линии разрыва. Проверить, что для кинематических волн с квадратичной по ρ функцией $q = Q(\rho)$ справедливо точное равенство $D = (c_1 + c_2)/2$.

24. Показать, что для скорости D кинематической ударной волны, образующейся в результате слияния двух ударных волн, имевших скорости $D_1 < D_2$, выполнено неравенство $D_1 < D < D_2$, если взаимодействие волн описывается законом сохранения $\partial_t \rho + \partial_x Q(\rho) = 0$ с выпуклой функцией $Q\,(Q''(\rho) > 0)$.

25. Кинематическая ударная волна, распространяющаяся с постоянной скоростью D_1, в момент времени $t = 0$ догоняет в точке $x = 0$ ударную волну, бегущую со скоростью D_0 по постоянному фону $\rho_0 > 0$. Известно, что после прохождения каждой из этих ударных волн плотность ρ возрастала вдвое, а весь процесс описывается законом сохранения $\partial_t \rho + c_0\,\partial_x\,(\rho^3/\rho_0^2) = 0$, где $c_0 = const > 0$. Найти плотность среды $\rho(x,t)$ при $t > 0$. Чему равны скорости всех ударных волн, участвующих в движении?

   Ответ: $\rho(x,t) = \rho_0 \quad (x > Dt)$, $\quad \rho(x,t) = 4\rho_0 \quad (x < Dt)$, $\qquad D = 3D_0$, $\quad D_1 = 4D_0$, $\quad D_0 = 7c_0$.

26. Ударная волна, описываемая законом сохранения $\partial_t u + \partial_x(u^2/2) = 0$, распространяется с постоянной скоростью $D = 2u_0 > 0$ по состоянию $u = u_0$ и в момент времени $t = 1$ догоняет задний фронт центрированной волны $u = x/t \ (u_0 t < x < 2u_0 t)$, бегущей вправо по состоянию $u = 2u_0$. Найти траекторию ударной волны в плоскости (x,t) до и после начала ее взаимодействия с центрированной волной. Догонит ли ударная волна передний фронт центрированной волны?

   Ответ: $x = u_0\,(2t-1) \quad (t \leqslant 1)$; $\quad x = u_0\,(3t - 2\sqrt{t}) \quad (1 \leqslant t \leqslant 4)$; $\quad x = u_0\,\left(\frac{5}{2}\,t - 2\right) \quad (t \geqslant 4)$; догонит.

27. Рассматриваются кинематические волны в потоке транспорта с квадратичной зависимостью потока $q = Q(\rho)$ от плотности автомобилей

$\rho \in [0, \rho_*]$:

$$Q(\rho) = 4q_m \frac{\rho}{\rho_*} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_*}\right), \quad q_m = const > 0.$$

Проверить выполнение условий (12) для данной функции $Q(\rho)$. Чему равно максимально возможное значение $u_m = \max\limits_{0 \leqslant \rho \leqslant \rho_*} u(\rho)$ скорости автомобилей $u(\rho) = Q(\rho)/\rho$? Найти зависимость потока $q = q(u)$ от скорости $u \in [0, u_m]$ и определить, при каком значении u достигается максимальная величина потока $q_m = \max\limits_{0 \leqslant u \leqslant u_m} q(u)$. Чему равны экстремальные значения характеристической скорости $c(\rho) = Q'(\rho)$ на промежутке $\rho \in [0, \rho_*]$? Найти для нее выражение в виде функции $c = c(q)$ для значений потока $q = Q(\rho)$, принимаемых на промежутке $\rho \in [0, \rho_*/2]$.

Ответ: $u_m = \dfrac{4q_m}{\rho_*}, \quad q(u) = \rho_* u \left(1 - \dfrac{u}{u_m}\right), \quad q_m = q(u)\big|_{u=u_m/2};$

$\max\limits_{0 \leqslant \rho \leqslant \rho_*} c(\rho) = c(\rho)\big|_{\rho=0} = u_m, \quad \min\limits_{0 \leqslant \rho \leqslant \rho_*} c(\rho) = c(\rho)\big|_{\rho=\rho_*} = -u_m,$

$c(q) = u_m \sqrt{1 - \dfrac{q}{q_m}}.$

28. Доказать, что при выполнении условий (12) все непрерывные возмущения распространяются только назад по потоку транспорта: при $0 < \rho \leqslant \rho_*$ справедливо неравенство $u(\rho) > c(\rho)$, где $u(\rho) = Q(\rho)/\rho$ — скорость автомобилей, $c(\rho) = Q'(\rho)$ — характеристическая скорость.

29. Показать, что для скорости распространения кинематической ударной волны $D(\rho) = \big(Q(\rho) - Q(\rho_0)\big)/(\rho - \rho_0)$, рассматриваемой как функции состояния ρ при фиксированном состоянии ρ_0 по другую сторону фронта, справедливо соотношение

$$D'(\rho) = \frac{1}{(\rho - \rho_0)^2} \int\limits_{\rho_0}^{\rho} (\varrho - \rho_0)\, Q''(\varrho)\, d\varrho.$$

Вывести отсюда, что $D(\rho)$ является монотонно возрастающей функцией в случае $Q''(\rho) > 0$ и монотонно убывающей в случае $Q''(\rho) < 0$.

30. Поток автомобилей движется со скоростью $u_0 > 0$ по улице с односторонним движением, на которой в момент времени $t = 0$ начинает работать

светофор для пешеходов в периодическом режиме "красный-зеленый". Используя уравнение кинематических волн с расходом

$$Q(\rho) = 4q_m \frac{\rho}{\rho_*} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_*}\right), \; \rho_* = const > 0, \; q_m = const > 0, \; (u_0 < 4q_m/\rho_*)$$

описать движение транспорта в окрестности светофора при $t > 0$. При какой продолжительности временных интервалов красного и зеленого света $T_{\text{к}}$ и $T_{\text{з}}$ в движении транспорта возникает пробка?

Ответ: пробка образуется при $\dfrac{T_{\text{к}}}{T_{\text{з}}} > \dfrac{q_0}{q_m - q_0}$, где $q_0 = \rho_0 u_0$.

31. В результате дорожного происшествия на автостраде поток автомобилей q_0, двигавшихся с плотностью ρ_0, временно (в течение промежутка T) снизился на месте события до значения $q_1 < q_0$. Построить решение уравнения кинематических волн с функцией $Q(\rho)$, указанной в предыдущей задаче, при условиях $0 < q_0 = Q(\rho_0) < q_m$ и $0 < \rho_0 < \rho_*/2$. Определить максимальное расстояние l от места происшествия, на котором происходит задержка транспорта.

32. Показать, что простая волна для уравнений одномерных изэнтропических течений политропного газа, распространяющаяся по состоянию покоя с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0, является кинематической волной. Найти вид зависимости $q = Q(\rho)$ расхода $q = \rho u$ от плотности ρ.

Ответ: $Q(\rho) = \pm \frac{2c_0}{\gamma - 1}\, \rho \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}\right)$.

33. Процесс фильтрации жидкости в пористой среде описывается уравнением Баклея–Леверетта

$$\partial_t\, s + q_m\, \partial_x \big(3s^2 - 2s^3\big) = 0,$$

где $0 \leqslant s(x,t) \leqslant 1$ — насыщенность пор жидкостью, $q_m = const$ — максимальный расход ($q_m > 0$). Построить автомодельное решение задачи о распаде разрыва с начальными данными $s(x, 0) = 0$ при $x > 0$ и

$s(x,0) = 1$ при $x < 0$. Какова скорость распространения фронта фильтрующейся жидкости?

Ответ:

$$s(x,t) = 1 \ \ (x < 0), \qquad s(x,t) = 0 \ \ \left(x > \frac{9q_m\, t}{8}\right),$$
$$s(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{9q_m^2 - (x/t)^2}}{6q_m} \quad \left(0 < x < \frac{9q_m\, t}{8}\right).$$

34. Построить решение типа бегущей волны $u(x,t) = U(x - Dt)$ для уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx} \qquad (\nu = const > 0),$$

удовлетворяющее условиям $u \to u_1$ $(x \to +\infty)$ и $u \to u_2$ $(x \to -\infty)$, где $u_1, u_2 = const$ $(u_1 \neq u_2)$. Найти асимптотику решения при $\nu \to 0$.

Ответ:
$$u(x,t) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + \exp\left\{\frac{u_2 - u_1}{2\nu}(x - Dt)\right\}}, \ \ D = \frac{1}{2}(u_1 + u_2); \quad \lim_{\nu \to 0} u(x,t) = \begin{cases} u_1 & x > Dt, \\ u_2 & x < Dt. \end{cases}$$

35. Показать, что функция $u = -2\nu\, v_x/v$ является решением уравнения Бюргерса, если функция v удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$v_t = \nu\, v_{xx}$$

(преобразование Коула — Хопфа). Какое решение $v_*(x,t)$ уравнения теплопроводности дает при указанном преобразовании автомодельное решение уравнения Бюргерса $u_*(x,t) = x/t$?

Ответ: $\quad v_*(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-x^2/(4\nu t)}.$

36. Проверить, что решение уравнения Бюргерса, рассматриваемое в задаче 34, является преобразованием Коула — Хопфа суммы $v = v_1 + v_2$ двух решений типа бегущих волн для уравнения теплопроводности, имеющих вид

$$v_j(x,t) = \exp\left\{-\frac{u_j}{2\nu}\left(x - \frac{u_j}{2}\, t\right)\right\} \quad (j = 1, 2) \tag{23}$$

37. Рассматривается решение $u(x,t)$ уравнения Бюргерса, являющееся преобразованием Коула — Хопфа суммы $v(x,t) = v_1(x,t) + v_2(x,t) + v_3(x,t)$ трех решений уравнения теплопроводности вида (23) с параметрами $u_3 > u_2 > u_1$. Найти асимптотику решения u в пределе при $\nu \to 0$.

Ответ:

$$\lim_{\nu\to 0} u(x,t) = \begin{cases} u_1 & (x > D_1 t) \\ u_2 & (D_2 t < x < D_1 t) \\ u_3 & (x < D_3 t) \end{cases} \quad \text{при} \quad t < 0,$$

$$\lim_{\nu\to 0} u(x,t) = \begin{cases} u_1 & (x > D_3 t) \\ u_3 & (x < D_3 t) \end{cases} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0,$$

где

$$D_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2), \quad D_2 = \frac{1}{2}(u_2 + u_3), \quad D_3 = \frac{1}{2}(u_1 + u_3).$$

38. Доказать, что для существования инварианта Римана системы уравнений

$$\mathbf{u}_t + A(\mathbf{u})\mathbf{u}_x = 0, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3),$$

постоянного вдоль характеристики $dx/dt = c$, необходимо и достаточно выполнения равенства $\mathbf{l} \cdot rot\, \mathbf{l} = 0$, где $\mathbf{l}(\mathbf{u})$ — левый собственный вектор матрицы A порядка 3×3 с собственным значением c.

39. Определить, для каких характеристик существуют инварианты Римана уравнений одномерных движений политропного газа

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0 \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}\, p_x = 0 \\ p_t + up_x + \gamma p u_x = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{dx}{dt} = u(x,t)$: $p\,\rho^{-\gamma} = const$ (постоянство энтропии на контактной характеристике)

40. Выяснить, при какой зависимости скорости звука $c = c(\rho, p)$ от плотности ρ и давления p существуют инварианты Римана $r_\pm$, сохраняющиеся

на звуковых характеристиках $dx/dt = u \pm c$ системы уравнений одномерной газовой динамики

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0 \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}\, p_x = 0 \\ p_t + up_x + \rho c^2 u_x = 0. \end{cases}$$

Ответ: $c(\rho, p) = \frac{a(p)}{\rho}$, $r_\pm = u \pm \int \frac{dp}{a(p)}$, $a(p)$ — произвольная функция.

41. Рассматривается гиперболическая система законов сохранения

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}) = 0. \tag{24}$$

Доказать, что для любой ветви ударной адиабаты касательный вектор к этой ветви в центре адиабаты $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ является правым собственным вектором матрицы $A(\mathbf{u}_0) = \boldsymbol{\psi}'(\mathbf{u}_0)$.

42. Ищется автомодельное решение $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\xi)$, $\xi = x/t$, строго гиперболической системы уравнений $\partial_t \mathbf{u} + A(\mathbf{u})\, \partial_x \mathbf{u} = 0$. Показать, что необходимым условием существования такого решения является выполнение неравенства $\mathbf{r}(\mathbf{u}) \cdot \nabla_{\mathbf{u}} c(\mathbf{u}) \neq 0$ хотя бы для одного из собственных значений $c(\mathbf{u})$ матрицы $A(\mathbf{u})$ (здесь $\mathbf{r}$ — правый собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению c). Показать, что если характеристическое поле $c(\mathbf{u})$ удовлетворяет данному условию (условие *истинной нелинейности по Лаксу*), то решение $\mathbf{u}(\xi)$ получается интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\xi} = \frac{\mathbf{r}(\mathbf{u})}{\mathbf{r}(\mathbf{u}) \cdot \nabla_{\mathbf{u}} c(\mathbf{u})}.$$

43. Характеристическое поле $c(\mathbf{u})$ называется *линейно вырожденным по Лаксу*, если $\mathbf{r}(\mathbf{u}) \cdot \nabla_{\mathbf{u}} c(\mathbf{u}) \equiv 0$ для правого собственного вектора $\mathbf{r}$, соответствующего собственному значению c. Показать, что если $c(\mathbf{u})$ — простое собственное значение матрицы $A(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\psi}'(\mathbf{u})$ гиперболической системы законов сохранения (24), то тогда ветвь ударной адиабаты $D\,(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) =$

$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u})-\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_0)$, касающаяся в точке $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0$ вектора $\mathbf{r}(\mathbf{u}_0)$, совпадает с интегральной кривой $\mathbf{u}=\mathbf{u}(s)$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds}=\mathbf{r}(\mathbf{u}),\quad \mathbf{u}_{|_{s=0}}=\mathbf{u}_0.$$

При этом для скорости ударной волны выполнено равенство $D=c(\mathbf{u})$.

44. Показать, что для системы уравнений газовой динамики

$$\rho_t+u\rho_x+\rho u_x=0,\quad u_t+uu_x+\frac{1}{\rho}p_x=0,\quad s_t+us_x=0,\quad p=p(\rho,s)$$

звуковые характеристики $dx/dt=u\pm c$ (здесь $c=\sqrt{p_\rho(\rho,s)}$ — скорость звука) удовлетворяют условию истинной нелинейности по Лаксу, если уравнение состояния $p=g(\tau,s)$, $\tau=1/\rho$, таково, что $g_{\tau\tau}(\tau,s)>0$. Показать, что контактные характеристики $dx/dt=u$ являются линейно вырожденными по Лаксу.

45. Рассматривается система законов сохранения массы, импульса и энергии одномерного движения политропного газа

$$\begin{cases}\rho_t+(\rho u)_x=0\\ (\rho u)_t+(\rho u^2+p)_x=0\\ \left(\frac{1}{\gamma-1}p+\frac{1}{2}\rho u^2\right)_t+\left(\frac{1}{2}\rho u^3+\frac{\gamma}{\gamma-1}pu\right)_x=0.\end{cases}$$

В пространстве точек (ρ,u,p) найти проекции ударной адиабаты, отвечающей заданному состоянию (ρ_0,u_0,p_0) по одну из сторон сильного разрыва, на координатные плоскости: (a) $\rho=\rho_0$; (b) $u=u_0$.

46. Записать в параметрической форме уравнения ветви ударных волн для ударной адиабаты политропного газа в пространстве (ρ,u,p) с центром (ρ_0,u_0,p_0), используя в качестве параметра число Маха $M=|u_0-D|/c_0$, где D — скорость ударной волны, $c_0=\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$.

Ответ: $\rho=\rho_0\left\{1+\frac{2(M^2-1)}{(\gamma-1)M^2+2}\right\}$, $\quad u=u_0\pm\frac{2|M^2-1|}{(\gamma+1)M}c_0$, $\quad p=p_0\left\{1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}(M^2-1)\right\}$.

47. Найти характеристики системы уравнений линейной теории упругости

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x}, \quad \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

с потенциалом

$$\Phi(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2}\, \mu\, (u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2}\, (\lambda + 2\mu)\, u_3^2,$$

где $0 < \rho_0 = const$ — плотность материала в недеформированном состоянии, u_i — перемещения, v_i — скорости, λ, μ — коэффициенты Ламе ($\lambda > 0, \mu > 0$). Является ли эта система гиперболической?

Ответ: $\frac{dx}{dt} = c_j$ $(j = 1, ..., 6)$, где $c_{1,2} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$, $c_{3,4} = -\sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$ (поперечные волны); $c_{5,6} = \pm\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}}$ (продольные волны); система гиперболична.

48. Найти характеристические скорости для системы уравнений квазипоперечных волн

$$\partial_t\, u_i = \partial_x\, v_i, \quad \rho_0\, \partial_t\, v_i = \partial_x\, \Phi_{u_i} \qquad (i = 1, 2)$$

в изотропной нелинейной среде с упругим потенциалом

$$\Phi(u_1, u_2) = \frac{1}{2}\, \mu\, (u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{4}\, \kappa^2\, (u_1^2 + u_2^2)^2 \qquad (\kappa = const)$$

Ответ: $c_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\mu+\kappa^2\,(u_1^2+u_2^2)}{\rho_0}}$, $c_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{\mu+3\kappa^2\,(u_1^2+u_2^2)}{\rho_0}}$.

49. Найти характеристики и инварианты Римана системы уравнений продольных нелинейных упругих волн в стержне

$$u_t = v_x, \quad \rho_0\, v_t = \sigma_x,$$

где $\sigma = \sigma(u)$ — напряжение $(\sigma'(u) > 0)$.

Ответ: $\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{\sigma'(u)}{\rho_0}}$: $r_\pm(u, v) = v \mp \int\limits_0^u \sqrt{\frac{\sigma'(\xi)}{\rho_0}}\, d\xi$.

50. Показать, что ударная адиабата (10) для системы уравнений нелинейных упругих волн в стержне имеет в своем центре (u_0, v_0) второй порядок касания с линиями уровня инвариантов Римана $r_\pm(u, v) = r_\pm(u_0, v_0)$.

51. Найти характеристики и инварианты Римана для уравнений равновесия идеального жестко–пластического тела при плоской деформации

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2k\,\left(\cos 2\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial x} + \,\sin 2\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2k\,\left(\sin 2\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial x} - \,\cos 2\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = 0,$$

где $\sigma(x,y) = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$ — среднее напряжение, $k = const$ — предел текучести при сдвиге (максимальное касательное напряжение), $\theta(x,y)$ — угол наклона линии максимального касательного напряжения в точке (x,y).

Ответ: $\frac{dy}{dx} = tg\,\theta: \;\; \sigma - 2k\theta = const; \qquad \frac{dy}{dx} = -ctg\,\theta: \;\; \sigma + 2k\theta = const.$

52. Рассматриваются уравнения плоского напряженного состояния жестко-пластического материала при условии текучести Мизеса, имеющие вид

$$\left(\sqrt{3}\,\sin\omega\cos 2\varphi - \cos\omega\right)\,\frac{\partial \omega}{\partial x} + \sqrt{3}\,\sin\omega\,\sin 2\varphi\,\frac{\partial \omega}{\partial y} - 2\sin\omega\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

$$\sqrt{3}\,\sin\omega\,\sin 2\varphi\,\frac{\partial \omega}{\partial x} - \left(\sqrt{3}\,\sin\omega\cos 2\varphi + \cos\omega\right)\,\frac{\partial \omega}{\partial y} + 2\sin\omega\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

где функция $\omega(x,y)$ связана с главными напряжениями σ_1 и σ_2 формулами

$$\sigma_1 = 2k\,\cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right), \quad \sigma_2 = 2k\,\cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)$$

(здесь $k = const$ — предел текучести), а $\varphi(x,y)$ — угол между первым главным направлением тензора напряжений и осью Ox. Найти характеристики и инварианты Римана данной системы в области ее гиперболичности.

Ответ: $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3}\,\sin\omega\,\sin 2\varphi \pm \sqrt{3 - 4\cos^2\omega}}{\sqrt{3}\,\sin\omega\cos 2\varphi - \cos\omega}: \quad \varphi \mp \int\limits_{\pi/6}^{\omega} \frac{\sqrt{3-4\cos^2 s}}{2\sin s}\,ds = const,$

$\left(\frac{\pi}{6} < \omega < \frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6} < \omega < \frac{11\pi}{6}\right).$

53. Вывести уравнения Гамильтона—Якоби для характеристических поверхностей системы двумерных уравнений линейной теории упругости

$$\rho_0\,\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \,\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y}, \qquad \rho_0\,\frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \,\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu)\,\frac{\partial v_1}{\partial x} + \lambda\,\frac{\partial v_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} = \lambda\,\frac{\partial v_1}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)\,\frac{\partial v_2}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} = \mu\,\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right), \qquad (\sigma_{12} = \sigma_{21}),$$

где $v = (v_1, v_2)$ — вектор скорости, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений.

Ответ: $\varphi_t = 0, \qquad \varphi_t = \pm\sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}\,\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}, \qquad \varphi_t = \pm\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}}\,\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}.$

54. Рассматриваются уравнения химической сорбции (4) двухкомпонентной смеси с изотермой Ленгмюра

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \frac{1}{p}\big(\Gamma_1 u_1,\, \Gamma_2 u_2\big), \quad p(u_1, u_2) = 1 + \Gamma_1 u_1 + \Gamma_2 u_2,$$

где Γ_k — коэффициенты Генри ($0 < \Gamma_1 < \Gamma_2$). Показать, что при $u_1 > 0$, $u_2 > 0$ справедливы следующие утверждения:

(a) $\lambda \in \mathbb{R}$ является собственным значением матрицы $\mathbf{f}'(\mathbf{u})$ тогда и только тогда, когда λ — корень уравнения

$$\frac{\Gamma_1^2\, u_1}{\Gamma_1 - p\lambda} + \frac{\Gamma_2^2\, u_2}{\Gamma_2 - p\lambda} = p; \tag{25}$$

(b) собственные значения λ_j матрицы $\mathbf{f}'(\mathbf{u})$ вещественны и различны: $0 < \lambda_1 < \Gamma_1/p < \lambda_2 < \Gamma_2/p$ (гиперболичность уравнений ленгмюровской сорбции).

55. Проверить, что уравнения химической сорбции (4) преобразуются заменой независимых переменных $\tau = vt - x$, $\xi = x$ к виду

$$\partial_\tau \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \partial_\xi \mathbf{u} = 0.$$

Показать, что для каждого собственного значения λ матрицы $\mathbf{f}'(\mathbf{u})$, задаваемого уравнением (25), функция $r = p\,\lambda$ является для характеристики $d\tau/d\xi = \lambda$ инвариантом Римана: $(\partial_\xi + \lambda\partial_\tau)\, r = 0$.

56. Рассматривается система уравнений в инвариантах Римана

$$\partial_\xi r_1 + r_1^2 r_2\, \partial_\tau r_1 = 0, \qquad \partial_\xi r_2 + r_1 r_2^2\, \partial_\tau r_2 = 0.$$

Показать, что функции

$$u_1 = \frac{1}{\Gamma_2 - \Gamma_1}\left(\frac{\Gamma_1}{r_1} - 1\right)\left(\frac{\Gamma_1}{r_2} - 1\right), \quad u_2 = \frac{1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\left(\frac{\Gamma_2}{r_1} - 1\right)\left(\frac{\Gamma_2}{r_2} - 1\right)$$

с постоянными $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ удовлетворяют системе уравнений ленгмюровской сорбции двухкомпонентной смеси

$$\partial_\xi u_1 + \partial_\tau\left(\frac{\Gamma_1 u_1}{1 + \Gamma_1 u_1 + \Gamma_2 u_2}\right) = 0, \quad \partial_\xi u_2 + \partial_\tau\left(\frac{\Gamma_2 u_2}{1 + \Gamma_1 u_1 + \Gamma_2 u_2}\right) = 0.$$

57. Показать, что дифференциальным следствием газодинамических законов сохранения массы и импульса

$$\rho_t + div(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (\rho \mathbf{u})_t + div(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + pI) = 0$$

является уравнение для плотности

$$\rho_{tt} - c_0^2 \triangle \rho = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j},$$

где c_0 — скорость звука в покоящемся газе,

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + (p - c_0^2 \rho)\, \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

— компоненты тензора акустических напряжений, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор скорости, p — давление, δ_{ij} — символы Кронеккера.

58. Показать, что потенциал φ поля скоростей $\mathbf{u} = \nabla \varphi$ безвихревого изэнтропического течения газа удовлетворяет уравнению

$$d_t \left(\varphi_t + \frac{1}{2}|\nabla \varphi|^2\right) = c^2 \triangle \varphi, \qquad (d_t = \partial_t + \nabla \varphi \cdot \nabla)$$

где c — скорость звука.

59. Показать, что слабонелинейные акустические волны в политропном газе описываются приближенным (с точностью до величин третьего порядка малости) уравнением

$$\varphi_{tt} - c_0^2 \triangle \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\gamma - 1}{2c_0^2} \varphi_t^2 + |\nabla \varphi|^2 \right) = 0,$$

где γ — показатель политропы, c_0 — скорость звука в покоящемся газе.

60. Показать, что для системы линейных уравнений акустики в потоке газа, имеющего плотность $\rho_0 = const$ и движущегося с заданной постоянной скоростью $\mathbf{u}_0$,

$$\rho_0 \, d_t \mathbf{u} + \nabla p = 0, \qquad d_t p + \rho_0 \, c_0^2 \, div \, \mathbf{u} = 0 \qquad (d_t = \partial_t + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla)$$

выполнен интегральный закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iiint\limits_{\Omega} \left(\rho_0 \, |\mathbf{u}|^2 + \frac{p^2}{\rho_0 c_0^2} \right) d\Omega + \frac{1}{2} \iint\limits_{S} \left(\rho_0 \, |\mathbf{u}|^2 + \frac{p^2}{\rho_0 c_0^2} \right) \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} \, dS +$$

$$+ \iint\limits_{S} p \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0,$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — произвольная область с кусочно-гладкой границей S и единичной внешней нормалью $\mathbf{n}$ к ней.

61. Для уравнений акустики в газе, движущемся с постоянной скоростью $\mathbf{u}_0 = (u_0, 0, 0)$, найти звуковые характеристики и соответствующие им бихарактеристики, если при $t = 0$ каждая из этих характеристических поверхностей — сфера $|\mathbf{x}| = R$.

Ответ: $(x + u_0 t)^2 + y^2 + z^2 = (R \pm c_0 t)^2$ — характеристики;

$x = \left(1 \pm \frac{c_0 t}{R}\right) x_0 - u_0 t, \quad y = \left(1 \pm \frac{c_0 t}{R}\right) y_0, \quad z = \left(1 \pm \frac{c_0 t}{R}\right) z_0$ — бихарактеристики.

62. Пусть зависимость функции $p(\mathbf{x}, t)$ от переменных $\mathbf{x} = (x, y, z)$ и t задана неявно соотношением

$$p = f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}(p) + c_0 t \, |\mathbf{k}(p)|),$$

где $f, \mathbf{k} \in C^2$. Показать, что p является решением волнового уравнения $p_{tt} = c_0^2 \triangle p$ (функционально – инвариантное решение Смирнова — Соболева).

63. Найти общий вид решения типа сферической волны $p = p(|\mathbf{x}|, t)$ для волнового уравнения.

Ответ: $p = \frac{1}{|\mathbf{x}|}\big(f(|\mathbf{x}| - c_0 t) + g(|\mathbf{x}| + c_0 t)\big)$, $\quad f, g$ — произвольные гладкие функции.

64. Излучение звука шаром радиуса r_0, пульсирующим по гармоническому закону с частотой ω, описывается граничным условием $u_r(\mathbf{x}, t) = U \cos\omega t$ $(U = const \neq 0)$ при $|\mathbf{x}| = r_0$ для радиальной компоненты u_r скорости газа $\mathbf{u}$. Разыскивая решение уравнений акустики в виде сферической волны, уходящей от источника звука (т.е. зависящей от $|\mathbf{x}| - c_0 t$), найти поле давления p в области $|\mathbf{x}| > r_0$.

Ответ: $p(\mathbf{x}, t) = Re\left\{\frac{a}{|\mathbf{x}|}\, e^{i\omega(t - |\mathbf{x}|/c_0)}\right\}, \quad a = \frac{i\rho_0 c_0 r_0 m U}{1 + im}\, e^{im} \quad \big(m = \frac{\omega r_0}{c_0}\big)$.

65. Найти поток акустической энергии I через сферу $S_R: \ |\mathbf{x}| = R$,

$$I = \int\limits_{S_R} p\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

для источника звука частоты ω в покоящемся газе, создающего распределение давления $p(\mathbf{x}, t) = a|\mathbf{x}|^{-1} \cos\omega(t - |\mathbf{x}|/c_0)$.

Ответ: $I = \frac{4\pi a^2}{\rho_0 c_0}\ \left(\cos^2[\omega(t - R/c_0)] + \frac{c_0}{2\omega R}\sin[2\omega(t - R/c_0)]\right)$.

66. Уравнения Максвелла, описывающие распространение электромагнитных волн в среде с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ, имеют вид

$$\mathbf{b}_t + rot\ \mathbf{e} = 0, \quad \mu\,\varepsilon\, \mathbf{e}_t - \ rot\ \mathbf{b} = 0, \quad div\, \mathbf{e} = 0, \quad div\, \mathbf{b} = 0.$$

Показать, что вектор напряженности электрического поля $\mathbf{e}$ и вектор магнитной индукции $\mathbf{b}$ удовлетворяют волновому уравнению. Чему равна скорость распространения волн?

67. Показать, что для системы уравнений Максвелла справедлив интеграл энергии

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\Omega}\left(\mu\varepsilon\,|\mathbf{e}|^2 + |\,\mathbf{b}|^2\right)d\Omega + \iint\limits_{\Gamma}\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma = 0,$$

где $\mathbf{s} = \mathbf{e}\times\mathbf{b}$ — вектор Умова—Пойнтинга (вектор потока энергии), $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — произвольная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали.

68. Найти характеристики системы уравнений магнитной газовой динамики

$$\begin{aligned}
&\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \quad \rho\,(u_t + uu_x) + p_x = j\,b,\\
&p_t + up_x + \gamma p u_x = \sigma^{-1}(\gamma-1)j^2,\\
&b_t + e_x = 0, \qquad\qquad \mu\,\varepsilon\,e_t + \,b_x + \mu\,j = 0.
\end{aligned}$$

Здесь $j = \sigma(e - ub)$ — ток в газе, $\sigma = const$ — его электрическая проводимость.

Ответ: $c_1 = u;\;\; c_{2,3} = u \pm \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}};\quad c_{4,5} = \pm\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$

69. Найти характеристики уравнений одномерного движения идеального газа с бесконечной проводимостью

$$\begin{aligned}
&\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, && b_t + ub_x + bu_x = 0,\\
&\rho\,(u_t + uu_x) + p_x + \tfrac{1}{\mu}\,bb_x = 0, && p_t + up_x + \gamma p u_x = 0.
\end{aligned}$$

Ответ: $c_{1,2} = u;\;\; c_{3,4} = u \pm \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho} + \frac{b^2}{\mu\rho}}.$

70. Построить решение типа простой центрированной волны с плотностью ρ в качестве параметра простой волны для уравнений бесконечно проводящего газа с показателем политропы $\gamma = 2$.

Ответ: $b = A\rho,\quad u = 2k\sqrt{\rho},\quad p = \left(\frac{k^2}{32} - \frac{A^2}{2\mu}\right)\rho^2,\quad \rho = \left(\frac{x}{kt}\right)^2 \qquad (A, k = const).$

71. Показать, что на характеристиках $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ уравнения Гамильтона–Якоби (16) выполнены соотношения

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi_t}{dt} = H_t.$$

72. Показать, что для каждого корня $\tau = H(\boldsymbol{\xi}; x, t)$ характеристического уравнения $det\,(\tau I + \sum\limits_{i=1}^{3} \xi_i A^i) = 0$ системы (14) функция Гамильтона H удовлетворяет тождеству Эйлера

$$H = \sum_{i=1}^{3} \xi_i \, \partial_{\xi_i} H.$$

73. Найти решение задачи Коши для уравнения Гамильтона— Якоби с начальными данными типа плоской волны

$$\varphi_t = H(\nabla_{\mathbf{x}}\varphi), \qquad \varphi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \qquad (\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \text{— постоянный вектор})$$

при условии, что функция Гамильтона H является положительно–однородной функцией первой степени: $H(\lambda \mathbf{p}) = \lambda H(\mathbf{p})$ $(\lambda > 0)$.

Ответ: $\varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + H(\mathbf{k})\, t.$

74. Известно, что волновой фонт $\Gamma(t)$ является характеристикой системы уравнений

$$u_t + x\, v_y = 0, \quad v_t + y\, u_x = 0$$

и при $t = 0$ задается уравнением $\Gamma_0 : \varphi_0(x, y) = 0$. Определить траекторию луча в плоскости (x, y), исходящего из точки $(x_0, y_0) \in \Gamma_0$. Найти положение фронта в момент времени $t > 0$, если при $t = 0$ он имел форму гиперболы $xy = 1$ и возмущения распространяются в область $xy < 1$.

Ответ: $(x/x_0)^{x_0 p_0} = (y/y_0)^{y_0 q_0}, \quad p_0 = \partial_x \varphi_0(x_0, y_0), \;\; q_0 = \partial_y \varphi_0(x_0, y_0); \quad xy = e^{-t}.$

2. Диспергирующие волны

2.1. Дисперсионное соотношение

Рассматриваются волновые процессы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями в частных производных с постоянными коэффициентами

$$\sum_{s=0}^{n}\sum_{p=0}^{m} b_{sp}\,\partial_t^{\,s}\,\partial_x^{\,p}u(x,t)=0. \tag{26}$$

Здесь t — время, $x \in \mathbb{R}$ — пространственная переменная, а коэффициенты b_{sp} и решение u могут быть комплексными. Волна, описываемая комплекснозначным решением

$$u(x,t)=a\,e^{i(kx-\omega t)}, \tag{27}$$

называется *элементарным волновым пакетом.* Здесь a — *амплитуда* волны, k — *волновое число,* ω — *частота,* $\theta = kx-\omega t$ — *фаза* волны. В случае вещественных параметров ($Im\,k = 0$ и $Im\,\omega = 0$) волновое число указывает количество волн, укладывающихся на отрезке оси x длины 2π, а частота — количество гребней или впадин, проходящих мимо неподвижного наблюдателя за промежуток времени 2π. С указанными параметрами определены *длина* волны $L = 2\pi/k$ и ее временной *период* $T = 2\pi/\omega$. Каждое постоянное значение фазы θ переносится со скоростью $c_p = \omega/k$, которая называется *фазовой скоростью.* Учитывая это, волновой пакет можно представить в виде бегущей волны $u(x,t) = a\,\exp ik(x-c_p\,t)$, скорость распространения которой равна фазовой скорости.

Дифференцирование функции u в (27) дает $\partial_t u = -i\omega\,u$ и $\partial_x u = ik\,u$. Поэтому для существования решений уравнения (26) в виде волновых пакетов с амплитудой $a \neq 0$ необходимо и достаточно выполнение соотношения

$$D(\omega,k)=0, \tag{28}$$

где функция D имеет вид

$$D(\omega, k) = \sum_{s=0}^{n} \sum_{p=0}^{m} b_{sp} \, (-i\omega)^{\,s} \, (ik)^{\,p}.$$

Равенство (28), связывающее частоту и волновое число, называется *дисперсионным соотношением.* Поскольку $D(\omega, k)$ является полиномом степени n относительно ω, уравнение (28) при заданном k имеет в общем случае n комплексных корней $\omega_j = \omega_j(k)$ $(j = 1, ..., n)$. Семейство волновых пакетов $u(x,t) = a \exp i(kx - \omega(k)\, t)$ с произвольным волновым числом k и частотой $\omega(k)$, порожденной одним фиксированным из корней дисперсионного соотношения, называется *волновой модой.* Количество волновых мод для уравнения (26) совпадает с порядком этого уравнения по переменной t. Зависимость фазовой скорости $c_p(k) = \omega(k)/k$ от волнового числа приводит к тому, что профиль волны, состоящей из нескольких волновых пакетов заданной моды с разными k, деформируется в результате расплывания этих пакетов, бегущих с разными скоростями. Указанное явление называется *дисперсией* волн. Соответственно, волны называются *диспергирующими*, если $\omega''(k) \neq 0$.

Пример. Уравнение Клейна – Гордона – Фока

$$u_{tt} - c_0^2 \, u_{xx} + \alpha^2 u = 0 \tag{29}$$

с вещественными постоянными $c_0 \neq 0$ и α дает дисперсионное соотношение (28), в котором $D(\omega, k) = -\omega^2 + c_0^2 \, k^2 + \alpha^2$. Это соотношение порождает две волновые моды с частотами $\omega_\pm(k) = \pm\sqrt{c_0^2 \, k^2 + \alpha^2}$, вещественными при $k \in \mathbb{R}$. Для $k > 0$ мода с частотой $\omega_+(k)$ описывает волны, бегущие вправо вдоль оси Ox, а мода с частотой $\omega_-(k)$ — волны, распространяющиеся влево. При значениях коэффициента $\alpha \neq 0$ имеем $\omega''_\pm(k) \neq 0$ — волны являются диспергирующими. В случае $\alpha = 0$ уравнение (29) превращается в одномерное волновое уравнение $u_{tt} = c_0^2 \, u_{xx}$. Его общее решение согласно формуле Даламбера является суммой двух бегущих волн $u(x,t) = f(x - c_0\, t) + g(x + c_0\, t)$, а дисперсионное соотношение приводит к волновым модам с частотами $\omega_\pm(k) = \pm c_0\, k$ и фазовыми скоростями $c_p = \pm c_0$. В этом случае дисперсия отсутствует.

Отметим, что (29) является гиперболическим дифференциальным уравнением второго порядка, которое приводится в независимых переменных $\xi = x - c_0\, t,\ \eta = x + c_0\, t$ к каноническому виду $u_{\xi\eta} = (\alpha^2/4c_0^2)\, u$. Эта форма записи уравнения (29) называется телеграфным уравнением, поскольку данное уравнение описывает колебания электромагнитного поля вдоль проводника большой протяженности (линии связи). Наличие дисперсии приводит к искажению сигнала, состоящего из гармоник с несколькими частотами. Менее всего это проявляется при больших k (то есть в области высоких частот ω), так как при $k \to \infty$ фазовые скорости $c_\pm(k) = \pm\sqrt{c_0^2 + \alpha^2 k^{-2}}$ асимптотически постоянны: $c_p^\pm(k) \to \pm c_0$.

2.2. Многомерные волновые пакеты

Для систем l дифференциальных уравнений вида (26) с искомым вектором $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_l)$ элементарные волновые пакеты описываются решениями $\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{a} \exp\, i(kx - \omega t)$, где $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_l)$ — амплитудный вектор.

Пример. Рассматривается система квазилинейных уравнений первого порядка

$$d_t\mathbf{u} + A\,\partial_x\mathbf{u} = 0 \tag{30}$$

для n-мерного вектора $\mathbf{u} = (v, u_1, u_2, ..., u_{n-1})$, $n \geqslant 2$, с оператором дифференцирования $d_t = \partial_t + v\partial_x$. Выделенная компонента v искомой вектор-функции $\mathbf{u}$ здесь имеет смысл скорости перемещения частиц сплошной среды вдоль траекторий $dx/dt = v(x,t)$. Предполагается, что все собственные значения c_j $(j = 1, ..., n)$ постоянной матрицы A порядка $n \times n$ вещественны и различны. Отсюда следует, что линеаризация уравнений (30) на состоянии покоя $\mathbf{u} = 0$ дает гиперболическую систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\partial_t\mathbf{u} + A\,\partial_x\mathbf{u} = 0.$$

Отыскание ее решений в виде элементарного волнового пакета $\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{a}\exp i(kx - \omega t)$ приводит к уравнению $(A - cI)\mathbf{a} = 0$ для амплитудного вектора $\mathbf{a}$, где $c = \omega/k$ — фазовая скорость. Решения с ненулевой амплитудой возможны только при условии

$$det\,(A - cI) = 0,$$

которое и является дисперсионным соотношением. В силу гиперболичности рассматриваемой системы частоты $\omega_j(k) = c_j\, k$ $(j = 1, ..., n)$ вещественны для всех волновых мод.

Заметим, что система уравнений (30) инвариантна относительно преобразования Галилея

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x - u_0 t, \quad \tilde{v} = v - u_0, \quad \tilde{u}_i = u_i \;\; (i = 1, ..., n-1),$$

означающего переход в систему отсчета, движущуюся со скоростью $u_0 = const$. Линеаризация исходной системы (30) на постоянном решении $\mathbf{u} = (u_0, 0, ..., 0)$ дает систему уравнений малых возмущений состояния покоя относительно движущегося наблюдателя

$$\partial_t \mathbf{u} + \tilde{A}\,\partial_x \mathbf{u} = 0$$

с матрицей $\tilde{A} = A + u_0 I$. Легко видеть, что полученное ранее дисперсионное соотношение позволяет найти преобразованную фазовую скорость по формуле $\tilde{c} = \tilde{\omega}(k)/k$, где частота волны $\tilde{\omega}$ в движущейся системе отсчета связана с частотой ω в неподвижной системе соотношением

$$\tilde{\omega} = \omega - u_0 k.$$

Указанное изменение частоты волны при переходе в движущуюся систему отсчета в теории волн называется эффектом Допплера, а поправка к частоте, равная величине $u_0 k$ — сдвигом Допплера.

В рассмотренном выше примере волновые моды гиперболической системы уравнений (30), линеаризованной на постоянном решении, обладают свойством $\omega''(k) \equiv 0$, так что все фазовые скорости оказываются не зависящими от волнового числа. Данное свойство является характерным именно для гиперболических волн.

В пространственном случае $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ элементарным волновым пакетом называется функция вида

$$u(\mathbf{x}, t) = a\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)},$$

где $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ — волновой вектор. Поверхностью постоянной фазы является плоскость

$$k_1\, x_1 + k_2\, x_2 + k_3\, x_3 - \omega t = const,$$

которая перемещается в пространстве $\mathbb{R}^3$ в направлении вектора $\mathbf{k}$ с нормальной фазовой скоростью $c_p = \omega/|\mathbf{k}|$.

Задача. Найти нормальные фазовые скорости для трехмерных волновых пакетов $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}\, \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих системе уравнений линейной теории упругости (уравнения Ламе)

$$\rho_0\, \mathbf{w}_{tt} = (\lambda + \mu)\, \nabla\, div\, \mathbf{w} + \mu \triangle\, \mathbf{w}$$

Здесь $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ — вектор перемещений, $\triangle = \partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2} + \partial^2_{x_3}$, $div\, \mathbf{w} = w_{1x_1} + w_{2x_2} + w_{3x_3}$, $\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$; $\rho_0 = const$ — плотность среды, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ — постоянные Ламе.

Решение. *Найдем сначала результат действия основных дифференциальных операторов на вектор-функцию* $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$, *имеющую вид косинусоидального волнового пакета:*

$$\triangle \mathbf{w} = -|\mathbf{k}|^2 \,\mathbf{a} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t), \qquad \nabla\, div\, \mathbf{w} = -\mathbf{k}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t).$$

Отсюда и из уравнений Ламе следует, что амплитудный вектор $\mathbf{a}$, *волновой вектор* $\mathbf{k}$ *и частота* ω *должны удовлетворять равенству*

$$(\rho_0\, \omega^2 - \mu |\mathbf{k}|^2)\, \mathbf{a} = (\lambda + \mu)\, \mathbf{k}\, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}). \tag{31}$$

Для заданного вектора $\mathbf{k} \neq 0$ *представим амплитудный вектор в виде* $\mathbf{a} = |\mathbf{k}|^{-2}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{k})\,\mathbf{k} + \mathbf{b}$, *где вектор* $\mathbf{b}$ *ортогонален волновому вектору:* $\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} = 0$. *Проекции векторного равенства (31) на направление* $\mathbf{k}$ *и на плоскость, перпендикулярную этому направлению, дают систему уравнений*

$$\big(\rho_0\, \omega^2 - (\lambda + 2\mu)\, |\mathbf{k}|^2\big)\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0, \qquad (\rho_0\, \omega^2 - \mu |\mathbf{k}|^2)\, \mathbf{b} = 0.$$

Если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} \neq 0$, *то с необходимостью получаем* $\omega^2 = (\lambda + 2\mu)\, |\mathbf{k}|^2/\rho_0$, *и, как следствие,* $\mathbf{b} = 0$. *В этом случае направление вектора перемещений* $\mathbf{w}$ *совпадает с направлением* $\mathbf{k}$, *т.е. волновой пакет является продольной волной, распространяющейся с нормальной фазовой скоростью* $c_p = \pm\sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_0}$. *Если же* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0$, *но при этом* $\mathbf{a} \neq 0$, *то тогда и* $\mathbf{b} \neq 0$, *поэтому получаем* $\omega^2 = \mu\, |\mathbf{k}|^2/\rho_0$. *Этот случай дает поперечную волну, в которой вектор перемещений* $\mathbf{w}$ *ортогонален направлению распространения волны, а нормальная фазовая скорость равна величине* $c_p = \pm\sqrt{\mu/\rho_0}$.

Ответ: $\quad c_p^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho_0 \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} \neq 0); \qquad c_p^2 = \mu/\rho_0 \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0)$

2.3. Диссипация и неустойчивость

В случае, когда частота, задаваемая дисперсионным соотношением (28), оказывается комплексной величиной $\omega = \omega_{re} + i\omega_{im}$, волновой пакет имеет вид

$$u(x, t) = a(t)\, e^{i(kx - \omega_{re}\, t)}$$

с зависящим от времени амплитудным множителем $a(t) = a\, \exp(\omega_{im} t)$. Если мнимая часть частоты ω отрицательна, $\omega_{im} < 0$, амплитуда волны экспоненциально затухает при $t \to +\infty$ — имеет место *диссипация*.

Пример. Рассматривается линеаризованное уравнение Бюргерса

$$u_t + c_0 u_x = \nu\, u_{xx}$$

с постоянными c_0 и $\nu > 0$. Единственная волновая мода для этого уравнения задается частотой $\omega(k) = c_0 k - i\nu k^2$. Поскольку $Im\,\omega = -\nu k^2 < 0$ при $k \neq 0$, имеет место затухание волны. Это затухание обусловлено наличием в уравнении второй производной u_{xx} с коэффициентом ν, имеющим смысл вязкости сплошной среды. Длинные волны (предел $k \to 0$) наименее подвержены диссипации, а большая вязкость, наоборот, усиливает затухание. Отметим, что при $c_0 = 0$ исходное уравнение совпадает по форме с уравнением теплопроводности, для которого также характерно явление затухания волн.

В случае $\omega_{im} > 0$ амплитуда неограниченно возрастает с ростом времени — наблюдается *неустойчивость* волнового процесса. Следует иметь в виду, что линейные уравнения (26), возникающие в результате линеаризации более общих нелинейных уравнений, изначально предназначены для описания распространения малых возмущений в сплошной среде. Таким образом, волновой пакет с $\omega_{im} > 0$ может моделировать только начальную стадию разрушения неустойчивого волнового процесса, поскольку с ростом возмущений исходное линейное приближение теряет смысл. С этой точки зрения элементарный волновой пакет, имеющий вещественную частоту ($\omega_{im} = 0$) и постоянную амплитуду a, описывает регулярное распространение волн, когда влияние диссипации или неустойчивости пренебрежимо мало.

2.4. Групповая скорость

Свойство дисперсии ярко проявляется при взаимодействии волновых пакетов $u(x,t) = a\,\cos(kx - \omega t)$ фиксированной моды с вещественной частотой $\omega = \omega(k)$, имеющих одинаковую амплитуду, но разные волновые числа k. Для суммы двух таких пакетов имеем

$$\begin{aligned} &a\,\cos(kx - \omega t) + a\,\cos(k_1 x - \omega_1 t) = \\ &\quad = 2a\,\cos\left(\frac{k_1 - k}{2}\,x - \frac{\omega_1 - \omega}{2}\,t\right)\,\cos\left(\frac{k_1 + k}{2}\,x - \frac{\omega_1 + \omega}{2}\,t\right), \end{aligned}$$

где $\omega_1 = \omega(k_1)$. Волновое движение, описываемое данной суммой, имеет вид периодической последовательности *групп волн*, распространяющихся со скоростью $(\omega_1 - \omega)/(k_1 - k)$. В пределе при $k_1 \to k$ скорость огибающей совпадает

с производной
$$c_g(k) = \frac{d\omega}{dk}.$$
которая называется *групповой скоростью*. Максимальная амплитуда гребней несущей волны внутри каждой из групп приближенно равна удвоенной амплитуде исходных волновых пакетов, а скорость их перемещения — фазовой скорости $c_p(k)$. Для диспергирующих волн групповая и фазовая скорости не совпадают.

Задача. Рассматривается линейное уравнение Буссинеска, описывающее длинные волны малой амплитуды на мелкой воде
$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = \frac{1}{3}\, h_0^2\, u_{xxtt}.$$
Здесь h_0 — глубина жидкости в состоянии покоя, g — ускорение силы тяжести, $c_0 = \sqrt{gh_0}$. Требуется найти фазовую скорость c_p, групповую скорость $_g$ и выяснить, чему равняются максимальные значения $|c_p|$ и $|c_g|$.

Решение. *Разыскивая решение в виде элементарного волнового пакета* $u(x,t) = a\exp(i(kx-\omega t))$*, получаем дисперсионное соотношение*
$$\omega^2 \left(1 + \frac{1}{3}\, h_0^2 k^2\right) = c_0^2 k^2,$$
которое задает две моды, соответствующие волнам, распространяющимся влево и вправо. Отсюда для каждой из мод находится фазовая скорость
$$c_p(k) = \pm c_0 \left(1 + \frac{1}{3}\, h_0^2 k^2\right)^{-1/2}$$
и групповая скорость
$$c_g(k) = \pm c_0 \left(1 + \frac{1}{3}\, h_0^2 k^2\right)^{-3/2}.$$
Эти скорости не совпадают друг с другом при всех $k \neq 0$*, поэтому рассматриваемые волны являются диспергирующими. Кроме того, для обеих скоростей справедлива оценка* $|c_p(k)| \leqslant c_0,\ |c_g(k)| \leqslant c_0$*, причем равенства достигаются в длинноволновом пределе* $k = 0$*. Таким образом, фазовая и групповая скорости для данной волновой модели не превосходят по модулю критической скорости* $\sqrt{gh_0}$.

В многомерном случае групповая скорость определяется формулой $\mathbf{c}_g(\mathbf{k}) = \nabla\omega(\mathbf{k})$. Для пространственных диспергирующих волн могут отличаться не только абсолютные величины, но и направления векторов фазовой и групповой скорости.

Пример. Пусть частота ω является однородной функцией нулевой степени относительно волнового вектора $\mathbf{k}$, то есть $\omega(\lambda k, \lambda l, \lambda m) = \omega(k, l, m)$ при всех $\lambda > 0$. Дифференцирование указанного тождества по параметру λ в точке $\lambda = 1$ дает соотношение

$$k \frac{\partial \omega}{\partial k} + l \frac{\partial \omega}{\partial l} + m \frac{\partial \omega}{\partial m} = 0, \tag{32}$$

которое означает, что вектора $\mathbf{c}_g(\mathbf{k})$ и $\mathbf{k}$ перпендикулярны в каждой точке $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$. Однородность частоты является и необходимым условием ортогональности групповой скорости волновому вектору. Действительно, соотношение (32) представляет собой линейное уравнение в частных производных первого порядка относительно функции $\omega(k, l, m)$. Уравнения характеристик для него имеют вид $dk/k = dl/l = dm/m$, откуда следует, что общее решение $\omega = \omega(k/l, k/m)$ является однородной функцией нулевой степени относительно переменных k, l, m.

2.5. Метод стационарной фазы

Волновой процесс в диспергирующей среде с течением времени обычно приобретает регулярный характер, даже если распространение волн вызвано начальным возмущением общего вида. Для заданной волновой моды $\omega = \omega(k)$ рассмотрим линейную суперпозицию элементарных волновых пакетов

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(k)\, e^{i(kx - \omega(k)t)}\, dk. \tag{33}$$

Входящий сюда амплитудный множитель $a(k)$ однозначно определяется начальной функцией $u(x, 0)$ в виде интеграла Фурье

$$a(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)\, e^{-ikx}\, dx.$$

Поведение решения (33) при больших t удобно расматривать для фиксированного отношения $x/t = U$, что соответствует движению наблюдателя с постоянной скоростью U. Введем фазовую функцию $\psi(k) = kx/t - \omega(k)$, с которой для $v(t) = u(Ut, t)$ имеем

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(k)\, e^{it\psi(k)}\, dk.$$

Далее предполагается, что функции $a(z)$ и $\psi(z)$ являются аналитическими функциями комплексной переменной $z = k + il$ в полосе $|Im\, z| < l_0$ с некоторым $l_0 > 0$. Можно показать, что промежутки интегрирования, на которых $\psi'(k) \neq 0$, дают при $t \to +\infty$ экспоненциально малый вклад в решение. В окрестности точки k_0, для которой $\psi'(k_0) = 0$, но $\psi''(k_0) \neq 0$, справедливо разложение

$$\psi(z) = \psi(k_0) + \frac{1}{2}\,(z - k_0)^2\, \psi''(k_0) + O\big(|z - k_0|^3\big),$$

и поэтому картина линий уровня $Im\, \psi(z) = C$ вблизи такой стационарной точки аналогична структуре линий уровня седловой поверхности $(k - k_0)\, l = 6C/\psi''(k_0)$. Следует отметить, что для функции (33) фаза стационарна в точке k_0, определяемой соотношением $\omega'(k_0) = U = x/t$, т.е. в точке, движущейся с групповой скоростью $c_g(k_0)$. Деформация вещественного контура интегрирования в комплексную область и последующее вычисление интеграла приводят к асимптотике

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\omega''(k_0)|t}}\; a(k_0)\; e^{i\left(\, k_0\, x - \omega(k_0)t - \frac{\pi}{4}\, sign\, \omega''(k_0)\right)} \;+\; O\Big(\frac{1}{t}\Big).$$

Следовательно, при $t \to +\infty$ начальное возмущение распадается на группы волновых пакетов, амплитуда которых убывает как $1/\sqrt{t}$. Для диспергирующих сред плотность переносимой энергии обычно оказывается пропорциональной квадрату амплитуды решения $|u(x,t)|^2$. Согласно указанной выше асимптотике решения часть энергии, заключенная между точками $x_j = \omega'(k_j)\, t$ $(j = 1, 2)$, в первом приближении сохраняется:

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(x,t)|^2\, dx = 2\pi \int_{k_1}^{k_2} |a(k)|^2\, dk.$$

Это означает, что энергия переносится с групповой скоростью, причем дисперсия волн приводит к ее рассеянию в пространстве.

2.6. Асимптотика в окрестности фронта

Описанное поведение решения при $t \to +\infty$ имеет место при условии $\omega''(k_0) \neq 0$. Указанное условие нарушается в точках экстремума групповой скорости, где $\omega''(k_0) = c_g'(k_0) = 0$. В окрестности таких стационарных точек решение имеет другую асимптотику. При ее построении фазовая функция ψ вводится иначе — с помощью формулы $\psi(k) = k\omega'(k_0) - \omega(k)$, так что фаза волны $\theta = kx - \omega t$ связана с ψ равенством $\theta = k\big(x - c_g(k_0)t\big) + \psi(k)$ (при этом отношение x/t остается постоянным). В этом случае для функции $\psi(z)$ справедливо разложение

$$\psi(z) = \psi(k_0) + \frac{1}{6}\,(z-k_0)^3\,\psi'''(k_0) + O\big(|z-k_0|^4\big),$$

согласно которому решение вида (33) в окрестности точки $x = c_g(k_0)t$, удовлетворяющей условию $c_g'(k_0) = 0,\ c_g''(k_0) \neq 0$, имеет асимптотику

$$u(x,t) = \frac{2\pi\, a(k_0)}{\sqrt[3]{(1/2)|c_g''(k_0)|\,t}}\ Ai\left(\frac{x - c_g(k_0)\,t}{\sqrt[3]{(1/2)\,|c_g''(k_0)|\,t}}\right)\ e^{i(\,k_0\,x - \omega(k_0)t)}\ +\ O\left(t^{-\frac{2}{3}}\right).$$

Амплитудный множитель в этой формуле содержит функцию Эйри

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \cos\left(kx + \frac{1}{3}\,k^3\right)\,dk,$$

которая имеет следующее поведение при $|x| \to \infty:$

$$Ai(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,|x|^{\frac{1}{4}}}\begin{cases} \exp\left(-\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\right) & (x \to +\infty),\\ 2\cos\left(\frac{2}{3}\,|x|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) & (x \to -\infty).\end{cases}$$

График функции Эйри дает огибающую кривую для волновых пакетов, которая перемещается со скоростью $c_g(k_0)$. При этом расстояние между соседними нулями огибающей в области ее осцилляций неограниченно увеличивается с ростом t. Таким образом, фронт первоначально локализованного возмущения распространяется со скоростью, равной экстремальному значению групповой скорости. При этом вблизи фронта волновые пакеты затухают медленнее (как $t^{-1/3}$), чем внутри области движения. Согласно приведенной асимптотике функции Эйри при $x \to +\infty$ волновое движение экспоненциально быстро исчезает в невозмущенной области непосредственно перед фронтом.

2.7. Нелинейная дисперсия

При описании нелинейных волн с дисперсией в качестве модельного уравнения часто возникает уравнение Кортевега–де Фриза

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{34}$$

Роль нелинейности выявляется при отыскании решений уравнения (34) в виде бегущей волны $u(x,t) = v(x - ct)$, где функция v удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-cv' + vv' + v''' = 0.$$

Двукратным интегрированием оно сводится к уравнению первого порядка

$$v'^2 = \frac{1}{3}\,(v - v_1)(v - v_2)(v_3 - v), \tag{35}$$

где корни кубического полинома в правой части связаны с константами интегрирования и параметром c формулами Виета. В частности, $v_1 + v_2 + v_3 = 3c$. Решения в виде периодической волны получаются для простых вещественных корней $v_1 < v_2 < v_3$ и даются квадратурой

$$\pm\sqrt{3}\int\limits_{v}^{v_3} \frac{ds}{\sqrt{(s - v_1)(s - v_2)(v_3 - s)}} = x - ct.$$

Указанный интеграл в общем случае не выражается через элементарные функции, однако подстановкой

$$s = v_2 + (v_3 - v_2)\,\cos^2\psi, \qquad v = v_2 + (v_3 - v_2)\,\cos^2\varphi$$

данная зависимость сводится к соотношению

$$\int\limits_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}} = \xi, \tag{36}$$

где обозначено

$$\varkappa^2 = \frac{v_3 - v_2}{v_3 - v_1}, \qquad \xi = \pm\sqrt{(v_3 - v_1)/12}\,(x - ct).$$

Функция $\varphi = am(\xi;\varkappa)$, определяемая соотношением (36), носит название *амплитуды Якоби*, а ее суперпозиция $cn(\xi;\varkappa) = \cos am(\xi;\varkappa)$ называется *эллиптическим косинусом.* Таким образом, искомый волновой профиль имеет форму

$$u(x,t) = v_2 + (v_3 - v_2)\, cn^2\big(\sqrt{(v_3 - v_1)/12}\,(x - ct)\big).$$

Такая волна называется *кноидальной* волной по причине присутствия функции cn в ее определении. Функция $cn(\xi;\varkappa)$ является периодической по ξ с периодом, равным величине $2K(\varkappa)$, где

$$K(\varkappa) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}$$

— полный эллиптический интеграл.

Пример. К уравнению Кортевега — де Фриза, записанному в форме (34), сводится уравнение

$$\eta_t + c_0\left(1 + \frac{3}{2h_0}\,\eta\right)\eta_x + \frac{1}{6}\,c_0 h_0^2\,\eta_{xxx} = 0$$

для функции $\eta(x,t)$, дающей возвышение свободной поверхности в нелинейной длинной волне на поверхности жидкости конечной глубины h_0.

Литература

1. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: Мир, 1979. 136 с.

2. Габов С.А. Введение в теорию нелинейных волн. М.: Издательство Московского университета. 1988. 176 с.

3. Жермен П. Механика сплошных сред. М.: Мир, 1965. 480 с.

4. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. Новокузнецк: ИО НФМИ. 1998. 322 с.

5. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. 667 с.

6. Солитоны. Ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри. М.: Мир, 1983. 408 с.

7. Тода М. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984. 264 с.

8. Федорюк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука. 1987. 544 с.

Задачи

1. Найти фазовую скорость $c_p(k) = \omega(k)/k$ и групповую скорость $c_g(k) = d\omega/dk$ для дисперсионных соотношений $\omega = \omega(k)$, порождаемых следующими уравнениями:

$$(a)\ u_t + c_0 u_x + c_0 h_0^2\, u_{xxx} = 0; \qquad (b)\ u_t + c_0 u_x - h_0^2\, u_{xxt} = 0$$

(здесь $c_0 > 0$, $h_0 > 0$ — постоянные). Показать, что при всех $k \geqslant 0$ выполнены неравенства

$$\omega^{(a)}(k) \leqslant \omega^{(b)}(k), \quad c_p^{(a)}(k) \leqslant c_p^{(b)}(k), \quad c_g^{(a)}(k) \leqslant c_g^{(b)}(k),$$

в которых равенства достигаются только при $k = 0$. Чему равны пределы отношений $c_g^{(a)}(k)/c_p^{(a)}(k)$ и $c_g^{(b)}(k)/c_p^{(b)}(k)$ в длинноволновом ($k \to 0$) и коротковолновом ($k \to \infty$) приближениях? Построить графики функций $\omega(k), c_p(k), c_g(k)$ при $-\infty < k < +\infty$ для уравнений (a) и (b).

Ответ: $$\lim_{k\to 0} \frac{c_g^{(a)}(k)}{c_p^{(a)}(k)} = \lim_{k\to 0} \frac{c_g^{(b)}(k)}{c_p^{(b)}(k)} = 1, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{c_g^{(a)}(k)}{c_p^{(a)}(k)} = 3, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{c_g^{(b)}(k)}{c_p^{(b)}(k)} = -1.$$

2. Известно, что групповая скорость волн, описываемых дифференциальным уравнением с двумя независимыми переменными x, t и комплексными постоянными коэффициентами, вещественна и совпадает с удвоенной фазовой скоростью. Восстановить вид уравнения, если оно имеет (a) первый порядок по t; (b) второй порядок по t.

Ответ: $(a)\ iu_t + \gamma u_{xx} = 0$; $(b)\ u_{tt} - i(\gamma_1 + \gamma_2)\, u_{xxt} - \gamma_1\gamma_2\, u_{xxxx} = 0$ $(\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R} - const)$.

3. Показать, что для уравнения $u_{tt} - c_0^2\, u_{xx} + u = 0$ при любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение баланса энергии

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} e(x,t)\, dx + f(x,t)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

с плотностью энергии $e = (u_t^2 + c_0^2 u_x^2 + u^2)/2$ и потоком энергии $f = -c_0^2\, u_x\, u_t$.

4. Скорость переноса энергии волновым пакетом $u = a\,\sin(kx - \omega t)$ определяется как отношение $U = F/E$ усредненного за временной период $T = 2\pi/\omega$ потока энергии к средней по пространственному периоду $L = 2\pi/k$ плотности энергии,

$$F = \frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(x,t)\,dt, \qquad E = \frac{1}{L}\int\limits_{x_1}^{x_1+L} e(x,t)\,dx.$$

В условиях предыдущей задачи показать, что U совпадает с групповой скоростью $c_g(k)$.

5. Показать, что локальная частота ω, локальное волновое число k и фаза θ группы волн, задаваемые как функции от x и t неявным образом с помощью соотношений

$$\omega = W(k), \quad x = W'(k)\,t, \quad \theta = kx - \omega t,$$

удовлетворяют при условии $W''(k) \neq 0$ дифференциальным уравнениям

$$k_t + W'(k)k_x = 0, \quad \theta_x = k, \quad \theta_t = -\omega.$$

6. Известно, что для моды $\omega = \omega(\mathbf{k})$ с двумерным волновым вектором $\mathbf{k} = (k, l)$ вектор групповой скорости $\mathbf{c}_g = (\partial\omega/\partial k, \partial\omega/\partial l)$ при всех $\mathbf{k} \neq 0$ образует с волновым вектором постоянный угол α $(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$. Определить вид зависимости $\omega(\mathbf{k})$, для которой это возможно.

Ответ: $\omega(\mathbf{k}) = f\left(|\mathbf{k}|\,e^{\pm\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha}\right)$, где $\varphi = arctg(k/l)$, а функция $f \in C^1$ такова, что $f'(\xi) \geqslant 0$ $(\xi \in \mathbb{R})$ при $0 \leqslant \alpha < \pi/2$, и $f'(\xi) \leqslant 0$ $(\xi \in \mathbb{R})$ при $\pi/2 < \alpha \leqslant \pi$; $\omega(\mathbf{k}) = f(k/l)$ при $\alpha = \pi/2$.

7. Показать, что для дисперсионной кривой $\omega = \omega(k)$, удовлетворяющей условию $\omega(0) = 0$ и выпуклой при $k > 0$, групповая скорость $c_g(k) = \omega'(k)$ и фазовая скорость $c_p(k) = \omega(k)/k$ имеют следующие свойства:

(a) $c_g(k) > c_p(k)$, если $\omega''(k) > 0$ при всех $k > 0$ (дисперсионная кривая выпукла вниз).

(b) $c_g(k) < c_p(k)$, если $\omega''(k) < 0$ при всех $k > 0$ (дисперсионная кривая выпукла вверх).

Показать, что эти утверждения перестают быть верными для участков выпуклости или вогнутости дисперсионной кривой при наличии точек перегиба.

8. Показать, что резонанс фазовой и групповой скоростей $c_p(k_0) = c_g(k_0)$ в точке $k_0 \neq 0$ равносилен выполнению любого из двух следующих свойств:

   (a) дисперсионная кривая $\omega = \omega(k)$ касается в точке $k = k_0$ прямой, проходящей через начало координат в плоскости (k, ω);

   (б) значение волнового числа $k = k_0$ является стационарной точкой для фазовой скорости: $c_p'(k_0) = 0$.

9. Показать, что для изотропных волн $\omega = \omega(|\mathbf{k}|)$ с $\omega(0) = 0$ в случае $\omega'(k) > 0,\ \omega''(k) < 0$ всегда существует набор векторов $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$, удовлетворяющих условиям трехволнового резонанса

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \qquad \omega(|\mathbf{k}_3|) = \omega(|\mathbf{k}_1|) + \omega(|\mathbf{k}_2|),$$

   а в случае $\omega'(k) > 0,\ \omega''(k) > 0$ этим условиям удовлетворить невозможно.

10. Определить, при каких значениях вещественных параметров a и b устойчивы все волновые моды системы

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} + v_{xx} = 0, \\ v_{tt} - b^2\, v_{xx} + u_{xx} = 0. \end{cases}$$

   Ответ: $a^2\, b^2 \geqslant 1.$

11. Определить, за какое время T уменьшится вдвое абсолютная величина $|u(x,t)|$ волнового пакета $u = a \exp i(kx - \omega t)$ для уравнения

$$u_t - \nu u_{xx} + \sum_{s=0}^{n} b_s\, \partial_x^{2s+1} u = 0,$$

где $\nu > 0$ — $const$, $\quad b_s = const$ $(s = 1, ..., n)$.

Ответ: $\quad T = \ln 2/(\nu k^2)$.

12. Начальный волновой профиль u_0 имеет вид последовательности треугольных импульсов, сосредоточенных на попарно непересекающихся интервалах $I_m = (x_m - 2,\, x_m + 2)$ $(m = 1, ..., n)$:

$$u_0(x) = \begin{cases} 2 - |x - x_m|, & x \in I_m, \\ 0, \qquad x \notin I_m & (m = 1, ..., n). \end{cases}$$

Найти амплитудный множитель $a(k)$ для указанной функции u_0.

Ответ: $\quad a(k) = \dfrac{2\sin^2 k}{\pi k^2} \displaystyle\sum_{m=1}^{n} e^{ikx_m}$.

13. Найти амплитудный множитель $a(k)$, если начальные данные u_0 имеют вид модулированного волнового пакета:

(a) $u_0(x) = e^{-|x|}\cos k_0 x$; (b) $u_0(x) = e^{-x^2/2}\cos k_0 x \quad (k_0 = const)$.

Ответ: (a) $\; a(k) = \dfrac{1 + k^2 + k_0^2}{\pi[1 + (k + k_0)^2][1 + (k - k_0)^2]}$; $\quad (b)$ $a(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(k^2 + k_0^2\right)}\, \mathrm{ch}(kk_0)$.

14. Доказать, что для начальной функции $u_0(x)$, удовлетворяющей условию

$$A \overset{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{l_0|x|}|u_0(x)|\, dx < \infty \qquad (l_0 > 0)$$

амплитудная функция $a(k)$ допускает аналитическое продолжение в полосу $|Im\, z| < l_0$ комплексной переменной $z = k + il$, где для нее справедливы оценки

$$|\, a(z)| \leqslant \frac{A}{2\pi}, \qquad |\, a'(z)| \leqslant \frac{A}{2\pi e\,(l_0 - |Im\, z|)}.$$

15. Пусть амплитудная функция a и фазовая функция ψ удовлетворяют условиям

$$a(k) \in C^1, \quad \psi(k) \in C^2, \quad \psi'(k) \neq 0 \quad (-\infty < k_1 \leqslant k \leqslant k_2 < +\infty).$$

Показать, что при $t \to +\infty$ справедлива асимптотика

$$\int\limits_{k_1}^{k_2} a(k)\, e^{it\psi(k)}\, dk = \frac{a(k)\, e^{it\psi(k)}}{it\psi'(k)} \Bigg|_{k=k_1}^{k=k_2} + o\left(\frac{1}{t}\right).$$

Указание: воспользоваться леммой Римана — Лебега.

16. Волновое движение описывается решением $u(x,t)$ вида (33) с модой $\omega = \omega(k) \in C^2$ и начальными данными

$$u(x,0) = A_0(x)\, e^{ik_0 x},$$

где функция A_0 имеет преобразование Фурье $\widehat{A}_0$ с компактным носителем:

$$\widehat{A}_0(k) = 0 \quad (|k| > r > 0), \qquad M = \int\limits_{-r}^{r} |\widehat{A}_0(k)|\, dk < \infty$$

(начальное возмущение с узкополосным спектром). Доказать, что при малых временах $t > 0$ решение u имеет вид модулированной гармонической волны:

$$u(x,t) = A_0\big(x - \omega'(k_0)t\big)\, e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} + \tilde{u}(x,t),$$

где функция $\tilde{u}$ допускает равномерную по x оценку

$$|\tilde{u}(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\, M r^2 t \max_{|k-k_0| \leqslant r} |\omega''(k)|.$$

17. С помощью метода стационарной фазы найти асимптотику интеграла

$$v(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,(tk - \frac{1}{3}\,k^3)} e^{-k^2/t}\, dk$$

при $t \to +\infty$.

Ответ: $v(t) = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{e\sqrt[4]{t}} \cos\left(\dfrac{2t\sqrt{t}}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) + O\left(\dfrac{1}{t}\right).$

18. Используя представление функции Эйри в виде контурного интеграла в плоскости комплексной переменной $\zeta = k + il$

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_C e^{i(x\zeta + \frac{1}{3}\zeta^3)}\, d\zeta$$

с контуром $C = \{k + il : \ l = (1/\sqrt{3})|k|\}$, показать, что функция $Ai(z)$ является целой аналитической функцией комплексной переменной $z = x + iy$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению $Ai''(z) = zAi(z)$.

19. Ищется автомодельное решение $u(x,t) = (1/\sqrt[3]{3t})\, v(x/\sqrt[3]{3t})$ линейного уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t + u_{xxx} = 0.$$

Какому дифференциальному уравнению должна удовлетворять функция $v(\xi)$? Показать, что функция $v = Ai(\xi)$ дает одно из таких решений.

Ответ: $v'' = \xi v + C \ \ (C = const)$.

20. Рассматривается задача Коши для линеаризованного уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t + c_0 u_x + u_{xxx} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x)$$

с начальной функцией u_0, удовлетворяющей условию

$$M \overset{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)\, dx \neq 0.$$

С помощью метода стационарной фазы найти асимптотику решения при $t \to +\infty$ в окрестности точки $x = c_0 t$ $(c_0 > 0)$.

Ответ: $u(x,t) = \dfrac{M}{\sqrt[3]{3t}}\, Ai\left(\dfrac{x - c_0\, t}{\sqrt[3]{3t}}\right) + O\left(t^{-\frac{2}{3}}\right)$.

21. Найти решение типа уединенной волны $u = u(x - ct)$ $(u, u', u'' \to 0$ при $|x| \to \infty)$ для уравнения Кортевега – де Фриза

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0.$$

22. Проверить прямым вычислением, что функция

$$u(x,t) = 72a^2 \frac{3 + 4\,\mathrm{ch}\,2a(x - 4a^2t) + \mathrm{ch}\,4a(x - 16a^2t)}{[3\,\mathrm{ch}\,a(x - 28a^2t) + \mathrm{ch}\,3a(x - 12a^2t)]^2} \qquad (a = const)$$

удовлетворяет уравнению Кортевега – де Фриза (двухсолитонное решение).

23. Показать, что для решений $u(x,t)$ уравнения КдФ, затухающих вместе со своими производными при $|x| \to \infty$, справедливы законы сохранения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)\,dx = 0, \qquad \frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(u_x^2(x,t) - \frac{1}{3}\,u^3(x,t)\right)dx = 0.$$

24. Говорят, что дифференциальное уравнение с двумя независимыми переменными x и t, имеющее первый порядок по t, допускает гамильтонову формулировку, если его можно представить в виде

$$u_t = D_x\,\delta_u\,H\left(u, u_x, ..., u_{x...x}^{(n)}\right).$$

Здесь D_x — оператор полного дифференцирования по x, а δ_u — оператор Эйлера (оператор вариационного дифференцирования),

$$D_x = \partial_x + u_x\partial_u + u_{xx}\partial_{u_x} + u_{xxx}\partial_{u_{xx}} + ..., \qquad \delta_u = \partial_u - D_x\,\partial_{u_x} + D_x^2\,\partial_{u_{xx}} - ...,$$

где $x, u, u_x, u_{xx}, ...$ рассматриваются как независимые переменные. Найти функцию Гамильтона $H(u, u_x)$ для уравнения Кортевега – де Фриза.

Ответ: $\quad H(u, u_x) = \dfrac{1}{2}\,u_x^2 - \dfrac{1}{6}\,u^3.$

25. Разыскивая решение уравнения КдФ в виде $u = u(kx - \omega t)$ с 2π-периодической по x функцией u, найти выражение $c_p = c_p(a,k)$ для фазовой скорости $c_p = \omega/k$ при малых амплитудах a с точностью до величин порядка $O(a^3)$.

26. Показать, что функции $v(x,t)$ и $u(x,t) = -v^2(x,t) - v_x(x,t)$ связаны тождеством

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = -(2v + \partial_x)\,(v_t - 6v^2v_x + v_{xxx})$$

(преобразование Миуры).

27. Для модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза

$$v_t - (6v + 6v^2)\, v_x + v_{xxx} = 0 \tag{37}$$

найти ограниченное решение типа бегущей волны $v = v(x - t)$, удовлетворяющее условиям $v, v', v'' \to 0$ при $x \to -\infty$.

Ответ: $v = -\dfrac{1}{1 + e^{-(x-t)}}$ (волна типа фронта)

28. Построить решение уравнения (37) типа уединенной волны $v = v(x - ct)$, бегущей со скоростью $0 < c < 1$ и удовлетворяющей условиям затухания $v, v', v'' \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Ответ: $v = -\dfrac{c}{1 + \sqrt{1-c}\,\operatorname{ch}\sqrt{c}\,(x - ct)}$.

29. Вывести дисперсионное соотношение для волновых пакетов $u(\mathbf{x}, t) = a\, exp\,(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)$, удовлетворяющих уравнению Шредингера с постоянным потенциалом $V = const$:

$$i\hbar\, u_t + \frac{\hbar^2}{2m}\,\triangle u - V\, u = 0,$$

где $\triangle = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ — оператор Лапласа, $\hbar$ — постоянная Планка (волны де Бройля в квантовой механике, описывающие поведение частицы массы m в поле с потенциалом V). Показать, что скорость частицы $\mathbf{U} = \mathbf{p}/m$, определяемая как отношение ее импульса $\mathbf{p} = \hbar\,\mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ — волновой вектор) к массе m, совпадает с групповой скоростью $\mathbf{c}_g(\mathbf{k})$.

30. Найти общий вид автомодельного решения $u(x, t) = v(x/\sqrt{t})/\sqrt{t}$ для одномерного уравнения Шредингера

$$i\, u_t + u_{xx} = 0.$$

Ответ: $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\, e^{ix^2/4t}\left(C_1 + C_2 \displaystyle\int_0^{x/\sqrt{t}} e^{-i\xi^2/4}\, d\xi\right) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{C}).$

31. С помощью преобразования Фурье построить решение задачи Коши

$$i\,u_t + u_{xx} = 0, \qquad u(x,0) = \frac{\sin x}{x}.$$

Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\, e^{\frac{ix^2}{4t}} \left\{ f\left(\frac{2t-x}{2\sqrt{t}}\right) + f\left(\frac{2t+x}{2\sqrt{t}}\right) \right\}, \quad f(z) = \int\limits_0^z e^{-is^2} ds.$

32. Для нелинейного уравнения Шредингера

$$i\,u_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0$$

построить решение типа солитона огибающей $u(x,t) = A(x-ct)\,\exp i(kx-\omega t)$ с вещественной амплитудой A, удовлетворяющей условию $A(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$.

33. Показать, что для затухающих при $|x| \to \infty$ решений нелинейного уравнения Шредингера справедливы законы сохранения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t)|^2\, dx = 0, \qquad \frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(|u_x(x,t)|^2 - \frac{1}{2}\,|u(x,t)|^4 \right) dx = 0.$$

34. Пусть комплекснозначная функция $u(x,t) \in C^4$ является решением задачи Коши для линейного уравнения Шредингера

$$i\,u_t + \gamma\, u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \qquad (\gamma = const)$$

с начальной функцией u_0, принимающей только вещественные значения: $Im\, u_0(x) \equiv 0$. Доказать, что функция $v(x,t) = Re\, u(x,t)$ является решением задачи Коши для уравнения изгибных волн в упругом стержне

$$v_{tt} + \gamma^2\, v_{xxxx} = 0, \qquad v(x,0) = u_0(x), \quad v_t(x,0) = 0.$$

35. Рассматривается задача Коши для уравнения волн изгиба в стержне

$$u_{tt} + \gamma^2 u_{xxxx} = 0 \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

с начальными данными $u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = 0$, где $u_0(x) \in C^\infty$ — четная по x абсолютно интегрируемая функция. С помощью метода стационарной фазы найти асимптотику решения при $t \to +\infty$.

Ответ: $\quad u(x,t)=\sqrt{\frac{\pi}{\gamma t}}\,a\left(\frac{x}{2\gamma t}\right)\,\cos\left(\frac{x^2}{4\gamma t}-\frac{\pi}{4}\right)+O(\frac{1}{t}),$ где $\quad a(k)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}u_0(x)\cos kx\,dx.$

36. Используя преобразование Фурье, построить в явном виде решение уравнения изгибных колебаний балки, удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0)=a\,e^{-x^2/4},\qquad u_t(x,0)=0\qquad (a=const)$$

Ответ: $\quad u(x,t)=\frac{a}{\sqrt[4]{1+\gamma t^2}}\,e^{-\frac{x^2}{4(1+\gamma t^2)}}\,\cos\left\{\frac{\gamma t x^2}{4(1+\gamma t^2)}-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\gamma t\right\}.$

37. Вывести дисперсионное соотношение для уравнения колебаний нагруженной балки на упругой опоре

$$u_{tt}+\gamma^2\,u_{xxxx}+P\,u_{xx}+ku=0,$$

где P — продольная нагрузка, k — жесткость опоры. Найти частоту отсечки $\omega_{min}=\min\limits_k\,\omega(k)$.

38. Вывести дисперсионное соотношение, найти нормальную фазовую и групповую скорости для уравнения изгибных колебаний пластины

$$u_{tt}+\gamma^2\,\triangle^2\,u=0,$$

где $\triangle=\partial^2_{x_1}+\partial^2_{x_2}$ — двумерный оператор Лапласа, $\gamma^2=Eh^2/\big(12\rho_0\,(1-\nu^2)\big)$. Здесь h — толщина пластины, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Ответ: $\quad \omega(\mathbf{k})=\pm\,\gamma|\mathbf{k}|^2,\quad c_p(\mathbf{k})=\pm\gamma|\mathbf{k}|,\quad \mathbf{c}_g(\mathbf{k})=\pm 2\gamma\,\mathbf{k}.$

39. Для вектора перемещений $\mathbf{w}=(w_1,w_2,w_3)$, являющегося решением трехмерной системы уравнений Ламе

$$\rho_0\,\mathbf{w}_{tt}=(\lambda+\mu)\,\nabla\,div\,\mathbf{w}+\mu\triangle\,\mathbf{w},$$

рассматривается представление Гельмгольца $\mathbf{w}=\nabla\varphi+rot\,\mathbf{v}$ $(div\,\mathbf{v}=0)$ с функциями φ и $\mathbf{v}$, определенными при всех $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ и имеющими ограниченные вторые производные по $\mathbf{x}$ и t. Показать, что скалярный потенциал φ и векторный потенциал $\mathbf{v}$ удовлетворяют волновым уравнениям $\varphi_{tt} = c_1^2 \triangle \varphi$ и $\mathbf{v}_{tt} = c_2^2 \triangle \mathbf{v}$. Чему равны скорости c_1 и c_2 распространения соответствующих волн?

Ответ: $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}.$

40. Равенство (31), связывающее амплитудный вектор $\mathbf{a}$, волновой вектор $\mathbf{k}$ и частоту ω волнового пакета для трехмерной системы уравнений Ламе, имеет вид линейной однородной относительно $\mathbf{a}$ системы уравнений $A(\omega, \mathbf{k})\,\mathbf{a} = 0$, где

$$A(\omega, \mathbf{k}) = (\rho_0\, \omega^2 - \mu|\mathbf{k}|^2)\, I - (\lambda + \mu)\, \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$$

Найти дисперсионную функцию $D(\omega, \mathbf{k}) = \det A(\omega, \mathbf{k})$ для уравнений Ламе.

Ответ: $D(\omega, \mathbf{k}) = \left(\rho_0\, \omega^2 - \mu|\mathbf{k}|^2\right)^2 \left[\rho_0\, \omega^2 - (\lambda + 2\mu)\, |\mathbf{k}|^2\right]$

41. Используя двумерную систему уравнений Ламе с вектором перемещений $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, вывести дисперсионное соотношение для поверхностных волн Рэлея, описываемых волновыми пакетами

$$w_1 = A_1(x_2)\, \cos(kx_1 - \omega t), \quad w_2 = A_2(x_2)\, \sin(kx_1 - \omega t)$$

с условиями отсутствия напряжений

$$\partial_{x_2} w_1 + \partial_{x_1} w_2 = 0, \quad \lambda\, \partial_{x_1} w_1 + (\lambda + 2\mu)\, \partial_{x_2} w_2 = 0.$$

на границе полупространства $x_2 \leqslant 0$ и условием затухания $\mathbf{w} \to 0$ при $x_2 \to -\infty$.

42. Рассматривается уравнение

$$\xi_{tt} = \left(\xi^{3/2} + \xi^{1/4} \left(\xi^{5/4}\right)_{xx}\right)_{xx},$$

описывающее распространение одномерных нелинейных волн в слабо сжимаемых гранулированных материалах. Здесь $\xi = -w_x > 0$ — деформация, w — перемещение. Проверить, что данное уравнение имеет точное решение типа бегущей волны

$$\xi_c(x,t) = \frac{25}{16}\,c^4\,\cos^4\left(\frac{x-ct}{5}\right).$$

Показать, что функция $\eta(x,t)$, определенная равенством $\eta = \xi_c$ при $|x - ct| < (5/2)\pi$, и $\eta = 0$ при $|x-ct| \geqslant (5/2)\pi$, также является решением ("компактон" — уединенная волна с компактным носителем).

43. Малые колебания одинаковых грузов массы m, связанных пружинами жесткости β^2 в бесконечную цепочку, описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$m\,\ddot{x}_n = \beta^2\,(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Найти фазовую и групповую скорости распространения сигнала по цепочке в виде волнового пакета $x_n(t) = a\,\exp\{i(kn - \omega t)\}$.

Ответ: $\quad c_p(k) = \pm\dfrac{\beta}{\sqrt{m}}\,\dfrac{\sin(k/2)}{(k/2)}, \quad c_g(k) = \pm\dfrac{\beta}{\sqrt{m}}\,\cos(k/2).$

44. В условиях предыдущей задачи показать, что для движений грузов, удовлетворяющих условию затухания $x_n, \dot{x}_n \to 0$ $(n \to \pm\infty)$, суммарный импульс M и полная энергия E данной системы сохраняются со временем:

$$M(t) \overset{def}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m\dot{x}_n = \mathrm{const},\ E(t) \overset{def}{=} \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{m\dot{x}_n^2 + \beta^2(x_{n+1} - x_n)^2\right\} = \mathrm{const}.$$

45. Написать уравнения малых колебаний и вывести дисперсионное соотношение для цепочки чередующихся грузов двух сортов с массами $m_1 \neq m_2$, связанных одинаковыми пружинами жесткости β^2.

Ответ: $\quad \omega^2(k) = \beta^2\left\{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)^2 + \frac{4\cos^2 k}{m_1 m_2}}\right\}.$

46. Интегральное преобразование Гильберта H действует на функцию u по формуле

$$Hu(x) = v.p.\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(y)\,dy}{x-y} = \lim_{\substack{A\to+\infty\\ \varepsilon\to 0+}}\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{x-A}^{x-\varepsilon}+\int\limits_{x+\varepsilon}^{x+A}\right)\frac{u(y)\,dy}{x-y}$$

Как связано преобразование Фурье $\widehat{Hu}(k)$ функции $Hu(x)$ с преобразованием Фурье функции $u(x)$? Найти преобразование Гильберта $Hv(x)$ для функции $v(x) = b/(x^2+b^2)$ $(b>0)$.

Ответ: $\widehat{Hu}(k) = -i\,sign\,k\,\widehat{u}(k)$; $\qquad Hv(x) = x/(x^2+b^2)$.

47. Разыскивая решение в виде элементарного волнового пакета $u(x,t) = a\,e^{i(kx-\omega t)}$, вывести дисперсионное соотношение для линеаризованного уравнения Бенджамина – Оно

$$u_t + c_0u_x + Hu_{xx} = 0$$

(здесь H — преобразование Гильберта).

Ответ: $\omega(k) = (c_0+|k|)\,k$.

48. Построить решение уравнения Бенджамина – Оно

$$u_t + uu_x + Hu_{xx} = 0$$

в виде бегущей уединенной волны $u = u(x-ct)$ с дробно-рациональной функцией $u(\xi)$, являющейся линейной комбинацией функций $v_1(\xi) = b/(\xi^2+b^2)$ и $v_2(\xi) = \xi/(\xi^2+b^2)$ (использовать результат задачи 46 и перестановочность преобразования Гильберта с оператором дифференцирования).

Ответ: $u(x,t) = \dfrac{4c}{c^2(x-ct)^2+1}$.

49. Вывести дисперсионное соотношение для интегро-дифференциального уравнения

$$u_t + \frac{\pi}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}|x-y|}\,u_y(y,t)\,dy = 0.$$

50. Построить решение типа уединенной волны для уравнения Уизема

$$u_t + uu_x + \frac{\pi}{4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}|x-y|}\, u_y(y,t)\, dy = 0.$$

Указание: применить к уравнению оператор $\partial_x^2 - (\pi/2)^2\, I$.

3. Волны в жидкостях

3.1. Уравнения движения

Рассматриваются движения идеальной несжимаемой неоднородной жидкости в поле силы тяжести $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. Искомыми величинами являются вектор скорости $\mathbf{u} = (u, v, w)$, плотность ρ и давление p, зависящие от $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ и времени t. Для любой *неподвижной* области Ω с кусочно-гладкой границей S ($\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к поверхности S) справедливы интегральные законы сохранения объема жидкости

$$\iint\limits_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0,$$

ее массы

$$\frac{d}{dt} \iiint\limits_\Omega \rho\, d\Omega + \iint\limits_S \rho\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0,$$

импульса

$$\frac{d}{dt} \iiint\limits_\Omega \rho \mathbf{u}\, d\Omega + \iint\limits_S \big(\rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + p\mathbf{n}\big)\, dS = \iiint\limits_\Omega \rho \mathbf{g}\, d\Omega$$

и энергии

$$\frac{d}{dt} \iiint\limits_\Omega \left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho g z\right) d\Omega + \iint\limits_S \left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + p + \rho g z\right)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\, dS = 0.$$

В области непрерывного движения, описываемого гладкими функциями $\mathbf{u}, \rho, p$, указанная совокупность законов сохранения равносильна системе дифференциальных уравнений

$$div\, \mathbf{u} = 0, \quad \rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{g}. \tag{38}$$

Вектор вихря $\boldsymbol{\omega} = rot\, \mathbf{u}$ при этом удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\boldsymbol{\omega}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho^2} \nabla p \times \nabla \rho.$$

Отсюда следует, что завихренность в невязкой неоднородной жидкости меняется под действием двух факторов: переноса начального распределения вихря и образования новых вихрей вследствие несовпадения в течении поверхностей уровня давления и плотности (изобарических поверхностей $p(\mathbf{x}, t) = const$ и изохороических поверхностей $\rho(\mathbf{x}, t) = const$).

Пример. Решения уравнений (38) с тождественно постоянной плотностью $\rho = \rho_0$ описывают течения однородной жидкости — в этом случае указанная система сводится к уравнениям Эйлера идеальной несжимаемой жидкости

$$div\,\mathbf{u} = 0, \qquad \mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0}\,\nabla p = \mathbf{g}. \tag{39}$$

Соответственно, уравнение для вихря принимает форму

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\,\langle\boldsymbol{\omega}\rangle, \qquad \frac{d}{dt} = \partial_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla) \tag{40}$$

и благодаря своей специальной структуре интегрируется путем перехода от эйлеровых переменных $(\mathbf{x}, t)$ к лагранжевым $(\boldsymbol{\xi}, t)$. Зависимость $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ между переменными Эйлера и Лагранжа устанавливает задача Коши для дифференциальных уравнений траекторий жидких частиц

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \qquad \mathbf{x}_{|t=0} = \boldsymbol{\xi}. \tag{41}$$

В лагранжевых переменных для искомой функции $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\xi}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t)$ имеем $\partial_t\tilde{\boldsymbol{\omega}} = d\boldsymbol{\omega}/dt$. Поэтому для каждой траектории с заданным начальным положением частицы ξ система (40) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений для вектор-функции $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\xi}, t)$. С другой стороны, дифференцирование уравнений (41) по параметрической переменной $\boldsymbol{\xi}$ дает уравнения в вариациях

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \circ M, \qquad M_{|t=0} = I$$

с матрицей Якоби $M = \mathbf{x}'_\xi(\boldsymbol{\xi}, t) = \partial(x, y, z)/\partial(\xi, \eta, \zeta)$ и единичной матрицей I. В силу формулы Остроградского — Лиувилля для определителя $|M| = \det M$ имеем $|M|_t = |M|\,tr\,\mathbf{u}'_{\mathbf{x}} = |M|\,div\,\mathbf{u} = 0$, так что матрица M невырождена: $|M(\boldsymbol{\xi}, t)| = 1$. Отсюда вытекает, что M является фундаментальной матрицей решений для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (40). Таким образом, изменение вектора вихря вдоль траекторий частиц жидкости описывается формулой Коши $\boldsymbol{\omega} = M\boldsymbol{\omega}_0$, где $\boldsymbol{\omega}_0$ — начальное поле вихря. В качестве следствия это дает теорему Лагранжа, согласно которой $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$ в жидком объеме однородной жидкости $\Omega(t)$ при всех $t > 0$, если завихренность отсутствовала в $\Omega(0)$. Для безвихревого течения поле вектора скорости $\mathbf{u}$ обладает потенциалом φ — гармонической по пространственным переменным x, y, z функцией ($\Delta\varphi = 0$), с которой $\mathbf{u} = \nabla\varphi$. В этом случае уравнение импульса в системе (39) сводится к интегралу Коши–Лагранжа

$$\varphi_t + \frac{1}{2}\,|\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{\rho_0}\,p + gz = b(t),$$

где b — произвольная функция времени.

Для однозначного определения неустановившегося движения во всей области, занимаемой жидкостью при $t = 0$, задается поле скоростей $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, а при $t > 0$ на границах области течения задаются граничные условия. Так, на неподвижных поверхностях с вектором нормали $\mathbf{n}$ ставится условие непротекания $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, а на свободных границах $f(x, y, z, t) = 0$ — кинематическое условие

$$(f_t + \mathbf{u} \cdot \nabla f)_{|f=0} = 0$$

и динамическое условие $p = \tilde{p}$ с заданной функцией $\tilde{p}$. Например, при контакте жидкости с атмосферой давление на свободной поверхности принимается постоянным, если движение воздуха не учитывается: $p = p_0$; в этом случае константа p_0 без нарушения общности может считаться равной нулю. Кинематическое условие на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей имеет вид

$$(f_t + \mathbf{u}_j \cdot \nabla f)_{|f=0} = 0 \quad (j = 1, 2),$$

где $\mathbf{u}_j$ — предельные значения скорости с двух сторон контактной поверхности, а динамическое условие предполагает непрерывность давления:

$$[p\,] = p_2 - p_1 = 0.$$

Стационарные течения описываются решениями системы (38), для которых $\rho_t = 0$ и $\mathbf{u}_t = 0$. В этом случае для любой линии тока $L: \ \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$ справедлив интеграл Бернулли

$$\frac{1}{2}\,|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\rho}\,p + gz = b(L)$$

(константа Бернулли $b(L)$ зависит от линии тока).

При описании плоских движений жидкости будем использовать декартову систему координат Oxy с осью Oy, направленной вертикально вверх. Для вектора скорости плоского течения $\mathbf{u} = (u, v)$ можно ввести функцию тока ψ, полагая $u = \psi_y, \ v = -\psi_y$. Тогда уравнение неразрывности $div\,\mathbf{u} = 0$ выполняется тождественно, а в случае стационарных течений интегрируется и уравнение для плотности $\mathbf{u}\cdot\nabla\rho = 0$, дающее зависимость $\rho = \rho(\psi)$. Интеграл Бернулли в таком случае записывается в терминах функции тока в виде

$$\frac{1}{2}\,|\nabla\psi|^2 + \frac{1}{\rho(\psi)}\,p + gy = b(\psi).$$

3.2. Линейная теория поверхностных волн

Рассматривается безвихревое движение однородной жидкости в слое $\Omega(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < z < h(x, y, t)\}$, ограниченном свободной поверхностью $z = h(x, y, t)$ и ровным дном $z = 0$. Исходные уравнения для потенциала скоростей φ и функции h имеют вид

$$\begin{aligned}
&\Delta\varphi \equiv \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0, && \mathbf{x} \in \Omega(t),\\
&\varphi_z = 0, && z = 0,\\
&\left.\begin{aligned} &h_t + \varphi_x h_x + \varphi_y h_y - \varphi_z = 0,\\ &\varphi_t + \tfrac{1}{2}\left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2\right) + gh = 0, \end{aligned}\right\} && z = h(x, y, t).
\end{aligned}$$

Задача отыскания решения указанных уравнений с начальным условием при $t = 0$

$$h = h^{(0)}(x, y), \quad \varphi = \varphi^{(0)}(x, y, z) \quad \big(\Delta\varphi^{(0)} = 0,\ \mathbf{x} \in \Omega(0)\big)$$

называется задачей Коши – Пуассона.

Рассматриваемые уравнения имеют точное решение $h = h_0 = const$, $\varphi = \varphi_0 = u_0 x - \frac{1}{2}\,u_0^2\,t - gh_0\,t$, которое описывает равномерное движение слоя жидкости постоянной глубины h_0 с постоянной скоростью u_0 в направлении оси Ox. Малые возмущения данного состояния $\varphi = \varphi_0 + \Phi$, $h = h_0 + \zeta$ приближенно описываются линейной системой уравнений

$$\begin{aligned}
&\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0, && (0 < z < h_0),\\
&\Phi_z = 0, && z = 0,\\
&\left.\begin{aligned} &\zeta_t + u_0\,\zeta_x - \Phi_z = 0,\\ &\Phi_t + u_0\,\Phi_x + g\zeta = 0, \end{aligned}\right\} && z = h_0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим решения уравнения Лапласа, имеющие вид волновых пакетов, удовлетворяющих условию непротекания на дне:

$$\zeta = a\, e^{i(kx+ly-\omega t)}, \quad \Phi = b\, \operatorname{ch} mz\, e^{i(kx+ly-\omega t)}, \quad m = \sqrt{k^2 + l^2}.$$

Из граничных условий при $z = h_0$ следует, что такие решения с ненулевыми амплитудами a и b существуют, если и только если частота ω и волновой вектор $\mathbf{k} = (k, l)$ удовлетворяют дисперсионному соотношению

$$(\omega - u_0\, k)^2 = gm\, \operatorname{th} mh_0. \tag{42}$$

Для плоских волн имеем $l = 0$ и $m = |k|$, и в этом случае фазовая и групповая скорости даются формулами

$$c_p = \frac{\omega}{k} = u_0 \pm \sqrt{gh_0}\sqrt{\frac{\operatorname{th} kh_0}{kh_0}}, \qquad c_g = \frac{d\omega}{dk} = u_0 \pm \sqrt{gh_0}\, f(kh_0),$$

где обозначено

$$f(\xi) = \frac{d}{d\xi}\sqrt{\xi \operatorname{th} \xi} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{th} \xi}{\xi}} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \xi}\sqrt{\frac{\xi}{\operatorname{th} \xi}}\right).$$

Здесь выделяются следующие частные случаи:

(a) *Стационарные волны.* В этом случае фазовая скорость волны равна нулю: $c_p = 0$, и для *числа Фруда* $F = |u_0|/\sqrt{gh_0}$ получается соотношение $F = \sqrt{\operatorname{th} kh_0/(kh_0)}$. Величина $\sqrt{gh_0}$ называется *критической скоростью*, поэтому можно утверждать, что линейные стационарные волны возможны только для докритического течения со скоростью $|u_0| < \sqrt{gh_0}$.

(b) *Волны в глубокой жидкости.* В пределе бесконечной глубины $h_0 \to \infty$ фазовая и групповая скорости волн, распространяющихся по состоянию покоя ($u_0 = 0$), даются формулами $c_p = \sqrt{g/k}$ и $c_g = \frac{1}{2}\sqrt{g/k}$. Таким образом, групповая скорость волн на глубокой воде составляет половину фазовой скорости.

(c) *Длинные волны.* В этом предельном случае имеем $k \to 0$, и тогда $c_p = u_0 \pm \sqrt{gh_0} = c_g$. Совпадение фазовой и групповой скорости для длинных волн указывает на то, что эти волны являются гиперболическими.

Задача. Найти траектории частиц в бегущей плоской волне с потенциалом скоростей $\Phi = ga\omega^{-1}\, e^{ky} \sin(kx - \omega t)$, где ω и k связаны дисперсионным соотношением $\omega^2 = gk$ линейной теории волн в глубокой жидкости (параметр $\alpha = ak$ предполагается малым).

Решение. *Указанный потенциал $\Phi(x, y, t)$ является гармонической функцией по переменным x, y в области $y < 0$, удовлетворяет условию затухания $\nabla\Phi \to 0$ при $y \to -\infty$, а также граничным условиям $\zeta_t = \Phi_y$, $\Phi_t + g\zeta = 0$ при $y = 0$, где функция ζ, задающая профиль свободной поверхности $y = \zeta(x, t)$, имеет вид вещественного волнового пакета $\zeta(x, t) = a\cos(kx - \omega t)$. Траектории частиц с полем скоростей $\mathbf{u} = \nabla\Phi$ описываются дифференциальными уравнениями*

$$\frac{dx}{dt} = g\alpha\omega^{-1}\, e^{ky} \cos(kx - \omega t), \quad \frac{dy}{dt} = g\alpha\omega^{-1}\, e^{ky} \sin(kx - \omega t) \tag{43}$$

и начальными данными $(x(0), y(0)) = (\xi, \eta)$. Малость параметра $\alpha = ak = 2\pi a/L$ означает малость отношения амплитуды волны a к ее длине L. Используя это свойство, будем искать решение $\mathbf{x} = (x, y)$ в виде $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \alpha\,\mathbf{x}_1(t) + O(\alpha^2)$. Подставляя указанное разложение в уравнения (43) и собирая слагаемые при одинаковых степенях α, получаем уравнения для коэффициентов $\mathbf{x}_0(t)$ и $\mathbf{x}_1(t)$:

$$\frac{dx_0}{dt} = 0, \qquad \frac{dy_0}{dt} = 0, \qquad (x_0, y_0)_{|t=0} = (\xi, \eta),$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\omega}{k}\, e^{ky_0} \cos(kx_0 - \omega t), \quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{\omega}{k}\, e^{ky_0} \sin(kx_0 - \omega t), \qquad (x_1, y_1)_{|t=0} = (0, 0).$$

Отсюда находим $(x_0(t), y_0(t)) = (\xi, \eta)$ и, как следствие,

$$x_1(t) = \frac{1}{k}\, e^{k\eta}\big(\sin k\xi - \sin(k\xi - \omega t)\big) \qquad y_1(t) = \frac{1}{k}\, e^{k\eta}\big(\cos(k\xi - \omega t) - \cos k\xi\big).$$

Таким образом, функции $\mathbf{x}_0(t)$ и $\mathbf{x}_1(t)$ являются периодическими с периодом $T = 2\pi/\omega$, совпадающим с временным периодом прогрессивной гармонической волны. За полный период T частица с координатами $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \alpha\,\mathbf{x}_1(t)$, взятыми с точностью до слагаемых порядка $O(\alpha^2)$, пробегает окружность $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c| = r$ радиуса $r = a\, e^{k\eta}$ с центром в точке $\mathbf{x}_c = (\xi + ae^{k\eta} \sin k\xi,\ \eta - ae^{k\eta} \cos k\xi)$. Отсюда ясно, что амплитуда колебаний частиц в волне максимальна на поверхности жидкости и экспоненциально затухает с ростом глубины погружения.

Ответ:
$$x(t) = \xi + a\, e^{k\eta}\big(\sin k\xi - \sin(k\xi - \omega t)\big) + O(a^2k^2),$$
$$y(t) = \eta - a\, e^{k\eta}\big(\cos k\xi - \cos(k\xi - \omega t)\big) + O(a^2k^2).$$

3.3. Уравнения длинных волн

В теории нелинейных длинных волн предполагается, что характерная длина волны L много больше глубины жидкости h_0. С этими масштабами вводятся безразмерные переменные $\mathbf{x}', t', \varphi', h'$:

$$(x, y) = L\,(x', y'), \quad (z, h) = h_0\,(z', h'), \quad t = \frac{L}{\sqrt{gh_0}}\,t', \quad \varphi = L\sqrt{gh_0}\,\varphi'.$$

Тогда с малым параметром $\varepsilon = h_0/L$ исходные уравнения принимают форму

$$\varepsilon^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + \varphi_{zz} = 0 \quad (0 < z < h), \qquad \varphi_z = 0 \quad (z = 0),$$

$$h_t + \varphi_x h_x + \varphi_y h_y = \varepsilon^{-2}\varphi_z, \qquad \varphi_t + \frac{1}{2}\,\left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varepsilon^{-2}\,\varphi_z^2\right) + h = 0 \quad (z = h)$$

(штрихи в обозначениях безразмерных величин здесь опущены). Метод Лагранжа в теории длинных волн использует представление потенциала φ через его значения $\varphi|_{z=0} = A(x, y, t)$ в виде степенного ряда

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\,\Delta_2^n\,A(x, y, t),$$

где $\triangle_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ — оператор Лапласа по горизонтальным переменным x, y. В силу указанного представления граничные условия на свободной поверхности $z = h(x, y, t)$ дают в приближении низшего порядка по ε дифференциальные уравнения *мелкой воды* для функций h и $\mathbf{u} = \nabla A$

$$h_t + div(h\mathbf{u}) = 0, \qquad \mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + g\nabla h = 0, \tag{44}$$

где операции div и ∇ выполняются по переменным x, y. Давление p внутри слоя жидкости в силу интеграла Коши–Лагранжа имеет с точностью $O(\varepsilon^2)$ выражение $p(x, y, z, t) = \rho_0 g\big(h(x, y, t) - z\big)$, то есть зависит от глубины по закону гидростатики.

В теории мелкой воды имеет место газодинамическая аналогия: если ввести в качестве новых обозначений "плотность" $\rho = h$ и "давление" $\tilde{p} = \frac{1}{2}\,gh^2$, то уравнения (44) примут форму

$$\rho_t + div(\rho\mathbf{u}) = 0, \qquad \mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\,\nabla\tilde{p} = 0, \qquad \tilde{p} = \frac{1}{2}\,g\rho^2, \tag{45}$$

которая совпадает с уравнениями изэнтропического течения политропного газа с показателем политропы $\gamma = 2$.

Задача. В момент времени $t = 0$ внезапно разрушается плотина, сдерживающая водохранилище глубины h_0. Определить в приближении мелкой воды форму свободной поверхности $y = h(x,t)$ при $t > 0$, скорость u_0 движения водяного фронта по сухому руслу и расход воды q_0 в створе плотины.

Решение. *По своей постановке это задача Коши для одномерной системы уравнений мелкой воды*

$$h_t + (uh)_x = 0, \qquad u_t + uu_x + gh_x = 0$$

с разрывными начальными данными

$$h(x,0) = \begin{cases} h_0, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \qquad u(x,0) = 0.$$

Ее газодинамическим аналогом является задача об истечении первоначально покоившегося газа в вакуум. Непрерывное при $t > 0$ решение имеет вид простой центрированной волны, распространяющейся влево по покоящейся жидкости с характеристической скоростью $c_0 = \sqrt{gh_0}$, равной критической скорости для данного водоема. Уравнения этой простой волны имеют вид

$$u + 2\sqrt{gh} = 2c_0, \qquad u - \sqrt{gh} = \frac{x}{t}$$

(первое из указанных соотношений есть условие тождественного постоянства инварианта Римана, второе — уравнение центрированного семейства прямолинейных характеристик. Отсюда находим явную зависимость функций u и h от переменных x, t в области простой волны $-c_0 < x/t < 2c_0$:

$$u(x,t) = \frac{2}{3t}\,(x + c_0\,t), \qquad h(x,t) = \frac{1}{9gt^2}\,(x - 2c_0\,t)^2.$$

Таким образом, свободная поверхность имеет форму параболы с вершиной в точке $x = 2c_0\,t$, бегущей вправо со скоростью $u_0 = 2c_0 = 2\sqrt{gh_0}$. Глубина воды и ее скорость непосредственно в створе плотины остаются постоянными во все время движения: $h(0,t) = (4/9)\,h_0,\ u(0,t) = (1/3)\,c_0$. Отсюда находится расход $q_0 = (4/27)\,h_0c_0$ — количество воды, ежесекундно истекающей из водохранилища.

Ответ:

$$h(x,t) = \begin{cases} h_0, & x < -c_0\,t, \\ (x - 2c_0\,t)^2/(9gt^2), & -c_0\,t < x < 2c_0\,t, \\ 0, & x > 2c_0\,t, \end{cases}$$

$$u_0 = 2c_0, \qquad q_0 = (4/27)\, h_0 c_0 \qquad (c_0 = \sqrt{gh_0}).$$

Разрывные решения гиперболических уравнений мелкой воды описывают распространение волн типа бора, в которых глубина жидкости и ее скорость меняются скачком. Для описания таких движений используется дивергентная форма записи системы (44) в виде законов сохранения массы и полного по глубине горизонтального импульса жидкости. В случае одномерных движений эти законы сохранения имеют вид

$$\partial_t h + \partial_x (uh) = 0, \qquad \partial_t \bigl(uh\bigr) + \partial_x \left(u^2 h + \frac{1}{2}\, g h^2 \right) = 0. \tag{46}$$

Они дают соотношения на сильном разрыве

$$D[h] = [uh], \qquad D[uh] = [u^2 h + \frac{1}{2}\, g h^2],$$

где D — скорость бора.

3.4. Нелинейные дисперсионные уравнения

Приближения более высокого порядка по параметру ε позволяют учесть дисперсионные свойства нелинейных длинных волн на воде. Рассмотрим двумерное безвихревое движение в плоскости переменных x и y, для которого поле скоростей удобно представить с помощью функции тока: $\mathbf{u} = (\psi_y, \, -\psi_x)$. Функция тока вместе с потенциалом скоростей образуют пару сопряженных гармонических функций, связанных между собой уравнениями Коши—Римана $\varphi_x = \psi_y, \ \varphi_y = -\psi_x$. Запишем исходные уравнения движения жидкости, используя безразмерную функцию тока $\psi' = \psi/(h_0 \sqrt{gh_0})$ и опуская штрихи в обозначениях:

$$\varepsilon^2 \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0 \quad (0 < y < h), \qquad\qquad \psi = 0 \quad (y = 0),$$

$$h_t + (\psi_x + \psi_y\, h_x)_{|y=h} = 0,$$
$$(\psi_{yt} - \varepsilon^2\, h_x\, \psi_{xt})_{|y=h} + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial x}\bigl\{\varepsilon^2 \psi_x^2(x,h,t) + \psi_y^2(x,h,t)\bigr\} + h_x = 0.$$

Последнее из указанных уравнений есть записанный в терминах функции тока результат дифференцирования по x интеграла Коши—Лагранжа в точках свободной поверхности (с учетом условия постоянства давления $p(x, h(x,t), t) = const$). Далее вводится средняя по глубине горизонтальная скорость жидкости

$$u(x,t) = \frac{1}{h(x,t)} \int\limits_0^{h(x,t)} \varphi_x(x,y,t)\,dy,$$

с которой для функции тока ψ выполнено соотношение $\psi|_{y=h} = uh$. Приближенное представление функции ψ внутри области $\Omega(t)$ через функции u и h, аналогичное ряду Лагранжа для потенциала φ, имеет вид

$$\psi = uy + \frac{1}{6}\,\varepsilon^2\,(h^2y - y^3)\,u_{xx} + O(\varepsilon^4).$$

Подставляя это разложение в граничные условия при $y = h(x,t)$ и оставляя величины до порядка ε^2 включительно, получаем систему уравнений второго приближения теории длинных волн (*уравнения Су–Гарднера*)

$$h_t + (uh)_x = 0, \quad u_t + uu_x + h_x = \frac{1}{3h}\,\varepsilon^2\big(h^3(u_{xt} + uu_{xx} - u_x^2)\big)_x. \tag{47}$$

При $\varepsilon = 0$ данная система, записанная в размерных переменных, совпадает с уравнениями мелкой воды. Слагаемые с производными третьего порядка в правой части дают дисперсионную поправку к ним. Действительно, в случае малых возмущений равномерного потока $h = h_0 + \zeta,\ u = u_0 + v$ линеаризованные уравнения (47) имеют вид

$$\zeta_t + u_0\zeta_x + h_0v_x = 0, \qquad v_t + u_0v_x + g\zeta_x = \frac{1}{3}\,h_0^2\big(v_t + u_0v_x\big)_{xx}.$$

Отсюда для элементарных волновых пакетов $\zeta(x,t) = a\exp\{i(kx - \omega t)\}$, $v(x,t) = b\exp\{i(kx - \omega t)\}$ получается дисперсионное соотношение

$$(\omega - u_0k)^2 = \frac{gh_0k^2}{1 + \frac{1}{3}\,h_0^2k^2}.$$

Сравнение с точным дисперсионным соотношением (42) показывает, что линеаризация уравнений (47) равносильна использованию дробно-рационального приближения для функции $\xi\,\mathrm{th}\,\xi$ в пределе $\xi = h_0k \to 0$ длинных волн или малой глубины.

Дисперсионным слагаемым в системе (47) можно придать другую форму, используя для этого оператор полного дифференцирования $d_t = \partial_t + u\partial_x$ с введенной выше средней скоростью u. Следствием первого из уравнений (47) является соотношение $d_t^2 h \equiv (\partial_t + u\partial_x)^2 h = -h(u_{xt} + uu_{xx} - u_x^2)$, с учетом которого в размерных переменных получаются *уравнения Грина–Нагди*

$$h_t + (uh)_x = 0, \qquad u_t + uu_x + gh_x + \frac{1}{3h}\,(h^2 d_t^2 h)_x = 0. \tag{48}$$

Данную приближенную модель, как и обычные уравнения мелкой воды, также можно представить в виде системы уравнений газовой динамики (45), но с более сложным уравнением состояния

$$\tilde{p} = \frac{1}{2}\,g\rho^2 + \frac{1}{3}\,\rho^2 d_t^2 \rho.$$

Многомерный аналог уравнений Грина — Нагди имеет вид

$$h_t + div\,(h\mathbf{u}) = 0, \quad d_t\mathbf{u} + g\nabla h + \frac{1}{3h}\,\nabla\big(h^2 d_t^2 h\big) = 0, \quad d_t = \partial_t + \mathbf{u}\cdot\nabla, \tag{49}$$

где операторы div и ∇ берутся по горизонтальным переменным $\mathbf{x} = (x, y)$, а вектор $\mathbf{u}$ имеет, как и в одномерном случае, смысл средней по глубине горизонтальной скорости жидкости:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{h(\mathbf{x}, t)} \int\limits_0^{h(\mathbf{x},t)} \nabla_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x}, z, t)\,dz.$$

Векторная структура системы уравнений Грина — Нагди (49) очень похожа на структуру основных уравнений гидродинамики, поэтому для данной системы справедливы аналоги соответствующих законов сохранения и первых интегралов движения. В частности, закон сохранения полного импульса имеет вид

$$(h\mathbf{u})_t + div\,\big(h\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + \tilde{p}I\big) = 0, \qquad \tilde{p} = \frac{1}{2}\,gh^2 + \frac{1}{3}\,d_t^2 h. \tag{50}$$

Пример. С практической точки зрения запись уравнения импульса в виде (50) не совсем удобна, так как поток импульса содержит производные второго порядка по времени от функции h. Поэтому введем вместо вектора скорости $\mathbf{u}$ новую искомую вектор-функцию

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \frac{1}{3h}\,\nabla\big(h^2 d_t h\big)$$

и перепишем уравнение локального импульса (второе из уравнений исходной системы (49)) в следующем виде:

$$d_t\mathbf{v} + \frac{1}{3h^2}\, d_t h\,\nabla\bigl(h^2 d_t h\bigr) - \frac{1}{3h}\, d_t\Bigl(\nabla\bigl(h^2 d_t h\bigr)\Bigr) + g\nabla h + \frac{1}{3h}\,\nabla\bigl(h^2 d_t^2 h\bigr) = 0.$$

Воспользуемся здесь тождеством $d_t(\nabla f) = \nabla(d_t f) - \bigl(\mathbf{u}'_{\mathbf{x}}\bigr)^T \nabla f$, справедливым для любой гладкой функции $f(\mathbf{x}, t) \in C^2$. Тогда после небольших преобразований получаем

$$d_t\mathbf{v} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \bigl(\mathbf{v} - \mathbf{u}\bigr) + g\nabla h - \frac{1}{2}\,\nabla\,(d_t h)^2 = 0.$$

Последнее соотношение можно представить также в виде

$$\mathbf{v}_t + rot\,\mathbf{v}\times\mathbf{u} + \nabla\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - \frac{1}{2}\,|\mathbf{u}|^2 + gh - \frac{1}{2}\,(d_t h)^2\right) = 0, \tag{51}$$

где подразумевается, что операция rot и векторное произведение применяются к трехмерным векторам $(\mathbf{v}, 0)$ и $(\mathbf{u}, 0)$. Соотношение (51) является аналогом формы Громеки — Лэмба для уравнения импульса в системе уравнений Эйлера (39) или в исходной системе (38). Следствием (51) является уравнение Гельмгольца для вектора *обобщенной завихренности* $\mathbf{\Omega} = rot\,\mathbf{v}$, имеющее вид

$$\mathbf{\Omega}_t + rot\bigl(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u}\bigr) = 0.$$

Отсюда, в частности, вытекает сохранение *обобщенной циркуляции*

$$\Gamma = \oint\limits_{C(t)} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{x}$$

вдоль любого контура $C(t)$ в горизонтальной плоскости $\mathbf{x} = (x, y)$, который состоит из одних и тех же частиц, перемещающихся под действием поля скоростей $\mathbf{u}$. Другим следствием соотношения (51) является выполнение аналога интеграла Коши — Лагранжа

$$\varphi_t + \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - \frac{1}{2}\,|\mathbf{u}|^2 + gh - \frac{1}{2}\,(d_t h)^2 = b(t)$$

в случае *обобщенных потенциальных* течений, когда $\mathbf{v} = \nabla\varphi$.

Более простые по сравнению с (47) и (48) нелинейные дисперсионные уравнения получаются для класса движений, описываемого в безразмерных переменных функциями $h = 1+\varepsilon^2\zeta, \quad u = \varepsilon^2 v$. Такое моделирование означает, что рассматриваются слабонелинейные диспергирующие волны малой амплитуды на мелкой воде. В этом случае система (47) порождает приближенные уравнения

$$h_t + (uh)_x = 0, \quad u_t + uu_x + gh_x - \frac{1}{3}\,u_{xxt} = 0, \tag{52}$$

а система Грина–Нагди — уравнения

$$h_t + (uh)_x = 0, \quad u_t + uu_x + gh_x + \frac{1}{3}\, h_{xtt} = 0, \tag{53}$$

Обе системы (52) и (53) называются *уравнениями Буссинеска.*

Приближенное описание длинных волн, бегущих только в одну сторону — влево или вправо — получается в независимых переменных $\tau = \varepsilon^2 t$, $\xi = x - c_0 t$, где $c_0^2 = gh_0$. Указанное растяжение переменной t означает, что долговременная эволюция волны наблюдается в медленном временном масштабе. В этом случае система (47) с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^4)$ сводится к *уравнению Кортевега – де Фриза*

$$\zeta_\tau + \frac{3}{2}\,\zeta\zeta_\xi + \frac{1}{6}\,c_0 h_0^2\,\zeta_{\xi\xi\xi} = 0.$$

3.5. Стационарные волны

В системе отсчета, связанной с бегущей волной, движение описывается стационарным решением, в котором искомые функции не зависят от t. Задача описания двумерных стационарных поверхностных волн формулируется следующим образом. Требуется найти функцию тока $\psi(x, y)$ и функцию $h(x) > 0$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} &\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0 \quad (0 < y < h(x)), \\ &\psi(x, 0) = 0, \qquad \psi(x, h(x)) = Q, \\ &\psi_x^2 + \psi_y^2 + 2gh = 2b \quad (y = h(x)), \end{aligned} \tag{54}$$

где b — константа Бернулли, Q — расход, постоянный в каждом вертикальном сечении слоя жидкости.

Для системы (47) в этом случае первое уравнение дает интеграл расхода $uh = Q = const$. Исключая с его помощью скорость u из второго уравнения, после двукратного интегрирования получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для функции h:

$$\frac{1}{3}\,Q^2 \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = -gh^3 + bh^2 - 2ch + Q^2 \tag{55}$$

(уравнение Буссинеска — Рэлея). Здесь b и c — константы интегрирования, которые связаны с корнями h_i $(i = 1, 2, 3)$ кубического полинома в правой части формулами Виета

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{2b}{g}, \qquad h_1 h_2 h_3 = \frac{Q^2}{g}.$$

Нетривиальные волновые картины получаются тогда, когда все корни вещественны и функция h принимает значения в промежутке $h_1 \leqslant h_2 < h < h_3$. В неявном виде форма свободной поверхности определяется квадратурой

$$x = \frac{Q}{3g} \int\limits_{h}^{h_3} \frac{ds}{\sqrt{(s-h_1)(s-h_2)(h_3-s)}}.$$

В общем случае этот интеграл не выражается в элементарных функциях. Так, для простых корней $h_1 < h_2 < h_3$ подстановка

$$s = h_2 + (h_3 - h_2)\cos^2\alpha, \qquad h = h_2 + (h_3 - h_2)\cos^2\beta$$

и замена параметров

$$r = \frac{3g(h_3 - h_1)}{2Q}, \qquad \varkappa^2 = \frac{h_3 - h_2}{h_3 - h_1}$$

приводят указанную функциональную зависимость к стандартной форме, использующий эллиптический интеграл:

$$rx = \int\limits_0^{\beta} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\alpha}},$$

Задаваемая этим соотношением специальная функция $\beta = am(rx;\, \varkappa)$ называется амплитудой Якоби, а ее суперпозиции с тригонометрическими функциями дают эллиптический синус и косинус соответственно: $sn(\xi;\, \varkappa) = \sin am(\xi;\, \varkappa)$ и $cn(\xi;\, \kappa) = \cos am(\xi;\, \varkappa)$. Таким образом, форма свободной поверхности в стационарной волне имеет вид

$$h(x) = h_2 + (h_3 - h_2)\, cn^2(rx;\, \varkappa).$$

Ввиду присутствия здесь функции "cn" такую волну называют *кноидальной волной.* Эта нелинейная волна имеет амплитуду $a = (h_3 - h_2)/2$ и является периодической с периодом

$$L = \frac{2Q}{3g} \int\limits_{h_2}^{h_3} \frac{ds}{\sqrt{(s-h_1)(s-h_2)(h_3-s)}}.$$

В пределе волн малой амплитуды $a \to 0$ получаем значение $\varkappa = 0$, так что амплитуда Якоби становится линейной функцией $\beta = rx$, и кноидальная волна принимает форму элементарного волнового пакета $h(x) = h_0 + a\cos kx$ с волновым числом $k = 2r$ и средней глубиной жидкости $h_0 = (h_2 + h_3)/2$. Если ввести фазовую скорость волны u_0 с помощью равенства $u_0^2 + 2gh_0 = 2b$ (это вполне оправдано, поскольку параметр b имеет смысл константы Бернулли), то тогда с числом Фруда $F = u_0/\sqrt{gh_0}$ получается дисперсионное соотношение

$$F^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}h_0^2k^2}.$$

Следовательно, в линейном пределе стационарная волна оказывается докритической, что хорошо согласуется с выводами п. 3.2.

В другом предельном случае, когда корень $h_2 \to h_1$ становится двукратным, при $\varkappa \to 1$ эллиптический косинус также превращается в элементарную функцию: $cn(\xi;\, \varkappa) \to 1/\operatorname{ch}\xi$. В этом пределе период L кноидальной волны неограниченно возрастает, и она трансформируется в *уединенную волну* с амплитудой $a = h_3 - h_2$ и профилем свободной поверхности

$$h(x) = h_0 + \frac{a}{\operatorname{ch}^2 rx}.$$

Величина $h_0 = h_2$ дает асимптотику глубины слоя жидкости при $|x| \to \infty$, поэтому здесь число Фруда $F = u_0/\sqrt{gh_0}$ естественно определить по скорости жидкости u_0 на бесконечности (т.е. из условия $u_0^2 + 2gh_2 = 2b$). Отсюда получается формула Буссинеска для уединенной волны

$$F^2 = 1 + \frac{a}{h_0},$$

согласно которой эта нелинейная волна является сверхкритической.

3.6. Волны в двухслойной жидкости

Рассматривается плоское безвихревое движение идеальной жидкости, состоящей из двух слоев $\Omega_j(t)$ $(j = 1, 2)$ с плотностями $\rho_1 \neq \rho_2$, разделенных поверхностью $y = h(x, t)$. Предполагается, что снизу вся жидкость ограничена ровным дном $y = 0$, а сверху — непроницаемой крышкой $y = H$. Потенциалы скоростей φ_j и функция h удовлетворяют следующим уравнениям.

$$\varphi_{jxx} + \varphi_{jyy} = 0, \qquad \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega_j(t) \quad (j = 1, 2),$$

$$\varphi_{1y} = 0 \quad (y = 0), \qquad \varphi_{2y} = 0 \quad (y = H),$$

$$\left.\begin{aligned} &h_t + \varphi_{jx} h_x - \varphi_{jy} = 0, \qquad (j = 1, 2) \\ &\rho_1 \left(\varphi_{1t} + \tfrac{1}{2}\, \varphi_{1x}^2 + \tfrac{1}{2}\, \varphi_{1y}^2 + gh\right) = \\ &\qquad = \rho_2 \left(\varphi_{2t} + \tfrac{1}{2}\, \varphi_{2x}^2 + \tfrac{1}{2}\, \varphi_{2y}^2 + gh\right), \end{aligned}\right\} \quad y = h(x, t).$$

Напомним, что в указанной системе уравнений кинематическое условие допускает наличие ненулевого скачка касательной скорости жидкости на границе раздела слоев, а динамическое условие требует непрерывности давления.

Линейная теория рассматривает малые возмущения кусочно-постоянного горизонтального течения с прямолинейной границей $h(x, t) = h_1 = const$ и постоянными скоростями u_j в слоях (т.е. с потенциалами $\varphi_{0j}(x, y, t) = u_j x - (gh_1 + \frac{1}{2}\, u_j^2)t$). Отыскание решений линеаризованных уравнений в виде волновых пакетов

$$h = h_1 + a e^{i(kx-\omega t)}, \quad \varphi_1 = \varphi_{01} + A\, \operatorname{ch} ky e^{i(kx-\omega t)}, \quad \varphi_2 = \varphi_{02} + B\, \operatorname{ch} k(H-y) e^{i(kx-\omega t)}$$

с постоянными амплитудами a, A, B приводит к дисперсионному соотношению

$$\rho_1 (\omega - u_1 k)^2 \operatorname{cth} kh_1 + \rho_2 (\omega - u_2 k)^2 \operatorname{cth} k(H - h_1) = (\rho_1 - \rho_2) gk \qquad (56)$$

— квадратному уравнению относительно частоты ω. При наличии пары комплексно-сопряженных корней у этого уравнения основное течение оказывается неустойчивым. Так, частота ω является комплексной для всех волновых чисел k в случае $\rho_1 < \rho_2$, когда более тяжелая жидкость находится в верхнем слое. Этот тип неустойчивости границы раздела слоев называется *неустойчивостью Рэлея — Тейлора.* Если же $\rho_1 > \rho_2$, необходимым и достаточным условием вещественности корней служит неравенство

$$(u_2 - u_1)^2 \leqslant \frac{\mu}{\lambda}\Big(\operatorname{th} k(H-h_1) + \lambda \operatorname{th} kh_1\Big)\frac{g}{k}, \tag{57}$$

где обозначено $\lambda = \rho_2/\rho_1,\ \mu = 1-\lambda$. Если $u_2 \neq u_1$ (относительная скорость движения слоев отлична от нуля), то при достаточно больших $|k|$ данное неравенство нарушается. Следовательно, при наличии проскальзывания слоев имеет место коротковолновая неустойчивость, которая называется *неустойчивостью Кельвина — Гельмгольца.*

Приближение мелкой воды для двухслойной жидкости получается с помощью представления потенциалов $\varphi_j(x,y,t)$ в виде рядов Лагранжа

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\varepsilon^{2n}\frac{y^{2n}}{(2n)!}\,\partial_x^{2n}A(x,t), \quad \varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\varepsilon^{2n}\frac{(H-y)^{2n}}{(2n)!}\,\partial_x^{2n}B(x,t),$$

где $A(x,t) = \varphi_1|_{y=0},\ B(x,t) = \varphi_2|_{y=H}$. Уравнения двухслойной мелкой воды для функций h, $u = A_x$, $v = B_x$ имеют вид

$$h_t + (uh)_x = 0, \quad h_t - (v(H-h))_x = 0, \quad u_t + uu_x + \mu g h_x = \lambda(v_t + vv_x).$$

Нелинейные стационарные волны в двухслойной жидкости под крышкой описываются в точной постановке следующими уравнениями для функций тока $\psi_j(x,y)$ $(j=1,2)$ и функции $h(x)$ $(0 < h(x) < H)$:

$$\begin{gathered}\psi_{1xx} + \psi_{1yy} = 0 \quad (0 < y < h(x)), \qquad \psi_{2xx} + \psi_{2yy} = 0 \quad (h(x) < y < H),\\ \psi_1(x,0) = 0, \quad \psi_1(x,h(x)) = \psi_2(x,h(x)) = Q_1, \quad \psi_2(x,H) = Q_1 + Q_2,\\ \rho_1(\psi_{1x}^2 + \psi_{1y}^2 + 2gh - 2b_1) = \rho_2(\psi_{2x}^2 + \psi_{2y}^2 + 2gh - 2b_2) \quad (y = h(x)),\end{gathered} \tag{58}$$

где Q_j — объемный расход жидкости, b_j — постоянная Бернулли в j-м слое. В отсутствие волн течение с прямолинейной границей раздела и постоянными скоростями в слоях дается решением $h(x) = h_1 = const$ $(0 < h_1 < H)$,

$\psi_1(x,y) = u_1 y,\ \ \psi_2(x,y) = u_2 y + u_1 h_1$. Данное решение получается при следующих значениях расходов и констант Бернулли:

$$Q_1 = h_1 u_1, \quad Q_2 = h_2 u_2, \quad b_1 = u_1^2 + 2gh_1, \quad b_2 = u_2^2 + 2gh_1, \tag{59}$$

где $h_2 = H - h_1$ — глубина невозмущенного верхнего слоя жидкости. Указанные значения постоянных Q_j, b_j должны фигурировать в уравнениях (58) и при отыскании решений типа уединенных волн с асимптотикой $h(x) \to h_1$, $\nabla\psi_j \to (0, u_j)$ $(j = 1, 2)$ при $|x| \to +\infty$.

Второе приближение теории мелкой воды дает для функции $h(x)$ нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{3}\Big(\rho_1 Q_1^2 (H - h) + \rho_2 Q_2^2 h\Big)\ \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = P(h), \tag{60}$$

$$P(h) = h(h - H)\Big((\rho_1 - \rho_2) g h^2 - 2(\rho_1 b_1 - \rho_2 b_2) h + c\Big) + \rho_1 Q_1^2 (H - h) + \rho_2 Q_2^2 h,$$

где c — постоянная интегрирования. Для уединенных волн условие $h(x) \to 0$, $h'(x) \to 0$ при $|x| \to +\infty$ с необходимостью дает

$$c = \rho_1 u_1^2 h_1 + \rho_2 u_2^2 h_2 - g(\rho_1 - \rho_2) h_1^2 + 2(\rho_1 b_1 - \rho_2 b_2) h_1.$$

Уравнение (60), полученное Л.В.Овсянниковым для приближенного описания стационарных волн в двухслойной жидкости, является аналогом уравнения Буссинеска — Рэлея (55) в теории поверхностных волн. В зависимости от кратности и расположения вещественных корней $h \in (0, H)$ полинома четвертой степени $P(h)$, присутствующего в правой части уравнения (60), получаются уединенные волны в виде возвышения или впадины на границе раздела слоев, а также волны типа плавного бора.

Пример. Запишем уравнение (60) в безразмерных переменных, полагая в нем $h(x) = h_1(1 + \eta(\bar{x}))$, $x = h_1 \bar{x}$ и вводя безразмерные параметры — отношение невозмущенных глубин слоев $r = h_2/h_1$ и *денсиметрические (плотностные)* числа Фруда

$$F_1^2 = \frac{\rho_1 u_{01}^2}{g(\rho_1 - \rho_2) h_1}, \quad F_2^2 = \frac{\rho_2 u_{02}^2}{g(\rho_1 - \rho_2) h_2}.$$

Тогда согласно (60) для функции η, дающей отклонение границы раздела слоев от положения равновесия, получается уравнение

$$\left(\frac{d\eta}{d\bar{x}}\right)^2 = \frac{3\eta^2\left[\eta^2 + \left(F_2^2 - rF_1^2 - 1 + r\right)\eta + r\left(F_1^2 + F_2^2 - 1\right)\right]}{r^3F_1^2\,(1-\eta) + F_2^2\,(r+\eta)} \tag{61}$$

Области допустимых значений $0 < h(x) < H$ здесь соответствует интервал $-1 < \eta < r$. Поскольку для таких η знаменатель дроби в правой части (61) положителен, положительным должен быть и числитель. А это возможно тогда и только тогда, когда параметры F_1 и F_2 удовлетворяют неравенству

$$F_1^2 + F_2^2 > 1. \tag{62}$$

Данное ограничение для пары параметров (F_1, F_2) имеет вполне определенный смысл с точки зрения дисперсионных свойств рассматриваемых нелинейных волн. А именно, заметим, что дисперсионное соотношение (56) в случае стационарных волн (т.е. волновых пакетов с заданной частотой $\omega = 0$ и искомым безразмерным волновым числом $\xi = kh_0$) имеет в безразмерных переменных следующий вид: $F_1^2\,\xi\,\mathrm{cth}\,\xi + F_2^2\,r\xi\,\mathrm{cth}\,r\xi = 1$. Поскольку четная функция $f(\xi) = \xi\,\mathrm{cth}\,\xi$ строго монотонно возрастает при $\xi \geqslant 0$, вещественные корни $\xi \in \mathbb{R}$ возможны только при $F_1^2 + F_2^2 \leqslant 1$. Таким образом, линейные стационарные волны в двухслойной жидкости, имеющие вид синусоидальных волновых пакетов, существуют только в *докритической* области $F_1^2 + F_2^2 \leqslant 1$. А уравнение (61) описывает нелинейные волны, существующие в *сверхкритической* области (62).

3.7. Внутренние волны в стратифицированной жидкости

Для состояния покоя $\mathbf{u} = 0$ в системе (38) остается уравнение $\nabla p = \rho\mathbf{g}$, откуда следует $p = p_0(z)$, $\rho = \rho_0(z)$, где функции p_0 и ρ_0 связаны законом гидростатики $dp_0/dz = -g\rho_0(z)$. Следовательно, покоящаяся неоднородная жидкость под действием силы тяжести расслаивается плоскостями $z = const$ на горизонтальные слои (страты), в каждом из которых плотность постоянна. Такое расслоение называется *стратификацией*, а сама расслоенная жидкость — *стратифицированной жидкостью.* Стратификация имеет место и в горизонтальном *сдвиговом* течении, которое описывается точным решением

$$u = u_0(z), \quad v = v_0(z), \quad w = 0, \quad \rho = \rho_0(z) \quad p = p_0(z),$$

с произвольными гладкими функциями u_0, v_0, ρ_0 и давлением p_0, связанным с ρ_0 уравнением гидростатики.

В общем случае согласно второму из уравнений системы (38) плотность ρ сохраняет свое значение вдоль траекторий частиц жидкости — интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Поэтому каждая поверхность уровня плотности $\rho(\mathbf{x}, t) = const$ в процессе движения все время состоит из одних и тех же частиц жидкости, сохраняясь как материальный объект. Распространение возмущений вдоль таких поверхностей в толще жидкости называют внутренними волнами.

Для описания волнового движения в слое жидкости конечной глубины $0 < z < h(x, y, t)$, ограниченного ровным дном $z = 0$ и свободной поверхностью $z = h(x, y, t)$, задаются граничные условия:

$$w = 0 \quad (z = 0); \qquad h_t + uh_x + vh_y = w, \quad p = p_0 = const \quad (z = h).$$

Часто, чтобы исключить из рассмотрения поверхностные волны, в качестве верхней границы слоя рассматривают жесткую непроницаемую крышку $z = h_0$, на которой выполнено условие непротекания $w = 0$.

Малые возмущения

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p'$$

сдвигового течения с вектором скорости $\mathbf{u}_0 = (u_0(z), v_0(z), 0)$ описываются линеаризованной системой уравнений

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0, \qquad D_0\rho' + \rho_{0z}w' = 0,$$

$$D_0u' + \frac{1}{\rho_0}\,p'_x + u_{0z}w' = 0, \quad D_0v' + \frac{1}{\rho_0}\,p'_y + v_{0z}w' = 0,$$

$$D_0w' + \frac{1}{\rho_0}\,p'_z + \frac{g}{\rho_0}\rho' = 0,$$

где обозначено $D_0 = \partial_t + u_0\partial_x + v_0\partial_y$. Данная система последовательным исключением искомых функций сводится к одному уравнению для вертикальной скорости жидкости w'

$$\rho_0\big(N^2 + D_0^2\big)\Delta_2 w' + D_0^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial w'}{\partial z}\right) -$$

$$-D_0\left((\rho_0 u_{0z})_z \frac{\partial w'}{\partial x} + (\rho_0 v_{0z})_z \frac{\partial w'}{\partial y}\right) = 0, \qquad (63)$$

где $\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$. Входящая сюда величина $N = N(z)$ определяется формулой

$$N^2 = -\frac{g\rho_{0z}}{\rho_0},$$

она имеет размерность частоты и называется *частотой Брента–Вяйсяля* (также — частотой плавучести). Для описания внутренних волн в жидкости со слабой стратификацией часто используется приближение Буссинеска (не следует путать его с моделями Буссинеска в теории мелкой воды!), согласно которому коэффициенты ρ_0 и N в уравнении (63) считаются постоянными: $\rho_0(z) \approx \rho_{00} = const > 0$, $N(z) \approx N_0 = const \neq 0$. В отсутствие сдвига скорости это дает уравнение

$$\Delta w_{tt} + N_0^2 \Delta_2 w = 0,$$

где $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$.

Пример. Рассматривается процесс генерации внутренних волн в слабостратифицированной жидкости, заполняющей все пространство $\mathbb{R}^3$. Предполагается, что точечный источник возмущений сосредоточен в начале координат $\mathbf{x} = 0$ и колеблется с малой амплитудой и заданной частотой ω_0, возбуждая волновое поле в виде элементарных волновых пакетов $w = a\exp\{i(kx + ly + mz - \omega_0 t)\}$. Компоненты волнового вектора $\mathbf{k} = (k, l, m)$ связаны с частотой ω_0 дисперсионным соотношением

$$\omega_0^2 = N_0^2\,\frac{k^2 + l^2}{k^2 + l^2 + m^2}.$$

Отсюда сразу следует, что частота генерируемых волн не может превосходить частоты Брента–Вяйсяля: $\omega_0 \leqslant N_0$. Кроме того, известен также и угол β_0, под которым волновой вектор наклонен к горизонтальной плоскости Oxy: $\beta_0 = \arccos(\omega_0/N_0)$. Поскольку энергия волновых пакетов переносится от источника возмущений в направлении вектора групповой скорости $\mathbf{c}_g = \nabla\omega(\mathbf{k})$, представляет интерес выяснить взаимное расположение векторов $\mathbf{c}_g$ и $\mathbf{k}$. Дисперсионное соотношение дает зависимость $\omega = \omega(\mathbf{k})$, однородную нулевой степени относительно $\mathbf{k}$, поэтому в каждой точке пространства $\mathbb{R}^3$ вектор групповой скорости ортогонален волновому вектору: $\mathbf{k}\cdot\mathbf{c}_g(\mathbf{k}) = 0$. Отсюда следует, что все волновое движение, возбуждаемое точечным источником колебаний, сосредоточено в окрестности конуса, ось которого совпадает с осью Oz, а угол раствора конуса равен β_0.

Для слоя стратифицированной жидкости, имеющего конечную глубину h_0 и неограниченного в горизонтальном направлении, внутренние волны описывается элементарными волновыми пакетами

$$w(x, y, z, t) = W(z)\, e^{i(kx+ly-\omega t)}.$$

Введем обозначения

$$\tau(z) = ku_0(z) + lv_0(z) - \omega, \qquad m^2 = k^2 + l^2.$$

Тогда для амплитудной функции W в силу (63) получается дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dz}\left(\rho_0\tau^2\frac{d}{dz}\frac{W}{\tau}\right) = \rho_0\, m^2\big(\tau^2 - N^2\big)\,\frac{W}{\tau} \quad (0 < z < h_0).$$

Граничные условия для жидкости под крышкой имеют вид

$$W(0) = W(h_0) = 0,$$

а при наличии свободной поверхности они таковы:

$$W = 0 \quad (z = 0), \qquad \tau^2\frac{d}{dz}\frac{W}{\tau} = gm^2\frac{W}{\tau} \quad (z = h_0)$$

В этих уравнениях при заданном волновом векторе $\mathbf{k} = (k, l)$ наряду с функцией W искомым является и параметр ω, входящий в коэффициент τ и условие на свободной поверхности. Те значения ω, при которых имеются ненулевые решения W, образуют *спектр*. Если спектр таков, что всегда $Re\,\omega \leqslant 0$, то исходное основное течение с вектором скорости $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0, 0)$ устойчиво. В противном случае имеет место неустойчивость сдвигового течения. Для внутренних волн, распространяющихся в покоящейся жидкости $(u_0 = v_0 = 0)$ под крышкой, спектральная задача принимает вид

$$(\rho_0 W_z)_z = \rho_0 m^2\left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right)W \quad (0 < z < h_0), \qquad W(0) = W(h_0) = 0. \quad (64)$$

Если верхняя граница слоя жидкости свободна, граничные условия имеют вид

$$W(0) = 0, \quad W'(h_0) = g\frac{m^2}{\omega^2}W(h_0).$$

Заметим, что при комплексных ω^2 также комплексной будет и собственная функция W. Домножение на комплексно-сопряженную величину $\overline{W}$ и интегрирование по интервалу $(0, h_0)$ дает с учетом граничных условий следующее соотношение:

$$\omega^2 \int\limits_0^{h_0} \rho_0 \left(|W_z|^2 + m^2|W|^2\right) \, dz = g\rho_0(h_0)|W(h_0)|^2 + \int\limits_0^{h_0} \rho_0 N^2 |W|^2 \, dz.$$

Если стратификация такова, что плотность $\rho_0(z)$ не убывает при уменьшении z, мы имеем $N^2(z) \geqslant 0$ всюду при $z \in (0, h_0)$. В этом случае всегда $\omega^2 > 0$, и спектр вещественный. Более детальная информация о свойствах спектра дается следующими утверждениями.

(a) существует счетное семейство волновых мод $\omega_n^2(m)$ $(n = 1, 2, ...)$, причем

$$\omega_1^2(m) > \omega_2^2(m) > ... > \omega_n^2(m) > ...; \quad \omega_n^2(m) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

(b) собственная функция $W_n(z)$ имеет на промежутке $[0, h_0]$ ровно n нулей в случае свободной верхней границы, и ровно $n+1$ нуль для волнового движения под крышкой;

(c) фазовая скорость $c_n(m) = \omega_n(m)/m$ для каждой из волновых мод является строго монотонно убывающей функцией параметра m (модуля волнового вектора).

Задача. В приближении Буссинеска найти спектр фазовых скоростей и собственные функции задачи о двумерных линейных внутренних волнах в слое стратифицированной жидкости под крышкой. Чему равны групповые скорости для каждой из волновых мод?

Решение. *Положим в (64) для плоского движения $m^2 = k^2$, где k — волновое число, и примем $\rho_0(z) = const$ и $N(z) = N_0 = const$ согласно приближению Буссинеска. Далее, в случае $\omega \leqslant N_0$ обозначим*

$$\lambda^2 = -m^2 \left(1 - \frac{N_0^2}{\omega^2}\right).$$

В результате получаем уравнения

$$W_{zz} + \lambda^2 W = 0 \quad (0 < z < h_0), \qquad W(0) = W(h_0) = 0,$$

что сразу дает $\lambda = \lambda_n = \pi n/h_0$ *и* $\varphi_n(z) = \sin \lambda_n z \quad (n = 1, 2, ...)$. *Выражая* ω *через* λ, *отсюда находим волновые моды* $\omega_n^2(k) = N_0^2 k^2/(k^2 + \lambda_n^2)$. *Соответственно, фазовые скорости* $c_p^{(n)} = \omega_n(k)/k$ *и групповые скорости* $c_g^{(n)} = d\omega_n(k)/dk$ *имеют вид*

$$c_p^{(n)}(k) = \pm \frac{N_0}{\sqrt{k^2 + \lambda_n^2}}, \qquad c_g^{(n)}(k) = \pm \frac{N_0 \lambda_n^2}{(k^2 + \lambda_n^2)^{3/2}}.$$

Ясно, что $|c_g^{(n)}(k)| < |c_p^{(n)}(k)|$ *при всех* $k \neq 0$, *и равенство достигается только в длинноволновым пределе* $k = 0$, *который доставляет максимальное значение* $c_p^{(n)} = c_g^{(n)} = N_0 h_0/(\pi n)$ *фазовой и групповой скорости* n*-й моды.*

В случае $\omega > N_0$ *дополнительных решений для задачи с крышкой на верхней границе слоя не возникает — найденные решения исчерпывают весь спектр.*

Если же собственная функция $W(z)$ имеет нуль $W(h_*) = 0$ в точке $z = h_*$, лежащей в интервале $(0, h_0]$, и при этом выполнено $N^2(z) < 0$ для $z \in (0, h_*)$, то тогда для соответствующего спектрального значения имеем $\omega^2 < 0$, и движение неустойчиво. В частности, движение всегда неустойчиво, если плотность жидкости $\rho_0(z)$ является монотонно возрастающей функций на промежутке $(0, h_0)$.

Литература

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. - М.: Физматгиз, 1963.

2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973, 416 с.

3. Ламб Г. Гидродинамика. М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. 928 с.

4. Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000, 420 с.

5. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964, 656 с.

6. Налимов В.И., Пухначев В.В. Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей. Новосибирск, НГУ, 1975, 174 с.

7. Механика сплошных сред в задачах. Том 1: Теория и задачи. Том 2: Ответы и решения. Под ред. М.Э. Эглит. М.: Московский лицей, 1996.

8. Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. 320 с.

9. Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. Ред. Дж. Бэтчелор, Г. Моффат. М.: Мир, 1984. 504 с.

10. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.

11. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М.: ИЛ, 1959.

12. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 432 с.

13. Debnath L. Nonlinear water waves. San Diego, London: Academic Press, 1994. 544 p.

14. Johnson R.S. A modern introduction to the mathematical theory of water waves. Cambridge Univ. Press, 1997.

15. Yih C.S. Stratified flows. N.-Y.: Academic Press, 1980. 418 p.

Задачи

1. Поплавок поднимается и опускается на волне пятнадцать раз в минуту. Найти длину волны L и скорость ее распространения c, считая амплитуду волны малой и глубину жидкости бесконечно большой.

   Ответ: $L = 24.98\,\text{м}, \quad c = 6.25\,\text{м/с}.$

2. Циклоп Полифем бросил в корабль Одиссея большую каменную глыбу, но не попал. Первая группа самых быстрых и опасных волн достигла судна через 5 секунд и едва не опрокинула его. На каком расстоянии от корабля, стоявшего в бухте на якоре на глубине 5 м, упала глыба?

   Ответ: $35\,\text{м}.$

3. Рассматривается бегущая плоская волна в жидкости конечной глубины со свободной поверхностью $y = h_0 + a\cos(kx - \omega t)$ $(|a| < h_0$; параметры ω и k связаны дисперсионным соотношением линейной теории $\omega^2 = gk\,\operatorname{th} kh_0)$. Найти траектории частиц $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, разыскивая приближенное решение $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g\,ak}{\omega}\,\frac{\operatorname{ch} ky}{\operatorname{ch} kh_0}\cos(kx - \omega t), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{g\,ak}{\omega}\,\frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{ch} kh_0}\sin(kx - \omega t), \tag{65}$$
$$(x, y)_{|t=0} = (\xi, \eta)$$

   в виде $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \alpha\,\mathbf{x}_1(t) + O(\alpha^2)$ с малым параметром $\alpha = ak$. По какой кривой в плоскости (x, y) движется точка $\mathbf{x}_*(t) = \mathbf{x}_0(t) + \alpha\,\mathbf{x}_1(t)$? Является ли ее движение периодическим по t?

   Ответ:
$$x(t) = \xi + a\,\frac{\operatorname{ch} k\eta}{\operatorname{sh} kh_0}\big(\sin k\xi - \sin(k\xi - \omega t)\big) + O(a^2k^2),$$
$$y(t) = \eta - a\,\frac{\operatorname{sh} k\eta}{\operatorname{sh} kh_0}\big(\cos k\xi - \cos(k\xi - \omega t)\big) + O(a^2k^2);$$
   точка $\mathbf{x}_*(t)$ вращается с периодом $T = 2\pi/\omega$ по эллипсу.

4. Найти точное решение $\mathbf{x}(t) = (x(t), 0)$ уравнений (65), описывающее горизонтальное движение частицы в придонном слое $y = 0$, имеющей при

$t = 0$ координаты $\mathbf{x}(0) = (0, 0)$. Вычислить коэффициенты в разложении этого решения $x(t) = x_0(t) + a\, x_1(t) + a^2\, x_2(t) + O(a^3)$ по степеням амплитудного параметра a.

Ответ: $x(t) = \dfrac{1}{k}\big(\omega t + f^{-1}(\omega t)\big)$, где $f(z) = \int\limits_0^z \dfrac{ds}{\beta\cos s - 1}$ $\Big(\beta = \dfrac{ak}{\operatorname{sh} kh_0}\Big)$;

$$x_0(t) \equiv 0, \quad x_1(t) = \frac{\sin\omega t}{\operatorname{sh} kh_0}, \quad x_2(t) = \frac{1}{4}\, k\, \frac{2\omega t - \sin 2\omega t}{\operatorname{sh}^2 kh_0}.$$

5. В линейном приближении рассматривается трехмерное волновое движение бесконечно глубокой жидкости с вещественным потенциалом скоростей $\varphi = Im\,(\varphi_1 + \varphi_2)$, где φ_j — комплексные волновые пакеты

$$\varphi_j(\mathbf{x}, z, t) = b\, e^{mz + i(\mathbf{k}_j\cdot\mathbf{x} - \omega t)}, \quad \mathbf{x} = (x, y)$$

с разными волновыми векторами $\mathbf{k}_1 = (k, l)$, $\mathbf{k}_2 = (-k, l)$, но одинаковой частотой $\omega = \sqrt{gm}$ $(m = |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2|)$ и амплитудой $b \in \mathbb{R}$. Показать, что данный потенциал φ удовлетворяет условию непротекания $\varphi_x = 0$ на вертикальной стенке $x = 0$, и найти форму линии контакта свободной поверхности $z = \zeta(x, y, t)$ с этой стенкой в каждый момент времени.

Ответ: $\zeta(0, y, t) = \dfrac{2b\omega}{g}\cos(ly - \omega t)$.

6. В рамках линейной теории волн определить частоты собственных колебаний жидкости с потенциалом скоростей $\varphi = e^{i\omega t}\Phi(x, y, z)$ в прямоугольном бассейне глубины h_0, длины a и ширины b. Чему равна наименьшая из этих частот?

Ответ: $\omega_{nm}^2 = g\lambda_{nm}\operatorname{th}\lambda_{nm}h_0$, $\lambda_{nm}^2 = \pi^2\big((n/a)^2 + (m/b)^2\big)$

$(n, m = 0, 1, 2, \ldots;\ n + m \neq 0)$,

$$\min_{nm}\omega_{nm}^2 = \frac{\pi g}{a}\operatorname{th}\frac{\pi h_0}{a}.$$

7. Рассматривается линейная задача Коши — Пуассона о двумерных волнах на поверхности бесконечно глубокой жидкости (малые возмущения состояния покоя):

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \qquad (-\infty < y < 0),$$

$$\nabla\Phi \to 0 \qquad (y \to -\infty),$$
$$\zeta_t = \Phi_y, \quad \Phi_t + g\zeta = 0 \qquad (y = 0),$$
$$\Phi(x, y, 0) = \Phi_0(x, y), \quad \zeta(x, 0) = \zeta_0(x).$$

Показать, что функция ζ, описывающая форму свободной поверхности $y = \zeta(x,t)$, удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\zeta_{tt}(x,t) + \frac{g}{\pi}\, v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta_x(x',t)}{x - x'}\, dx' = 0$$

с начальными данными

$$\zeta(x, 0) = \eta_0(x), \quad \zeta_t(x, 0) = \Phi_{0y}(x, 0).$$

Указание: воспользоваться интегральной формулой Коши для комплексной функции $f(z,t) = \Phi_{xt} - i\Phi_{yt}$, аналитической по $z = x + iy$ в полуплоскости $Im\, z < 0$.

8. В условиях предыдущей задачи построить решение $\zeta(x,t)$ для начальных данных

$$\zeta(x, 0) = 0, \quad \zeta_t(x, 0) = \frac{2a}{x^2 + a^2} \quad (a > 0 - const),$$

используя представление функции ζ в виде интеграла Фурье.

Ответ: $\zeta = f_+(x,t) + f_-(x,t), \qquad f_\pm(x,t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ak} \sin(kx \pm \sqrt{gk}\, t)\, \frac{dk}{\sqrt{gk}}.$

9. Частота ω в группах волн, приходящих из отдаленной штормовой области, менялась линейно со временем и за период наблюдения τ возросла на величину Δ. Используя дисперсионное соотношение для волн на глубокой воде, определить расстояние r до места шторма.

Ответ: $r = \dfrac{g\tau}{2\Delta}.$

10. Показать, что для фазовой и групповой скоростей линейных поверхностных волн, распространяющихся по покоящейся жидкости глубины h_0,

справедливо соотношение

$$c_g(k) = \frac{1}{2}\, c_p(k)\, \left(1 + \frac{2kh_0}{\operatorname{sh} 2kh_0}\right).$$

Используя это равенство, показать, что отношение $c_g(k)/c_p(k)$ является строго монотонно убывающей функцией волнового числа k на полуоси $k \in (0, +\infty)$. Чему равно это отношение в пределе длинных ($k \to 0$) и коротких ($k \to +\infty$) волн?

Ответ: $\displaystyle \lim_{k\to 0} \frac{c_g(k)}{c_p(k)} = 1; \qquad \lim_{k\to +\infty} \frac{c_g(k)}{c_p(k)} = \frac{1}{2}.$

11. Вывести дисперсионное соотношение для плоской задачи о волнах на воде с учетом сил поверхностного натяжения. Граничное условие для давления на свободной поверхности $z = h(x,t)$ имеет вид $p = -2\sigma h_{xx}(1+h_x^2)^{-3/2}$, где $\sigma > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения.

12. Найти соотношение между групповой скоростью U и фазовой скоростью c для коротких (в пределе $L = 2\pi/k \to 0$) капиллярно-гравитационных волн на глубокой воде.

    Ответ: $U = (3/2)\, c$

13. Точечный источник волн движется на поверхности глубокой воды прямолинейно и с постоянной скоростью. Показать, что все группы волн, стационарных относительно источника возмущений, сосредоточены внутри угла $2 \arcsin\,(1/3)$ (угол Кельвина) на свободной поверхности с вершиной в этом источнике.

14. Построить непрерывные при $t > 0$ автомодельные решения уравнений мелкой воды

$$h_t + (uh)_x = 0, \quad u_t + uu_x + gh_x = 0,$$

зависящие от отношения x/t.

Ответ: $\displaystyle u(x,t) = \frac{2x}{3t} + C, \quad h(x,t) = \frac{1}{g}\left(\frac{x}{3t} - C\right)^2, \quad C = const.$

15. Найти все решения уравнений мелкой воды с линейным полем скоростей $u(x,t) = a(t)x + b(t)$.

16. Для системы уравнений мелкой воды найти все дифференциальные законы сохранения $P_t + Q_x = 0$ с полиномиальными плотностями $P(u,h)$ степени не выше третьей.

Ответ: $$P(u,h) = C_1\,u + C_2\,h + C_3\,uh + C_4\left(\frac{1}{2}\,u^2h + \frac{1}{2}\,gh^2\right),$$
$$Q(u,h) = C_1\left(\frac{1}{2}\,u^2 + gh\right) + C_2\,uh + C_3\left(u^2h + \frac{1}{2}gh^2\right) + C_4\left(\frac{1}{2}\,u^3h + guh^2\right).$$

17. Вывести уравнение ударной адиабаты в плоскости (u,h) с центром в точке (u_0,h_0) для сильного разрыва, описываемого законами сохранения массы и полного импульса (46) системы уравнений мелкой воды.

Ответ: $$(u-u_0)^2 = \frac{g(h+h_0)}{2hh_0}(h-h_0)^2.$$

18. В условиях предыдущей задачи найти выражения для относительных скоростей жидкости $v = u - D$ и $v_0 = u_0 - D$ по разные стороны сильного разрыва (D — скорость разрыва) через глубины h и h_0 ($h > h_0$). Выяснить, являются ли эти скорости докритическими или сверхкритическими.

Ответ: $$v = \pm\sqrt{\frac{gh_0(h+h_0)}{2h}},\ \ v_0 = \pm\sqrt{\frac{gh(h+h_0)}{2h_0}};\quad |v| < \sqrt{gh},\ \ |v_0| > \sqrt{gh_0}\quad .$$

19. Рассматривается гидравлический прыжок — стационарный сильный разрыв для уравнений мелкой воды со скоростью $D = 0$, на котором выполнены законы сохранения массы и полного импульса. Показать, что поток энергии $Q = \frac{1}{2}\,u^3h + guh^2$ имеет скачок

$$[Q] = \frac{gm}{4hh_0}\,[h]^3,$$

где $m = uh = u_0h_0$ — поток массы, а для глубин жидкости h и h_0

выполнено соотношение

$$h = \frac{1}{2}\, h_0 \left(\sqrt{1 + 8F^2} - 1 \right),$$

где $F = u_0/\sqrt{gh_0}$ — число Фруда.

20. В результате прохождения приливного бора вверх по течению реки уровень воды в ней повысился на 10%, а скорость течения u_0 уменьшилась вдвое. Чему равняется скорость бора?

Ответ: $D = \dfrac{9}{2}\, u_0$.

21. Жидкость покоится в канале с поперечной вертикальной перегородкой $x = 0$ и имеет глубины $h_0 > h_1$ по разные стороны от нее. В момент времени $t = 0$ перегородка убирается, в результате чего жидкость приходит в движение. В приближении мелкой воды найти форму свободной поверхности $z = h(x, t)$ при $t > 0$, разыскивая автомодельное решение с центрированными волнами и сильными разрывами.

22. Проверить, что нелинейное кинематическое условие для потенциала скоростей φ на свободной границе $z = h(x, y, t)$ в трехмерной задаче Коши–Пуассона эквивалентно дивергентному уравнению

$$h_t + div_{(x,y)} \int\limits_0^h \nabla_{(x,y)} \varphi(x, y, z, t)\, dz = 0.$$

23. Для плоской задачи Коши–Пуассона показать, что на свободной границе $y = h(x, t)$ касательная скорость частиц жидкости $u(x, t) = (\varphi_x + h_x \varphi_y)_{y=h}$ и нормальная скорость $v(x, t) = (\varphi_y - h_x \varphi_x)_{y=h}$ удовлетворяют системе уравнений

$$h_t = v, \qquad u_t + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2 - 2h_x uv + v^2}{1 + h_x^2} + g h_x = 0.$$

24. Показать, что закон сохранения полной энергии в двумерной задаче Коши–Пуассона можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^h \left(\varphi_x^2+\varphi_y^2\right)dy+\frac{1}{2}\,gh^2\right)=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^h \varphi_x\varphi_t\,dy.$$

25. Показать, что уравнения (54), описывающие плоские нелинейные стационарные поверхностные волны, допускают первый интеграл

$$\int\limits_0^{h(x)}\Big(\psi_x^2(x,y)-\psi_y^2(x,y)\Big)\,dy+gh^2(x)-2bh(x)=c \qquad (c=const).$$

26. С помощью метода разделения переменных найти собственные функции двумерной задачи о стационарных поверхностных волнах, линеаризованной на сверхкритическом потоке с постоянной глубиной h_0 и скоростью $u_0>\sqrt{gh_0}$:

$$\begin{aligned}&\Phi_{xx}+\Phi_{yy}=0 && (0<y<h_0),\\ &\Phi_y=0 && (y=0),\\ &u_0^2\,\Phi_{xx}+g\Phi_y=0 && (y=h_0).\end{aligned}$$

Ответ: $\Phi_n^{\pm}(x,y)=e^{\pm\alpha_n x/h_0}\cos\left(\alpha_n y/h_0\right) \qquad (n=0,1,2,\ldots),$

где $\alpha_n=\alpha_n(F)$ $\left(\pi n<\alpha_n<\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ — корень уравнения $tg\,\alpha=F^2\alpha$

с заданным числом Фруда $F=u_0/\sqrt{gh_0}$.

27. Переменные Леви–Чивита $\tau(\varphi,\psi)$, $\theta(\varphi,\psi)$ вводятся для поля скоростей $\mathbf{u}=(\varphi_x,\varphi_y)$ плоского стационарного безвихревого движения жидкости с помощью формулы $\mathbf{u}=e^{\tau}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, при этом в качестве независимых переменных используются потенциал φ и функция тока ψ. Показать, что нелинейное динамическое условие на свободной границе

$$\varphi_x^2+\varphi_y^2+2\lambda y=const \quad (y=h(x))$$

записывается в переменных Леви–Чивита в виде

$$\theta_\psi=\lambda\,e^{-3\tau}\sin\theta \quad (\psi=\psi_0).$$

Здесь $\lambda = gh_0/u_0^2$ — квадрат обратного числа Фруда, а ψ_0 — значение функции тока на свободной границе: $\psi(x, h(x)) = \psi_0$.

28. Рассматривается плоское безвихревое течение тяжелой жидкости внутри угла $z = r\,e^{i\beta}$ $(r > 0,\ -5\pi/6 < \beta < -\pi/6)$ с комплексным потенциалом $w = \varphi + i\psi$, имеющим вид $w(z) = A\,z^{3/2}$. Определить значение постоянной A, при котором на сторонах угла выполнены кинематическое и динамическое условия на свободной границе:

$$Im\,w = 0, \quad \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 + 2\lambda\,Im\,z = 0 \qquad \left(\beta = -\frac{\pi}{6},\ \beta = -\frac{5\pi}{6}\right)$$

(течение Стокса). Найти величину модуля скорости жидкости на свободной границе и уравнение линии тока L в полярных координатах (r, β), проходящей через точку $z = -i$.

Ответ: $A = \dfrac{2}{3}\sqrt{\lambda}\,e^{i\pi/4}$; $\left|\dfrac{dw}{dz}\right| = \sqrt{\lambda r}$ $(\beta = -\pi/6,\ \beta = -5\pi/6)$; $L:\ r^3 = \dfrac{2}{1 + \sin 3\beta}$.

29. Для уединенной волны с профилем $y = h(x)$, имеющим точку заострения в вершине волны $y = h_{max}$, скорость жидкости $\mathbf{u}$ равна нулю в указанной точке. Используя интеграл Бернулли $|\mathbf{u}|^2 + 2gh = u_\infty^2 + 2gh_\infty$ и известное из численных расчетов значение числа Фруда $F = u_\infty/\sqrt{gh_\infty} = 1.290$ для рассматриваемого течения, найти безразмерную амплитуду $a = (h_{max} - h_\infty)/h_\infty$ заостренной уединенной волны.

Ответ: $a = 0.832$.

30. Показать, что поверхностная уединенная волна за все время движения $-\infty < t < +\infty$ переносит в направлении своего распространения через каждое вертикальное сечение слоя массу жидкости

$$m = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(\xi)\,d\xi,$$

где $\rho = const$ — плотность жидкости, $y = h_0 + \zeta(x - u_0 t)$ — форма свободной поверхности в бегущей волне (здесь h_0 — глубина жидкости в состоянии покоя, u_0 — скорость волны).

31. Импульс I бегущей уединенной волны определяется равенством

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{h(\xi)} \rho u(\xi, y)\, dy\, d\xi,$$

где $u = \varphi_x(x - u_0 t, y)$ — горизонтальная скорость жидкости, $y = h(x - u_0 t) = h_0 + \zeta(x - u_0 t)$ — форма свободной границы. Показать, что $I = m\, u_0$, где m — масса жидкости, переносимая волной.

32. Показать, что система уравнений Грина — Нагди

$$h_t + (uh)_x = 0, \quad u_t + uu_x + gh_x + \frac{1}{3h}\,(h^2 d_t^2 h)_x = 0, \quad d_t = \partial_t + u\partial_x,$$

инвариантна относительно преобразования Галилея

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x - u_0 t, \quad \tilde{u} = u - u_0, \quad \tilde{h} = h.$$

Обладают ли аналогичным свойством системы уравнений Буссинеска (52) и (53)?

33. Используя второе приближение теории мелкой воды, найти выражение для давления p внутри слоя жидкости через функции h и u.

34. Установить справедливость закона сохранения энергии

$$\partial_t \left(\frac{1}{2}\, h|\mathbf{u}|^2 + q \right) + div \Big((\tilde{p} + q)\, \mathbf{u} \Big) = 0, \qquad q = \frac{1}{2}\, gh^2 + \frac{1}{6}\, h\, (d_t h)^2$$

для системы уравнений Грина — Нагди (49). Здесь функция $\tilde{p}$ та же, что и в законе сохранения импульса (50).

35. Пусть функции $h(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ являются решением уравнений Грина — Нагди (49). Определим траектории жидких частиц как интегральные

кривые системы обыкновенных дифференциальных уравнений $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Показать, что для произвольного замкнутого контура $C(t)$ в плоскости $\mathbf{x} = (x, y)$, состоящего из одних и тех же частиц, справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{C(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int\limits_{C(t)} \left(d_t \mathbf{v} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{v} \right) \cdot d\mathbf{x},$$

где

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \frac{1}{3h} \nabla\big(h^2 d_t h\big), \quad d_t = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla.$$

36. В условиях предыдущей задачи показать, что скаляр Ω/h, где величина Ω (аналог вихря для среды с дисперсией) определена формулой $\Omega\, \mathbf{e}_z = rot\, \mathbf{v}$, сохраняется вдоль траекторий частиц. Здесь $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор вдоль оси z, совпадающий с направлением силы тяжести.

37. В рамках линейной теории найти скорость распространения волн длины L на границе раздела двух жидкостей бесконечной глубины. Нижняя жидкость имеет плотность ρ_1, верхняя жидкость — плотность $\rho_2 < \rho_1$.
Ответ: $c = \sqrt{\dfrac{gL\,(\rho_1 - \rho_2)}{2\pi(\rho_1 + \rho_2)}}$).

38. Найти фазовые скорости линейных длинных волн (в пределе с волновым числом $k \to 0$) в покоящейся двухслойной жидкости конечной глубины со свободной верхней границей. Плотность жидкости принимает значения $\rho = \rho_1$ в нижнем слое и $\rho = \rho_2$ в верхнем ($\rho_2 < \rho_1$), невозмущенные глубины слоев равны h_1 и h_2 соответственно.

39. Рассматриваются линейные стационарные волны (т.е. волновые пакеты с заданной частотой $\omega = 0$ и искомым волновым числом k) на кусочно-постоянном течении двухслойной жидкости под крышкой, имеющем плотности ρ_j ($\rho_2 < \rho_1$), скорости u_{0j} и глубины $h_1 = h_0$ и $h_2 = H - h_0$ в нижнем ($j = 1$) и верхнем ($j = 2$) слоях. Введем безразмерные параметры — безразмерное волновое число $\kappa = kh_0$, отношение невозмущенных глубин

слоев $r = h_2/h_1$ и *денсиметрические (плотностные)* числа Фруда

$$F_1^2 = \frac{\rho_1 u_{01}^2}{g(\rho_1 - \rho_2)h_1}, \quad F_2^2 = \frac{\rho_2 u_{02}^2}{g(\rho_1 - \rho_2)h_2}.$$

Проверить, что дисперсионное соотношение (56) в случае стационарных волн имеет в указанных безразмерных переменных следующий вид: $F_1^2\,\kappa \operatorname{cth} \kappa + F_2^2\, r\kappa \operatorname{cth} r\kappa = 1$. Для каких значений F_1 и F_2 это дисперсионное соотношение имеет вещественные корни κ?

Ответ: корни $\kappa \in \mathbb{R}$ существуют тогда и только тогда, когда $F_1^2 + F_2^2 \leqslant 1$.

40. Следующая система уравнений описывает движение двухслойной мелкой воды в приближении Буссинеска, а также движение многофазных сред со сжимаемыми компонентами:

$$a_t + \big((a^2-1)b\big)_x = 0, \quad b_t + \big((b^2-1)a\big)_x = 0. \tag{66}$$

Показать, что эти уравнения гиперболичны в области $D = \{-1 < a < 1, -1 < b < 1\}$ и найти инварианты Римана.

41. В условиях предыдущей задачи показать, что пара функций

$$S = -(1-a^2)(1-b^2), \quad F = 2abS$$

является законом сохранения $S(a,b)_t + F(a,b)_x = 0$ (пара таких функций (S,F) называется энтропийной парой). Найти подобласть области гиперболичности, где функция S выпукла.

42. Показать, что пара функций $s = ab$, $f = s^2 + S$ также является энтропийной парой для системы (66), однако множество, где s выпукла, является пустым.

43. Найти все законы сохранения для системы уравнений (66).

44. Показать, что заменой переменных

$$u = 2ab, \quad h = (1-a^2)(1-b^2)$$

система (66) сводится к уравнениям мелкой воды

$$h_t + (uh)_x = 0, \quad u_t + uu_x + h_x = 0.$$

Исследовать якобиан перехода.

45. Рассматривается система уравнений $\mathbf{u}_t + A(\mathbf{u})\mathbf{u}_x = 0$ двухслойной мелкой воды со свободной верхней границей для вектор-функции $\mathbf{u} = (h_1, h_2, u_1, u_2)$, где $h_j > 0$ — глубины слоев, u_j — скорости жидкости в слоях $(j = 1, 2)$, а матрица A имеет вид

$$A(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & h_1 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & h_2 \\ g & g\lambda & u_1 & 0 \\ g & g & 0 & u_2 \end{pmatrix}$$

Здесь $\lambda = \rho_2/\rho_1\,(\rho_2 < \rho_1)$ — отношение плотностей. Найти характеристический определитель $\Delta(c) = \det(A - cI)$ данной системы. Преобразовать характеристическое уравнение $\Delta(c) = 0$ к эквивалентной системе уравнений для чисел Фруда $F_1 = (u_1 - c)/\sqrt{gh_1}$, $F_2 = (u_2 - c)/\sqrt{gh_2}$. Выяснить, сколько вещественных корней уравнение $\Delta(c) = 0$ имеет в случае (a) $u_2 = u_1$; (b) $u_2 = u_1 + \sqrt{gh_1} + \sqrt{gh_2}$.

Ответ: $\Delta(c) = [(u_1 - c)^2 - gh_1][(u_2 - c)^2 - gh_2] - g^2\lambda h_1 h_2;$

$(F_1^2 - 1)(F_2^2 - 1) = \lambda, \quad F_2 = \sqrt{h_1/h_2}\,F_1 + (u_2 - u_1)/\sqrt{gh_2};$

(a) четыре корня (система гиперболична); (b) два корня (система не гиперболична).

46. Показать, что система уравнений двухслойной мелкой воды со свободной границей может быть представлена в виде

$$\mathbf{u}_t + (R\,\nabla_{\mathbf{u}} E(\mathbf{u}))_x = 0$$

с вектором $\mathbf{u} = (h_1, h_2, u_1, u_2)$, симметрической матрицей

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_2} \\ \frac{1}{\rho_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и функцией энергии

$$E(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\,\rho_1 h_1 u_1^2 + \frac{1}{2}\,\rho_2 h_2 u_2^2 + \frac{1}{2}\,\rho_1 g h_1^2 + \rho_2 g h_1 h_2 + \frac{1}{2}\,\rho_2 g h_2^2$$

47. Показать, что уравнения (58), описывающие плоские нелинейные стационарные волны в двухслойной жидкости, допускают первый интеграл

$$\rho_1 \int\limits_0^{h(x)} \Big(\psi_{1x}^2(x,y) - \psi_{1y}^2(x,y)\Big)\,dy + \rho_2 \int\limits_{h(x)}^{H} \Big(\psi_{2x}^2(x,y) - \psi_{2y}^2(x,y)\Big)\,dy +$$

$$+g(\rho_1 - \rho_2)\,h^2(x) - 2(\rho_1 b_1 - \rho_2 b_2) h(x) = c \qquad (c = const).$$

48. Соответствие между эйлеровыми координатами $\mathbf{x}$ и лагранжевыми координатами $\boldsymbol{\xi}$ частиц жидкости задается уравнениями $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x}|_{t=0} = \boldsymbol{\xi}$. Показать, что система уравнений движения неоднородной жидкости (38) записывается в лагранжевых координатах $(\boldsymbol{\xi}, t)$ в виде

$$\det M = 1, \quad \rho_0 M^T\big(\mathbf{x}_{tt} - \mathbf{g}\big) + \nabla_\xi p = 0,$$

где $\rho_0 = \rho_0(\boldsymbol{\xi})$ — начальное поле плотности, $M = \partial\mathbf{x}/\partial\boldsymbol{\xi}$ — матрица Якоби отображения $\boldsymbol{\xi} \to \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$.

49. Показать, что плоские движения однородной жидкости описываются в лагранжевых координатах системой уравнений

$$x_\xi\, y_\eta - x_\eta\, y_\xi = 1, \qquad x_\eta\, x_{\xi t} - x_\xi\, x_{\eta t} + y_\eta\, y_{\xi t} - y_\xi\, y_{\eta t} = \omega_0(\xi, \eta), \qquad (67)$$

где $\omega_0(\xi, \eta)$ — начальный вихрь.

50. Показать, что в случае тождественно постоянной начальной завихренности $\omega_0(\xi,\eta) \equiv const$ преобразование

$$x' = x\cos\frac{\omega_0 t}{2} + y\sin\frac{\omega_0 t}{2}, \qquad y' = -x\sin\frac{\omega_0 t}{2} + y\cos\frac{\omega_0 t}{2}$$

переводит систему уравнений (67) в систему того же вида для функций $x'(\xi,\eta,t)$, $y'(\xi,\eta,t)$ с завихренностью $\omega_0 = 0$.

51. Рассматривается твердотельное вращение идеальной несжимаемой жидкости с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг оси Oz, имеющее траектории частиц

$$x = \xi\cos\omega_0 t - \eta\sin\omega_0 t, \qquad y = \xi\sin\omega_0 t + \eta\cos\omega_0 t, \qquad z = \zeta.$$

Найти выражение в эйлеровых переменных для функции тока ψ течения в плоскости Oxy ($u = \psi_y$, $v = -\psi_x$) и вектора завихренности $\omega = rot\,\mathbf{u}$, соответствующих полю скоростей $\mathbf{u} = (u, v, 0)$ данного движения.

Ответ: $\quad \psi(x,y) = -\frac{1}{2}\,\omega_0(x^2+y^2); \qquad \omega = (0, 0, 2\omega_0).$

52. Рассматривается двумерное движение однородной жидкости в плоскости (x,y) с траекториями частиц

$$x = a + \frac{1}{k}\,e^{kb}\sin k(a-ct), \quad y = b - \frac{1}{k}\,e^{kb}\cos k(a-ct),$$

где $k = const$, $c = const$, а параметры a и b ($b \leqslant 0$) постоянны на фиксированной траектории, но меняются от одной траектории к другой (трохоидальные волны Герстнера). Показать, что давление постоянно вдоль каждой траектории тогда и только тогда, когда $c^2 = g/k$, и в этом случае давление p и завихренность ω имеют вид

$$p = p_0 - \rho_0 g b + \frac{1}{2}\,\rho_0 c^2\left(e^{2kb} - 1\right), \qquad \omega = \frac{2kce^{2kb}}{1 - e^{2kb}},$$

где $\rho_0 = const$ — плотность жидкости, $p_0 = const$.

53. Показать, что дифференциальный закон сохранения энергии

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\,\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho g z\right) + div\left(\mathbf{u}\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + p + \rho g z\right)\right) = 0$$

является следствием системы уравнений движения стратифицированной жидкости (38).

54. В момент времени $t = 0$ слой стратифицированной жидкости $0 < z < h_0$ имеет распределение плотности $\rho = \rho_0(z)$ с гладкой монотонной функцией ρ_0 ($\rho_0'(z) < 0$) и постоянное давление $p = p_0$ на свободной границе $z = h_0$. Построить решение уравнений (38), описывающее растекание слоя по дну $z = 0$ с линейным полем скоростей $u(x,t) = a(t)x$, $v(y,t) = 0$, $w(z,t) = -a(t)z$ ($a(0) = a_0 > 0$) под действием силы тяжести. Найти траектории частиц жидкости.

Ответ: $a(t) = \dfrac{a_0}{1+a_0t}$; траектории частиц: $x = x_0(1+a_0t)$, $y = 0$, $z = z_0/(1+a_0t)$, $\rho = \rho_0\big((1+a_0t)z\big)$, $p = p_0 - \dfrac{g}{1+a_0t}\displaystyle\int\limits_{(1+a_0t)z}^{h_0} \rho_0(s)\,ds - \dfrac{2a_0^2}{(1+a_0t)^4}\int\limits_{(1+a_0t)z}^{h_0} s\rho_0(s)\,ds$

55. Рассматривается атмосфера с давлением p и плотностью ρ, связанными уравнением состояния идеального газа $p = \rho RT$, где $R = const$ — газовая постоянная, T — абсолютная температура. Используя уравнение гидростатики $dp/dz = -g\rho(z)$, найти зависимость плотности покоящегося газа от вертикальной переменной z для следующих распределений температуры:

$$(a)\ T = T_0; \quad (b)\ T = T_0\,(1 - z/h_0) \quad (T_0 = const).$$

Ответ: (a) $\rho(z) = \rho_0 e^{-\beta z/h_0}$; (b) $\rho(z) = \rho_0(1 - z/h_0)^{\beta-1}$ ($\beta = g\rho_0 h_0/p_0$, $p_0 = \rho_0 RT_0$).

56. Найти плотность $\rho(z)$ и давление $p(z)$ в слое $-h_0 \leqslant z < 0$ покоящейся стратифицированной жидкости, если известны значения плотности ρ_0 и давления p_0 на поверхности слоя $z = 0$ и зависимость от z частоты Брента–Вяйсяля: $N(z) = \sqrt{\sigma g/(h_0 - \sigma z)}$ ($\sigma > 0 - const$).

Ответ: $\rho(z) = \rho_0\,(1 - \dfrac{\sigma z}{h_0})$, $p(z) = p_0 - g\rho_0 z\,(1 - \dfrac{\sigma z}{2h_0})$.

57. Найти спектр частот линейных внутренних волн и соответствующие собственные функции для слоя $0 < z < h_0$ покоящейся жидкости под крышкой $z = h_0$ с экспоненциальной стратификацией

$$\rho(z) = \rho_0\, e^{-N_0^2 z/g} \quad (\rho_0 = const > 0,\ N_0 = const).$$

Ответ: $$\omega_n^2(m) = \frac{N_0^2\, m^2}{m^2 + \frac{\pi^2 n^2}{h_0^2} + \frac{N_0^4}{4g^2}}, \quad W_n(z) = e^{N_0^2 z/(2g)} \sin\frac{\pi n}{h_0} z \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

58. В приближении Буссинеска с постоянной частотой Брента–Вяйсяля N_0 найти спектр фазовых скоростей и собственные функции задачи о двумерных линейных внутренних волнах в слое стратифицированной жидкости со свободной верхней границей.

59. Линейные длинные волны в сдвиговом течении стратифицированной жидкости под крышкой описываются в приближении Буссинеска спектральной задачей

$$\big((u_0(z) - c)^2 \varphi_z\big)_z + N_0^2 \varphi = 0, \qquad \varphi(0) = \varphi(h_0) = 0,$$

где c — фазовая скорость, $N_0 = const$ — частота Брента–Вяйсяля. Найти спектр фазовых скоростей и собственные функции для течения с линейным сдвигом скорости $u_0(z) = az$ $(a = const,\ a \neq 0)$, удовлетворяющим условию устойчивости $a^2 < 4N_0^2$.

Ответ: $c_n = \dfrac{ah_0}{1 - e^{\pi n/\lambda}},\ \varphi_n(z) = \dfrac{\sin\left\{\lambda \ln\left(1 - \frac{az}{c_n}\right)\right\}}{\sqrt{1 - \frac{az}{c_n}}},\ \lambda = \sqrt{\dfrac{N_0^2}{a^2} - \dfrac{1}{4}},\ n = \pm 1, \pm 2, ...$

60. Показать, что собственные функции W_i и W_j спектральной задачи (64), соответствующие любым двум вещественным волновым модам $\omega_i(m)$ и $\omega_j(m)$ с $i \neq j$, удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int\limits_0^{h_0} \rho_{0z} W_i W_j \, dz = 0, \qquad \int\limits_0^{h_0} \rho_0 \big(W_{iz} W_{jz} + m^2 W_i W_j\big)\, dz = 0.$$

61. Доказать, что для непрерывно стратифицированной жидкости без сдвига скорости в основном течении справедливо дисперсионное неравенство $\omega^2 < gm$ (здесь $m = \sqrt{k^2 + l^2}$ — модуль волнового вектора).

Учебное издание

Гаврилюк Сергей Леонтьевич
Макаренко Николай Иванович
Сухинин Сергей Викторович

ВОЛНЫ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

Учебное пособие

Редактор

Подписано в печать
Формат Офсетная печать.
Уч.-изд.л Усл. печ. л. Тираж

Заказ
Редакционно-издательский центр НГУ
630090, Новосибирск 90, ул. Пирогова, 2