В А Р И А Ц И О Н Н О Е   И С Ч И С Л Е Н И Е

Лектор проф. А.М. Хлуднев, 9 семестр

Организационно-методический раздел.

1.1 Название курса.

Вариационное исчисление.
Направление - математика
Раздел - общие математические и естественно-научные дисциплины
Семестр(ы) - 9

1.2 Цели и задачи курса.

Курс "Вариационное исчисление" предназначен для студентов пятого курса механико-математических факультетов университетов для более полного знакомства с современными методами исследования задач на основе вариационных подходов.
Основной целью освоения дисциплины является получение представлений о современном состоянии вариационного исчисления, приобретении навыков в исследовании вариационных задач и овладении соответствующей техникой.
Для достижения поставленной цели выделяются задачи курса:
1) изучение теоретической части курса в соответствии с программой
2) решение цикла задач по курсу в соответствии с программой
3) сдача экзамена в соответствии с учебным планом.

1.3 Требования к уровню освоения содержания курса.

По окончании изучения указанной дисциплины студент должен
- иметь представление о возможностях вариационных подходов в исследовании задач математической физики;
- знать базовые принципы, используемые в вариационном исчислении;
- уметь применять вариационные методы в простейших случаях.

1.4 Формы контроля

Итоговый контроль. Для контроля усвоения дисциплины учебным планом предусмотрен экзамен.

Текущий контроль. В течение семестра выполняются домашние задания и контрольные работы. Выполнение указанных видов работ является обязательным для всех студентов.

2 Содержание дисциплины.

2.1 Новизна.

Курс "Вариационное исчисление" базируется на современных представлениях о вариационном исчислении. В нем используются как фундаментальные факты теории вариаций, так и отдельные фрагменты, относящиеся к частным методам решения вариационных задач. Курс характеризуется математической строгостью изложения, большим числом предлагаемых теоретических и практических задач и упражнений.

2.2 Тематический план курса.

Наименование разделов и тем	Количество часов				
	Лекции	Семи-нары	Контрольные работы, коллоквиумы	Экзамен, консультации	**Всего часов**
Вводная часть	4	2	2	4	**12**
Слабая полунепрерывность и задачи минимизации	6	3	4	8	**21**
Выпуклые функции со значениями в $\overline{R}$	14	7	10	20	**51**
Задачи минимизации и эллиптические краевые задачи	12	6	8	9	**35**
Итого по курсу:	**36**	**18**	**24**	**41**	**119**

2.3 Содержание отдельных разделов и тем.

Вариационное исчисление

1. Производные Гато и Фреше.
2. Формула Лагранжа. Неравенство Липшица.
3. Связь между производными Гато и Фреше. Дифференцируемость по направлению.
4. Производные высших порядков.
5. Слабая полунепрерывность функционалов.
6. Условия слабой полунепрерывности выпуклых функционалов.
7. Условия слабой полунепрерывности дифференцируемых функционалов.
8. Экстремальные точки. Критические точки.
9. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса.
10. Вариационные неравенства.
11. Выпуклые функции со значениями в $\overline{R}$. Простейшие свойства.
12. Связь между полунепрерывностью снизу и надграфиком функции.
13. Полунепрерывная снизу регуляризация функций.
14. Непрерывность выпуклых функций.
15. Поточечная верхняя грань непрерывных аффинных функций.
16. Г-регуляризация функций.
17. Сопряженные (полярные) функции.
18. Двойственность выпуклых функций.
19. Субдифференцируемость функций.
20. Примеры сопряженных функций и субдифференциалов.
21. Субдифференцируемость дифференцируемой функции.
22. Теорема Моро-Рокаффелара.
23. Проблема Дирихле. Двойственная задача.
24. Слабые решения вариационных задач.
25. Вариационное неравенство для оператора Пуассона.
    а) Предварительные сведения.
    б) Линейная задача.
    с) Нелинейная задача.
26. Операторы четвертого порядка.

2.4 Пример контрольного вопроса для самостоятельной работы.

Пусть Ω - ограниченная область с гладкой границей Γ, $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \bigcap \Gamma_1 = \varnothing$. Пусть ν- внутренняя нормаль к границе Г. Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \tag{2}$$

$$u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0, \quad u \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1. \tag{3}$$

Дать вариационную постановку задачи (1)-(3).

3 Учебно-методическое обеспечение дисциплины

3.1 Список основной и дополнительной литературы.

1. И.Экланд, Р. Темам. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М. Мир, 1979.
2. В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. Оптимальное управление. М. Наука, 1979.
3. Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья. Введение в вариационные неравенства и их приложения. М. Мир, 1983.
4. М.М. Вайнберг. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М. Наука, 1972.

3.2 Для изучения дисциплин, которые предусматривают использование нормативно-правовых актов, указывать источник опубликования.

Не предусмотрено.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

9 семестр

1. Производные Гато и Фреше
2. Формула Лагранжа. Неравенство Липшица
3. Связь между производными Гато и Фреше. Дифференцируемость по направлению
4. Производные высших порядков
5. Слабая полунепрерывность функционалов
6. Условия слабой полунепрерывности выпуклых функционалов
7. Условия слабой полунепрерывности дифференцируемых функционалов
8. Экстремальные точки. Критические точки
9. Теоремы Вейерштрасса для рефлексивных и нерефлексивных пространств
10. Вариационные неравенства
11. Выпуклые функции со значениями в $\bar{R}$.
    Связь между выпуклостью и надграфиком функции
12. Полунепрерывные снизу функции. Надграфик и поточечная верхняя грань для п. сн. функций
13. Полунепрерывная снизу регуляризация функций
14. Непрерывность выпуклых функций
15. Поточечная верхняя грань непрерывных аффинных функций
16. Г-регуляризация функций
17. Сопряженные (полярные) функции. Свойства сопряж. функций
18. Вторая сопряженная функция и ее свойства
19. Субдифференцируемость функций. Свойства субдифференциала
20. Критерий непустоты субдифференциала
21. Примеры сопряженных функций и субдифференциалов
22. Субдифференцируемость дифференцируемой функции
23. Задача о равновесии мембраны. Функциональные пространства
    а) Мембрана, содержащая разрез. Линейная задача
    б) Мембрана, содержащая разрез. Нелинейная задача
24. Контакт мембраны с тонким препятствием
25. Линейная задача о равновесии пластины
26. Контакт пластины с тонким препятствием
27. Равновесие нелинейной мембраны с тонким включением
28. Метод фиктивных областей в задаче Синьорини

Программу составил проф. А.М. Хлуднев