МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

С.В. Головин, А.А. Чесноков

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Электронное учебное пособие

Новосибирск, 2009

УДК 517
ББК 22.161.6
Г 61

Головин С. В., Чесноков А. А. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2009. 119 с.

Учебное пособие соответствует программе курса лекций и семинаров «Групповой анализ дифференциальных уравнений», читаемого студентам 4-го курса механико-математического факультета НГУ. Содержит теоретический материал, примеры решения типовых задач и сами задачи. Большая часть задач апробирована авторами и давно используется в учебном процессе. Для углубленного изучения предмета студентами, специализирующимися в области группового анализа дифференциальных уравнений, включен дополнительный теоретический материал и ряд задач повышенной трудности.

Предназначено для студентов старших курсов механико-математических факультетов университетов, аспирантов, преподавателей и научных работников в области дифференциальных уравнений.

Разработка подготовлена в рамках реализации Программы развития НИУ-НГУ.

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предметом настоящего учебного пособия является групповой анализ дифференциальных уравнений — наука об изучении и использовании свойств симметрии дифференциальных уравнений. Заложенная в конце 19-го века в трудах великого норвежского математика Софуса Ли идея об использовании групп непрерывных преобразований, допускаемых дифференциальными уравнениями, в настоящее время проникла в очень многие области научного знания — от чистой алгебры до прикладной механики и теоретической физики. В пособии излагаются приложения теории группового анализа для построения точных решений систем дифференциальных уравнений, получившей большое развитие в трудах академика Л.В. Овсянникова и его последователей.

Основной силой теории является ее универсальность и алгоритмичность. Она успешно применяется к дифференциальным уравнениям самой различной природы, не зависимо от свойств линейности, гиперболичности, для систем произвольно высокого порядка. Главным требованием является нетривиальность допускаемой уравнениями группы симметрий. Это требование не является искусственным — в большинстве математических моделей окружающего мира симметрия заложена в изначальную формулировку путем использования свойств однородности и изотропности пространства, предположений о галилеевой или лоренцовой инвариантности физических процессов и т.д. Четкие алгоритмы по вычислению группы симметрии системы дифференциальных уравнений и по ее использованию для построения точных решений и анализа свойств математической модели позволяют использовать теорию как удобный инструмент исследования даже без знания глубоких теоретических основ группового анализа.

Учебное пособие имеет целью продемонстрировать и помочь в освоении основных алгоритмов группового анализа. Здесь нет доказательств приводимых теорем, однако все алгоритмы и определения иллюстрируются подробно разобранными примерами. Для углубленного изучения, читателю предлагаются упражнения, позволяющие отработать «технику» группового анализа. Структура пособия соответствует курсу «Групповой анализ дифференциальных уравнений», разработанному Л.В. Овсянниковым и на протяжении многих лет читаемого в Новосибирском госуниверситете.

При подготовке учебного пособия авторы опирались на фундаментальные работы Л.В. Овсянникова [1]–[5], Н.Х. Ибрагимова [6]–[9] и П. Олвера [10].

1 Однопараметрические группы Ли, операторы и инварианты

1.1 Локальная группа Ли

Рассматриваются преобразования $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определяемые формулой $\overline{x} = f(x)$; $x, \overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Предполагается, что преобразования T обратимы, т.е. существует T^{-1} такое, что $x = T^{-1}\overline{x}$. Произведением преобразований T_1 и T_2 является их композиция, т.е. последовательное применение $(T_1T_2)x = T_1(T_2x)$. Заданное таким правилом умножение обладает свойством ассоциативности: $T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3$. Рассмотрим семейство преобразований $\{T_a\}$, зависящее от вещественного параметра $a \in \Delta \subset \mathbb{R}$ и определяемое формулами $\overline{x} = f(x, a)$; $x, \overline{x} \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1. Семейство преобразований $\{T_a\}$ называется локальной однопараметрической непрерывной группой Ли, если существует интервал $\Delta' \subset \Delta$ такой, что выполнены следующие аксиомы:

1^0 $\{T\}$ замкнуто в Δ' относительно операции умножения, т.е. для всех a, $b \in \Delta'$ выполнено $T_aT_b = T_c \in \{T\}$, где $c = \varphi(a, b) \in \Delta'$ — закон умножения в группе;

2^0 Закон умножения является гладким, т.е. $\varphi(a, b) \in C^2(\Delta' \times \Delta')$;

3^0 Семейство $\{T\}$ локально упорядочено в Δ', т.е. для любых $a, b \in \Delta'$ из $T_a = T_b$ следует $a = b$.

4^0 Семейство $\{T\}$ содержит единицу в Δ', т.е. существует $a_0 \in \Delta'$ такое, что $T_{a_0} = I$ — тождественное преобразование.

Из теоремы о неявной функции и указанной системы аксиом следует существование обратного элемент, т.е. для любого $a \in \Delta'$ существует $a^{-1} \in \Delta'$ такой, что $\varphi(a, a^{-1}) = \varphi(a^{-1}, a) = a_0$. Интервал Δ' может быть выбран достаточно малым так, чтобы в нем выполнялись аксиомы, поэтому в определении группы используется термин «локальная». В дальнейшем однопараметрическая непрерывная группа Ли локальных преобразований обозначается символом G_1.

Определение 2. Параметр a называется каноническим , если закон умножения в группе G_1 определяется формулой $\varphi(a, b) = a + b$.

Теорема 1. *В любой группе G_1 можно ввести канонический параметр $\bar{a}$ согласно формуле*

$$\bar{a} = \int_{a_0}^{a} \frac{ds}{A(s)}, \quad A(a) = \frac{\partial \varphi(a,b)}{\partial b}\bigg|_{b=a_0}.$$

Так как $\varphi(a_0, b) = b$, то $A(a_0) = 1$. Следовательно, в некоторой окрестности точки a_0 интеграл от функции A^{-1}, определяющий канонический параметр $\bar{a}$, существует.

Пример 1. Семейство преобразований в $\mathbb{R}^2(x,y)$ задается формулами

$$T_a : \begin{cases} \overline{x} = \sqrt{1-a^2}\, x + a\, y, \\ \overline{y} = -a\, x + \sqrt{1-a^2}\, y, \end{cases} \quad a \in \Delta = [-1, 1].$$

Покажем, что рассматриваемое преобразование является однопараметрической локальной группой Ли G_1, найдем закон умножения и введем канонический параметр.

Последовательно применим преобразования T_a и T_b:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{x}} &= \sqrt{1-b^2}\,\overline{x} + b\,\overline{y} = \left(\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} - ab\right)x + \\ &\qquad + \left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right)y \\ \overline{\overline{y}} &= -b\,\overline{x} + \sqrt{1-b^2}\,\overline{y} = -\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right)x + \\ &\qquad + \left(\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} - ab\right)y \end{aligned}$$

Обозначим $c = \varphi(a,b) = a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$. Непосредственным вычислением можно убедится в том, что $\sqrt{1-c^2} = \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} - ab$. Следовательно,

$$\begin{cases} \overline{\overline{x}} = \sqrt{1-c^2}\, x + c\, y \\ \overline{\overline{y}} = -c\, x + \sqrt{1-c^2}\, y \end{cases}$$

Получено преобразование того же вида $T_c = T_b T_a$ с законом умножения $c = \varphi(a,b)$. Отметим существование единичного элемента $a_0 = 0$ и обратного $a^{-1} = -a$. Для обеспечения гладкости закона умножения начальный отрезок Δ

нужно уменьшить до интервала $\Delta' = (-1, 1)$. В нем, очевидно, выполнена и аксиома локальной упорядоченности. Таким образом, представленное семейство преобразований является локальной однопараметрической группой Ли.

Введем в этой группе канонический параметр. Вспомогательная функция имеем вид $A(a) = \sqrt{1-a^2}$ и, в силу теоремы 1, канонический параметр определяется по формуле

$$\bar{a} = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \arcsin a.$$

С каноническим параметром преобразование $T_{\bar{a}}$ принимает стандартный вид преобразования поворота в плоскости (x, y) на угол $\bar{a}$:

$$\begin{cases} \overline{x} = x\cos\bar{a} + y\sin\bar{a}, \\ \overline{y} = -x\sin\bar{a} + y\cos\bar{a}. \end{cases} \tag{1.1}$$

1.2 Инфинитезимальный оператор

Рассматривается локальная однопараметрическая группа Ли G_1 с каноническим параметром $a \in \Delta \subset \mathbb{R}$, которая задана преобразованиями $T_a:\ \overline{x} = f(x, a)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Функцию $f(x, a)$ будем называть производящей функцией группы G_1. Фиксируя точку x и изменяя параметр a получим кривую в пространстве $\mathbb{R}^n$, представляющую собой орбиту точки x. Касательный к этой кривой вектор ξ в точке x имеет компоненты

$$\xi^i(x) = \left.\frac{\partial f^i(x, a)}{\partial a}\right|_{a=0}$$

и называется касательным векторным полем.

Определение 3. Инфинитезимальным оператором группы G_1 называется дифференциальный оператор

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

Теорема 2. *Производящая функция* $\overline{x} = f(x, a)$ *группы* G_1 *удовлетворяет задаче Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{x}}{\partial\, a} = \xi(\overline{x}), \\ \overline{x}|_{a=0} = x. \end{cases} \tag{1.2}$$

Обратно, какова бы ни была достаточно гладкая вектор-функция $\xi(x)$ *тождественно не равная нулю, решение задачи* (1.2), *определяет производящую функцию однопараметрической группы преобразований* G_1 *с каноническим законом умножения.*

Уравнения (1.2) называются уравнениями Ли. Они устанавливают взаимно однозначное соответствие между локальной однопараметрической группой Ли и ее инфинитезимальным оператором. При переходе к новой системе координат $y^i = y^i(x)$ компоненты вектора $\xi(x)$ преобразуются как координаты контравариантного вектора следующим образом

$$\eta^i(y) = \sum_{j=1}^{n} \xi^j(x)\, \frac{\partial y^i}{\partial x^j}.$$

Замена переменных в дифференциальном операторе осуществляется по формуле

$$X = \xi^i(x)\partial_{x^i} = X(y^i(x))\partial_{y^i} = \eta^i(y)\partial_{y^i} \equiv X'. \tag{1.3}$$

Здесь и далее по повторяющемуся индексу i выполняется суммирование и используется обозначение $\partial_x = \partial/\partial x$.

Теорема 3 (о выпрямлении оператора)**.** *Всякая однопараметрическая группа Ли* G_1 *заменой переменных сводится к группе переносов по координате* y^1.

В соответствии с формулой (1.3) в качестве координат y выбираются функционально независимые решения системы уравнений

$$\begin{aligned} &Xy^1(x) = 1, \\ &Xy^i(x) = 0, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Пример 2. Оператор группы вращений (1.1) имеет вид $X = y\partial_x - x\partial_y$. Выпрямление оператора X осуществляется переходом к полярной системе координат $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Поскольку $X(\sqrt{x^2+y^2}) = 0$ и $X(\mathrm{arctg}(y/x)) = -1$, то в переменных (r,θ) оператор X принимает вид $X' = -\partial_\theta$.

Пример 3. Найти преобразования группы G_1 заданной оператором $X = y\partial_x - x\partial_y + \partial_z$.

Запишем для данного оператора уравнения Ли:

$$\begin{cases} \frac{\partial\overline{x}}{\partial a} = \overline{y}, & \overline{x}|_{a=0} = x \\ \frac{\partial\overline{y}}{\partial a} = -\overline{x}, & \overline{y}|_{a=0} = y \\ \frac{\partial\overline{z}}{\partial a} = 1, & \overline{z}|_{a=0} = z. \end{cases}$$

В результате интегрирования системы уравнений получаем конечные преобразования

$$\begin{cases} \overline{x} = x\cos a + y\sin a, \\ \overline{y} = -x\sin a + y\cos a, \\ \overline{z} = z + a. \end{cases}$$

Таким образом, рассматриваемый оператор задает винтовой сдвиг, состоящий в одновременном преобразования поворота в в плоскости (x,y) и параллельном переносе вдоль оси z.

1.3 Инварианты и инвариантные многообразия однопараметрической группы преобразований

Определение 4. Функция $F(x) \neq \mathrm{const}$ называется инвариантом группы G_1 если для любого $T \in G_1$ имеет место тождество $F(Tx) = F(x)$.

Теорема 4 (критерий инвариантности функции)**.** *Функция $F(x)$ является инвариантом группы G_1 если и только если выполнено равенство*

$$XF \equiv \xi^i(x)\,\frac{\partial F}{\partial x^i} = 0. \tag{1.5}$$

Известно, что уравнение (1.5) в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет $n-1$ функционально независимых решений $I^1(x), \ldots, I^{n-1}(x)$. Любое другое решение (1.5) выражается через них в виде $F = \Phi(I^1, \ldots, I^{n-1})$ с подходящей функцией Φ.

Определение 5. Полный набор функционально независимых инвариантов группы G_1 называется базисом инвариантов этой группы.

Пример 4. Рассмотрим однопараметрическую группу Ли G_1, порождаемую оператором $X = \partial_x + 3y\partial_y$. Найдем конечные преобразования и общий вид инварианта этой группы. Составляем систему уравнений Ли (1.2):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{x}}{\partial a} = 1, \quad \overline{x}\,|_{a=0} = x, \\ \dfrac{\partial \overline{y}}{\partial a} = 3\overline{y}, \;\; \overline{y}\,|_{a=0} = y. \end{cases}$$

Интегрированием находим преобразования группы G_1 в виде $\overline{x} = x+a$, $\overline{y} = e^{3a}\,y$. Для отыскания инвариантов группы G_1 необходимо решить уравнение (1.5), которое в данном случае имеет вид $F_x + 3yF_y = 0$ (нижний индекс обозначает частную производную по соответствующему аргументу). Составление характеристического уравнения дает

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{3y} \quad \Rightarrow \quad I^1 = ye^{-3x}.$$

Таким образом, наиболее общий вид инварианта рассматриваемой группы G_1 есть $F = \Phi(ye^{-3x})$ с произвольной гладкой функцией Φ.

Определение 6. Многообразие $\mathcal{M}$ инвариантно относительно группы G_1 тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in \mathcal{M}$ и для любого преобразования $T \in G_1$ выполнено $Tx \in \mathcal{M}$.

Пусть многообразие $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ задано системой уравнений

$$\mathcal{M}: \quad \psi^\sigma(x) = 0, \quad \sigma = 1, \ldots, s. \tag{1.6}$$

Определение 7. Многообразие $\mathcal{M}$ регулярно задано уравнениями (1.6) если матрица Якоби $||\frac{\partial \psi^\sigma}{\partial x^i}||$ имеет в точках $\mathcal{M}$ ранг равный s. Число $n-s$ называется размерностью, а s — коразмерностью многообразия $\mathcal{M}$.

Теорема 5. *Многообразие $\mathcal{M}$ регулярно заданное уравнениями* (1.6) *инвариантно относительно действия группы G_1 с оператором X, если и только если выполнено*

$$X\,\psi^\sigma\,|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \sigma = 1, \ldots, s. \tag{1.7}$$

В отличии от критерия инвариантности функции (1.5), в критерии инвариантности многообразия (1.7) результат действия оператора X на функции ψ^σ равен нулю не тождественно, а только в точках многообразия $\mathcal{M}$.

Определение 8. Многообразие $\mathcal{M}$ называется особым относительно группы G_1, если оператор группы X тождественно равен нулю на многообразии $\mathcal{M}$, т.е. $X|_{\mathcal{M}} \equiv 0$. В противном случае многообразие называется неособым.

Теорема 6 (о представлении неособого инвариантного многообразия)**.** *Всякое неособое инвариантное относительно группы G_1 многообразие $\mathcal{M}$ можно задать уравнениями вида $\Phi^\sigma(I^1, ...I^{n-1}) = 0$ $(\sigma = 1, ..., s)$, связывающими только инварианты группы G_1.*

Пример 5. Покажем, что многообразие, заданное в пространстве $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ уравнением $\psi = 2x^6 - 5y^3 + z^2 = 0$, инвариантно относительно группы, порождаемой оператором $X = x\partial_x + 2y\partial_y + 3z\partial_z$, и запишем многообразие в терминах инвариантов оператора X.

Проверим критерий (1.7). Действуя на функции ψ оператором X получаем,

$$X\psi = 12x^6 - 30y^5 + 6z^2 = 6\psi.$$

Очевидно, что в точках рассматриваемого многообразия последнее выражение равно нулю. Отметим, что многообразие $\psi = 0$ является неособым и регулярно заданным.

Найдем инварианты оператора X. Для для этого необходимо решить уравнение (1.5), которое в данном случае имеет вид

$$xF_x + 2yF_y + 3zF_z = 0.$$

Составление характеристического уравнения и его интегрирование дает

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{3z} \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{x^2}{y}, \quad I_2 = \frac{z^2}{y^3}.$$

Нетрудно видеть, что уравнение многообразия $\psi = 2x^6 - 5y^3 + z^2 = 0$ в терминах инвариантов допускаемого оператора X записывается в виде $2I_1^3 + I_2 = 5$.

В инвариантности многообразия $\psi = 0$ относительно оператора X можно убедится и непосредственно, рассматривая конечные преобразования группы G_1, являющиеся в данном случае растяжениями. Однако в более сложных примерах использование конечных преобразований для непосредственной проверки инвариантности заданного многообразия относительно группы G_1 может привести к значительным вычислительным трудностям.

1.4 Задачи

1. Проверить, образуют ли указанные семейства преобразований локальную однопараметрическую группу Ли G_1. Найти закон умножения и ввести канонический параметр (если закон умножения не канонический).

   (a) Перенос: $\overline{x} = x + a\lambda$; $x, \overline{x}, \lambda \in \mathbb{R}^n$, λ — заданный вектор, $a \in \mathbb{R}$.

   (b) Растяжение: $\overline{x} = ax$ (однородное); $\overline{x}^i = a^{\mu_i} x^i$, $i = 1, \ldots, n$ (неоднородное). Здесь $x, \overline{x}, \mu \in \mathbb{R}^n$, μ — заданный вектор, $a > 0$.

   (c) Гиперболический поворот (преобразование Лоренца):
   $\overline{x} = x \operatorname{ch} a + y \operatorname{sh} a$, $\overline{y} = x \operatorname{sh} a + y \operatorname{ch} a$; $x, y, a \in \mathbb{R}$.

   (d) Преобразование Галилея $\overline{x} = x + ay$, $\overline{y} = y$; $x, y, a \in \mathbb{R}$.

   (e) Проективное преобразование: $\overline{x} = \frac{x}{1-ax}$, $\overline{y} = \frac{y}{1-ax}$; $x, y, a \in \mathbb{R}$.

   (f) $\overline{x} = x + a$, $\overline{y} = y + a^2$; $x, y, a \in \mathbb{R}$.

   (g) $\overline{x} = x + a^3$; $x, a \in \mathbb{R}$.

   (h) $\overline{x} = e^a(x \cos a - y \sin a)$, $\overline{y} = e^a(x \sin a + y \cos a)$; $x, y, a \in \mathbb{R}$.

   (i) $\overline{x} = a(x + y \ln a)$, $\overline{y} = ay$, $\overline{z} = az$; $x, y, z, a \in \mathbb{R}$.

   (j) $\overline{x} = \operatorname{tg}(a + \operatorname{arctg} x)$, $\overline{y} = (\sqrt{1 + x^2} \cos(a + \operatorname{arctg} x))^{-1} y$;
   $x, y, a \in \mathbb{R}$.

   (k) $\overline{x} = x + \ln a$, $\overline{y} = ay$, $\overline{z} = z e^{y(a-1)}$; $x, y, z, a \in \mathbb{R}$.

(l) $\overline{x} = x + a$, $\overline{y} = xa + a^2/2 + y$, $\overline{z} = z + a$; $x, y, z, a \in \mathbb{R}$.

2. Найти инфинитезимальные операторы для групп преобразований из упражнения 1. Решением уравнений (1.4) найти координаты, в которых операторы приводятся к операторам переноса.

3. Найти преобразования группы G_1 заданной оператором

(a) $(x+y)\partial_x + (y-x)\partial_y$;	(f) $x^2\partial_x + xy\partial_y$;
(b) $(1+x^2)\partial_x + xy\partial_y$;	(g) $x^2\partial_x + y^2\partial_y$;
(c) $(x^2+y^2)\partial_x + 2xy\partial_y$;	(h) $(1-x^2)\partial_x - xy\partial_y$;
(d) $x\partial_x + 2y\partial_y + 3z\partial_z$;	(i) $(x+y)\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$;
(e) $x\partial_y + \partial_z$;	(j) $\partial_x + x\partial_y + (x+y)\partial_z$.

4. Выполнить замену переменных

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ u = U\cos\theta - V\sin\theta,\ u = U\sin\theta + V\cos\theta$$

в дифференциальных операторах

(a) $x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v$;

(b) $y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v$;

(c) $\cos t\,\partial_t - (x\sin t - y\cos t)\partial_x - (x\cos t + y\sin t)\partial_y +$
$+ \big((u-y)\sin t + (v-x)\cos t\big)\partial_u - \big((u+y)\cos t - (v+x)\sin t\big)\partial_v$;

(d) $\sin t\,\partial_t + (x\cos t + y\sin t)\partial_x - (x\sin t - y\cos t)\partial_y +$
$+ \big((u-y)\cos t - (v-x)\sin t\big)\partial_u - \big((u+y)\sin t + (v+x)\cos t\big)\partial_v$.

5. Найти инварианты однопараметрической группы Ли заданной оператором

(a) $y\partial_x + x\partial_y$;
(b) $x\partial_x + 2y\partial_y - 3z\partial_z$;
(c) $(x-y)\partial_x + (x+y)\partial_y$;
(d) $(x^2-y)\partial_x + xy\partial_y$;
(e) $(x-z)\partial_x + (y-z)\partial_y + 2z\partial_z$;
(f) $y\partial_x - x\partial_y + z\partial_z$;
(g) $(1+x^2)\partial_x + xy\partial_y + z\partial_z$;
(h) $(y+z)\partial_x + (z+x)\partial_y + (x+y)\partial_z$;
(i) $z^2\partial_x + x\partial_y + \partial_z$;
(j) $\partial_x + y\partial_y + k_1 z\partial_z + k_2 v\partial_v$.

6. Проверить инвариантность многообразия $\mathcal{M}$ относительно преобразований группы G_1 заданной оператором X и записать многообразие $\mathcal{M}$ в инвариантах допускаемого оператора:

(a) $X = (y+xz)\partial_x + (yz-x)\partial_y + (1+z^2)\partial_z$, $\mathcal{M}$ — однополостный гиперболоид $x^2+y^2-z^2=1$;
(b) $X = y(\partial_x + \partial_y)$, $\mathcal{M}$ — прямая $y=0$;
(c) $X = (y-x)\partial_x + (x+y+z)\partial_y + (x-y)\partial_z$, $\mathcal{M}$ — прямая $\psi_1 = x+y+z=0$, $\psi_2 = 3x-y+z=0$;
(d) $X = (z^2-y^2)\partial_x + z\partial_y - y\partial_z$, многообразие $\mathcal{M}$ задано уравнением $x^2+y^2+z^2-2xyz+y^2z^2=0$;
(e) $X = x(y^2-z^2)\partial_x - y(z^2+x^2)\partial_y + z(x^2+y^2)\partial_z$, $\mathcal{M}$ — сфера $x^2+y^2+z^2=1$;
(f) $X = y\partial_x + x\partial_y + z\partial_z$, $\mathcal{M}$ — пара плоскостей $(x+y)^2-z^2=0$.

2 Группы преобразований и дифференциальные уравнения

2.1 Теория продолжения

Рассматривается пространство $Z = \mathbb{R}^n(x) \times \mathbb{R}^m(u) = X \times U$. Переменные разделяются на два типа: $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — независимые переменные, $u = (u^1, \ldots, u^m)$ — функции от x.

Определение 9. k-м продолжением пространства Z называется пространство

$$\underset{k}{Z} = X \times U \times \underset{1}{U} \times \ldots \times \underset{k}{U}.$$

Здесь $\underset{s}{U} = \left\{ \frac{\partial^s u^\alpha}{\partial x^{j_1} \ldots x^{j_s}} \right\}$ — пространство всех производных k-го порядка.

Координатами (независимыми переменными) в продолженном пространстве $\underset{k}{Z}$ являются переменные x, функции u, а также все производные $u^\alpha_{j_1 \cdots j_s}$ до k-го порядка включительно. Размерность продолженного пространства вычисляется по формуле

$$\nu_k = \dim \underset{k}{Z} = n + m\, C^n_{n+k}. \tag{2.1}$$

Пусть в пространстве Z действует локальная группа Ли G с оператором

$$X = \xi^i(x,u)\partial_{x^i} + \eta^\alpha(x,u)\partial_{u^\alpha}.$$

Действие группы G естественным образом распространяется на пространство $\underset{k}{Z}$. При этом, преобразования производных вычисляются по обычным правилам математического анализа. Совокупность преобразований группы G, а также соответствующих преобразований производных, удовлетворяет всем аксиомам локальной группы Ли.

Определение 10. Локальная группа Ли $\underset{k}{G}$, полученная распространением преобразований группы G на производные по обычным правилам замены переменных, действующая в пространстве $\underset{k}{Z}$, называется k-м продолжением локальной группы Ли G.

Продолженной группе $\underset{k}{G}$ отвечает оператор

$$\underset{k}{X} = \xi^i\partial_{x^i} + \eta^\alpha\partial_{u^\alpha} + \zeta^\alpha_i\partial_{u^\alpha_i} + \ldots + \zeta^\alpha_{i_1 \ldots i_k}\partial_{u^\alpha_{i_1 \ldots i_k}}.$$

Здесь и далее в этом параграфе (если не оговорено особо) индексы принимают следующие значения: $\alpha = 1, \ldots, m$; $i, i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n$, по повторяющимся индексам производится суммирование. Координаты продолженного оператора $\underset{k}{X}$ вычисляются по формуле

$$\zeta^\alpha_{j_1 \ldots j_s} = D_{j_1} \ldots D_{j_s}(\eta^\alpha - u^\alpha_i \xi^i) + \xi^i u^\alpha_{ij_1 \ldots j_s}, \tag{2.2}$$

D_i — оператор полной производной по i-й переменной:

$$D_i = \partial_{x^i} + u^\alpha_i\partial_{u^\alpha} + \ldots + u^\alpha_{ij_1 \cdots j_s}\partial_{u^\alpha_{j_1 \cdots j_s}} + \ldots .$$

Наряду с явной формулой (2.2) удобно пользоваться рекуррентной формулой для вычисления координат продолженного оператора:

$$\begin{aligned} &\zeta_i^\alpha = D_i\,\eta^\alpha - u_j^\alpha D_i\,\xi^j,\\ &\zeta_{ij_1\ldots j_s}^\alpha = D_i\,\zeta_{j_1\ldots j_s}^\alpha - u_{rj_1\ldots j_s}^\alpha D_i\,\xi^r. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Важно помнить, что во всех этих формулах координаты x, u, а также все производные $u_{j_1\cdots j_s}^\alpha$ должны рассматриваться как независимые переменные.

Операция продолжения обладает следующими свойствами.

- Линейность: для любых констант c_1, c_2 и для любых операторов X_1, X_2 справедливо $c_1X \underset{k}{+} c_2X_2 = c_1 \underset{k}{X_1} + c_2 \underset{k}{X_2}$.
- Инвариантность относительно замены координат: операции замены переменных $(x,u) \leftrightarrow (y,v)$ и продолжения перестановочны.
- Сохранение коммутатора: для любых операторов X_1 и X_2 справедливо $[X_1 \underset{k}{,} X_2] = [\underset{k}{X_1}, \underset{k}{X_2}]$ (операция коммутирования определяется в разделе 4).

Пример 6. Рассмотрим случай $n = m = 1$. Введем индивидуальные обозначения для независимой переменной x, функции y, первой и второй производной $p = y'$, $q = y''$. Оператор группы G_1 задается в виде $X = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y$. Продолженный до второго порядка оператор имеет вид

$$\underset{2}{X} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta_1\partial_p + \zeta_2\partial_q.$$

Координаты продолженного оператора ζ_1 и ζ_2 вычисляются в соответствии с (2.3) по формулам:

$$\begin{aligned} &\zeta_1 = D_x\,\eta - p\,D_x\,\xi,\\ &\zeta_2 = D_x\,\zeta_1 - q\,D_x\,\xi. \end{aligned} \tag{2.4}$$

В развернутом виде они таковы:

$$\begin{aligned} &\zeta_1 = \eta_x + p\,(\eta_y - \xi_x) - p^2\,\xi_y\\ &\zeta_2 = \eta_{xx} + p\,(2\eta_{xy} - \xi_{xx}) + p^2\,(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) -\\ &\qquad - p^3\,\xi_{yy} + q\,(\eta_y - 2\xi_x) - 3pq\,\xi_y. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Пример 7. Рассмотрим группу вращений на плоскости с оператором $X = y\partial_x - x\partial_y$. Построим второе продолжение оператора X в базовом пространстве $\mathbb{Z}$

а) $\mathbb{Z} = \mathbb{R}(x) \times \mathbb{R}(y)$, $y = y(x)$;

б) $\mathbb{Z} = \mathbb{R}^2(x, y) \times \mathbb{R}(u)$, $u = u(x, y)$.

Вариант а). Для продолжения оператора X воспользуемся формулами (2.5). Здесь $\xi = y$, $\eta = -x$. Имеем,

$$\zeta_1 = -1 - p^2, \quad \zeta_2 = -3pq.$$

Продолженный оператор имеет вид

$$\underset{2}{X} = y\partial_x - x\partial_y - (1 + p^2)\,\partial_p - 3pq\,\partial_q. \tag{2.6}$$

Вариант б). В этом случае $\xi^x = y$, $\xi^y = -x$, $\eta = 0$. Второе продолжение оператора X имеет вид

$$\underset{2}{X} = y\partial_x - x\partial_y + \zeta_x\partial_{u_x} + \zeta_y\partial_{u_y} + \zeta_{xx}\partial_{u_{xx}} + \zeta_{xy}\partial_{u_{xy}} + \zeta_{yy}\partial_{u_{yy}},$$

где величины ζ_x, ζ_y, ζ_{xx}, ζ_{xy}, ζ_{yy} вычисляются с использованием операторов

$$D_x = \partial_x + u_x\partial_u + u_{xx}\partial_{u_x} + u_{xy}\partial_{u_y}, \quad D_y = \partial_y + u_y\partial_u + u_{xy}\partial_{u_x} + u_{yy}\partial_{u_y}$$

по формулам (2.3):

$$\begin{aligned}
\zeta_x &= D_x\,\eta - u_x\,D_x\,\xi^x - u_y\,D_x\,\xi^y = u_y,\\
\zeta_y &= D_y\,\eta - u_x\,D_y\,\xi^x - u_y\,D_y\,\xi^y = -u_x,\\
\zeta_{xx} &= D_x\,\zeta_x - u_{xx}\,D_x\,\xi^x - u_{xy}\,D_x\,\xi^y = 2\,u_{xy},\\
\zeta_{xy} &= D_y\,\zeta_x - u_{xx}\,D_y\,\xi^x - u_{xy}\,D_y\,\xi^y = u_{yy} - u_{xx},\\
\zeta_{yy} &= D_y\,\zeta_y - u_{xy}\,D_y\,\xi^x - u_{yy}\,D_y\,\xi^y = -2\,u_{xy}.
\end{aligned}$$

В результате вычислений получаем продолженный оператор

$$\underset{2}{X} = y\partial_x - x\partial_y + u_y\partial_{u_x} - u_x\partial_{u_y} + 2u_{xy}\partial_{u_{xx}} + (u_{yy} - u_{xx})\partial_{u_{xy}} - 2u_{xy}\partial_{u_{yy}}.$$

Как и следовало ожидать, вид продолженного оператора существенно зависит от того, в каком пространстве производится продолжение.

2.2 Дифференциальные инварианты группы преобразований

Определение 11. Дифференциальным инвариантом группы G называется инвариант продолженного действия группы G, т.е. такая функция $F(x,\, u,\, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u})$, что для любого преобразования $T \in G$ выполнено

$$F(Tx,\, Tu,\, \underset{1}{T}\underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{T}\underset{k}{u}) = F(x,\, u,\, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}).$$

Порядок k самой старшей производной, входящей в инвариант F, называется порядком дифференциального инварианта. Дифференциальными инвариантами нулевого порядка являются конечные инварианты группы G. Дифференциальным инвариантным многообразием группы G называется многообразие в продолженном пространстве $\underset{k}{Z}$, инвариантное относительно продолженного действия группы G.

Для дифференциальных инвариантов и дифференциальных инвариантных многообразий справедливы критерии инвариантности (1.5), (1.7) в которых вместо оператора X следует использовать продолженный оператор $\underset{k}{X}$.

Рассматривается дифференциальное уравнение либо система дифференциальных уравнений вида

$$E: \quad F^{\sigma}(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}) = 0, \quad \sigma = 1, \ldots, s. \tag{2.7}$$

Уравнения (2.7) определяют систему дифференциальных уравнений k-го порядка для m искомых функций u от n независимых переменных x. С геометрической точки зрения система (2.7) задает некоторое многообразие в продолженном пространстве $\underset{k}{Z}$. Это многообразие, как и саму систему, мы будем обозначать символом E. В дальнейшем мы будем предполагать, что все функции F^{σ}, участвующие в определении системы E, являются достаточно гладкими и многообразие E в пространстве $\underset{k}{Z}$ задано уравнениями (2.7) регулярно.

Определение 12. Говорят, что система дифференциальных уравнений E допускает локальную группу непрерывных преобразований G если многообразие $E \subset \underset{k}{Z}$ является дифференциальным инвариантным многообразием группы G, т.е.

$$\underset{k}{X} E(x, u, \underset{1}{u}, ..., \underset{k}{u})|_E = 0.$$

В дальнейшем мы будем использовать также термин «допускаемый оператор», подразумевая под этим инфинитезимальный оператор допускаемой группы. Основное свойство допускаемой группы выражается следующей теоремой.

Теорема 7. *Группа G, допускаемая системой E, действует на множестве решений этой системы, т.е. множество решений системы E инвариантно относительно действия группы G.*

Замечание 1. Действие группы на множестве решений системы E можно положить в основу определения допускаемой группы. А именно, говорят, что система E допускает локальную группу непрерывных преобразований G если любое решение системы E под действием произвольного преобразования группы G вновь переходит в решение системы E. Эти два определения эквивалентны в случае систем, находящихся в инволюции (в частности, для систем типа Коши-Ковалевской, ортономных систем Рикье и прочих систем дифференциальных уравнений, для которых справедлива теорема локальной разрешимости).

2.3 Уравнения, допускающие заданную группу

Дана локальная группа непрерывных преобразований G_1, действующая в пространстве $Z = \mathbb{R}^n(x) \times \mathbb{R}^m(u)$. Требуется описать все дифференциальные уравнения до k-го порядка включительно, допускающие группу G_1. Для решения поставленной задачи требуется найти базис дифференциальных инвариантов группы G до k-го порядка включительно:

$$\begin{aligned}
&I^1(x,u), \dots, I^{n+m-1}(x,u),\\
&J^1(x,u,\underset{1}{u}), \dots, J^{n+m+nm-1}(x,u,\underset{1}{u}),\\
&\dots\\
&K^1(x,u,\underset{1}{u},\dots,\underset{k}{u}), \dots, K^{\nu_k-1}(x,u,\underset{1}{u},\dots,\underset{k}{u}).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Произвольные функциональные связи между инвариантами (2.8) определяют дифференциальные уравнения, допускающие группу G_1.

Замечание 2. Приведенный алгоритм показывает, что в определении дифференциального уравнения, допускающего заданную группу, имеется очень большой произвол. Обычно при формулировке подобных задач используют дополнительные ограничения на структуру искомого дифференциального уравнения.

Пример 8. Дадим описание всех однородных обыкновенных дифференциальных уравнений до 2-го порядка включительно. Для этого необходимо рассмотреть базовое пространство $Z = \mathbb{R}(x) \times \mathbb{R}(y)$. Здесь $n = m = 1$; $k = 1$ или 2. Однородность уравнения означает, что оно допускает некоторое преобразование растяжения, т.е. оператор вида $X = x\partial_x + \kappa y\partial_y$, $\kappa = \mathrm{const}$. Второе продолжение оператора X имеет вид (введены обозначения производных $p = y'$, $q = y''$)

$$\underset{2}{X} = x\partial_x + \kappa y\partial_y + (\kappa - 1)p\partial_p + (\kappa - 2)q\partial_q.$$

Базис дифференциальных инвариантов оператора $\underset{2}{X}$ в пространстве $\underset{2}{Z}$ выбирается следующим обрезом

$$\frac{y}{x^{\kappa}}, \quad \frac{p}{x^{\kappa-1}}, \quad \frac{q}{x^{\kappa-2}}. \tag{2.9}$$

Таким образом, любое однородное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка локально может быть представлено в виде $p\,x^{1-\kappa} = f(y\,x^{-\kappa})$ или

$$y' = x^{\kappa-1}f(y\,x^{-\kappa})$$

с некоторой функцией f и константой κ. Аналогично описываются однородные уравнения второго порядка:

$$y'' = x^{\kappa-2}g\left(\frac{y}{x^{\kappa}}, \frac{y'}{x^{\kappa-1}}\right).$$

2.4 Группы, допускаемые заданным уравнением

В пространстве $Z = \mathbb{R}^n(x) \times \mathbb{R}^m(u)$ задана система дифференциальных уравнений E (2.7). Требуется описать все однопараметрические группы G_1, допускаемые системой E. Предположим, что допускаемая группа G_1 порождается оператором X вида

$$X = \xi^i(x,u)\partial_{x^i} + \eta^\alpha(x,u)\partial_{u^\alpha}, \quad i = 1,\dots,n,\ \alpha = 1,\dots,m.$$

Критерий инвариантности дифференциального многообразия, определяемого уравнениями E имеет вид

$$\underset{k}{X}\,F^\sigma\,|_E = 0, \qquad \sigma = 1,\dots,s. \tag{2.10}$$

Равенства (2.10) следует рассматривать как уравнения на координаты $\xi^i(x,u)$, $\eta^\alpha(x,u)$ при заданных функциях F^σ.

Алгоритм нахождения допускаемой группы:

- Продолжение оператора X на производные до k-го порядка по формулам (2.3)

$$\underset{k}{X} = \xi^i \partial_{x^i} + \eta^\alpha \partial_{u^\alpha} + \zeta_i^\alpha \partial_{u_i^\alpha} + \ldots + \zeta_{i_1 \ldots i_k}^\alpha \partial_{u_{i_1 \ldots i_k}^\alpha}.$$

- Действие оператора $\underset{k}{X}$ на уравнения системы E. В результате получается система из s уравнений, содержащая функции $\xi^i(x,u)$, $\eta^\alpha(x,u)$, их производные до k-го порядка включительно, а также переменные x, u, $\underset{1}{u}$, $\ldots$, $\underset{k}{u}$.

- Переход на многообразие, определяемое системой E. Для этого система E разрешается относительно некоторых s производных из набора $\{\underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}\}$. Все остальные производные далее будем называть свободными. Найденные выражения подставляются в уравнения, полученные на предыдущем шаге. Построенная таким образом система уравнений на координаты инфинитезимального оператора X должна быть выполнена тождественно по оставшимся $\nu_k - s$ переменным пространства $\underset{k}{Z}$.

- Расщепление уравнений, найденный в результате выполнения предыдущего шага, относительно свободных производных. При этом учитывается, что координаты $\xi^i(x,u)$, $\eta^\alpha(x,u)$ зависят только от x и u и не зависят от производных $\underset{j}{u}$. Расщепление обычно осуществляется разложением левых частей уравнений в ряд Тейлора по свободным производным в окрестности какой-нибудь точки и приравниванием нулю коэффициентов при различных мономах, составленных из производных. Результатом расщепления является переопределенная система дифференциальных уравнений для координат оператора X.

Определение 13. Полученная в результате выполнения описанного алгоритма система дифференциальных уравнений для координат инфинитезимального оператора X носит название системы определяющих уравнений.

Основными свойствами системы определяющих уравнений являются линейность и однородность. Благодаря этому множество ее решений образует линейное пространство L. Обозначим $r = \dim L$. Число r может принимать значения 0 (допускаемая группа состоит только из тождественного преобразования), $0 < \kappa < \infty$ (допускается κ однопараметрических групп преобразований), ∞ (допускается бесконечно много преобразований).

Пример 9. Отыскать все однопараметрические непрерывные группы преобразований, допускаемые уравнением

$$E: \quad y' = f(x,y) \tag{2.11}$$

Допускаемый оператор ищется в виде $X = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y$. Продолжение оператора вычисляется в соответствии с формулами (2.4), (2.5). Действие продолженного оператора на уравнение и переход на многообразие, задаваемое уравнением (2.11), дает

$$\underset{1}{X}\left(y' - f(x,y)\right)|_E = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_x + (\eta_y - \xi_x)f - \xi_y f^2 - \xi f_x - \eta f_y = 0. \tag{2.12}$$

Следующий этап алгоритма нахождения допускаемой группы — расщепление уравнения (2.12) — в данном случае отсутствует так как уравнение (2.12) не содержит свободных производных. Поэтому условием инвариантности уравнения (2.11) относительно оператора X является само уравнение (2.12).

Допускаемая уравнением группа преобразований бесконечномерна. Прямой проверкой легко показать, что уравнение (2.11) допускает оператор вида

$$Y = \varphi(x,y)(\partial_x + f(x,y)\partial_y) \tag{2.13}$$

с произвольной функцией $\varphi(x,y)$. Однако, нахождение других, нетривиальных допускаемых операторов, оказывается эквивалентно решению самого уравнения (2.11). Действительно, вычитанием подходящего оператора вида (2.13), в любом операторе X можно сделать $\xi = 0$. Уравнение (2.12) становится таким: $\eta_x + f\eta_y = \eta f_y$. Его характеристическое уравнение содержит уравнение (2.11). Наоборот, знание нетривиального допускаемого оператора вида $Y = \beta(x,y)\partial_y$ позволяет проинтегрировать уравнение (2.11) путем построения интегрируещего множителя: функции $\mu(x,y)$, удовлетворяющей уравнению

$$\mu_x + (f\mu)_y = 0. \tag{2.14}$$

Действительно, если взять $\mu = 1/\beta$, то условие инвариантности уравнения относительно оператора $Y = \beta(x,y)\partial_y$ совпадет с (2.14). Для оператора $X = \xi\partial_x + \eta\partial_y$, допускаемого уравнением (2.11), интегрирующим множителем будет функция

$$\mu(x,y) = \frac{1}{\eta - \xi f}$$

Пример 10. В ряде случаев «увидеть» преобразование допускаемое дифференциальным уравнением достаточно легко. Рассмотрим семейство уравнений второго порядка с произвольной функцией f:

$$y'' + f(x)y = 0. \tag{2.15}$$

Очевидно, что это уравнение инвариантно относительно растяжения переменного y, а значит допускает оператор $X = y\partial_y$. С использованием этого преобразования можно понизить порядок уравнения. Оператор X «выпрямляется» заменой переменной $t = \ln y$ и принимает вид $X' = \partial_t$. Выполним замену переменных в уравнении (2.15), считая $t = \ln y$ новой независимой переменной, а $u = x$ – искомой функцией. В результате получаем уравнение второго порядка, в которое независимая переменная не входит в явном виде:

$$u'' - u' - (u')^3 f(u) = 0.$$

Далее известным приемом достигается понижение порядка уравнения. Действительно, полагая $u' = p(u)$ приходим к уравнению первого порядка

$$\frac{dp}{du} - f(u)p^2 - 1 = 0.$$

Пример 11. Рассмотрим задачу о нахождении симметрий обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$. Реализуя приведенный выше алгоритм, вычислим второе продолжение дифференциального оператора $X = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$. Согласно (2.3) оно имеет вид

$$\underset{2}{X} = X + \zeta_1\partial_{y_1} + \zeta_2\partial_{y_2},$$

где

$$\zeta_1 = D\eta - y_1 D\xi, \quad \zeta_2 = D\zeta_1 - y_2 D\xi,$$
$$D = \partial_x + y_1\partial_y + y_2\partial_{y_1}, \quad y_1 = y', \quad y_2 = y''.$$

В результате непосредственные вычисления находим величины ζ_1 и ζ_2:

$$\zeta_1 = \eta_x + y_1((\eta_y - \xi_x) - y_1^2\xi_y,$$
$$\zeta_2 = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y_1 + (\eta_y - 2\xi_x)y_2 +$$
$$+ (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y_1^2 - 3y_1y_2\xi_y - y_1^3\xi_{yy}.$$

Далее воспользуемся критерием инвариантности (2.10), который в данном случае можно записать так:

$$\left(\zeta_2 - \zeta_1\frac{\partial f}{\partial y_1} - \xi\frac{\partial f}{\partial x} - \eta\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Bigg|_E = 0.$$

Принимая во внимание $y_2 = f(x, y, y_1)$ и используя полученные выше выражения для ζ_1 и ζ_1, имеем

$$\begin{aligned}&\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y_1 + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y_1^2 - \xi_{yy}y_1^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y_1)f- \\ &-(\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y_1 - \xi_y y_1^2)f_{y_1} - \xi f_x - \eta f_y = 0.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Для расщепления уравнения (2.16) по степеням y_1 необходимо задать функцию f переменных x, y и y_1. В данном примере положим

$$f(x, y, y_1) = x^\nu y^{-2},$$

где ν — произвольный вещественный параметр. Таким образом, наша задача состоит в нахождении всех однопараметрических непрерывных групп преобразований, допускаемых уравнением

$$y'' - x^\nu y^{-2} = 0. \tag{2.17}$$

Подставим в выражение (2.16) значения $f = x^\nu y^{-2}$, $f_x = \nu x^{\nu-1}y^{-2}$, $f_y = -2x^\nu y^{-3}$, $f_{y_1} = 0$ и пользуясь независимостью функций ξ, η от переменного y_1 проведем расщепление уравнения (2.16):

$$y_1^3: \quad \xi_{yy} = 0, \tag{2.18}$$

$$y_1^2: \quad \eta_{yy} - 2\xi_{xy} = 0, \tag{2.19}$$

$$y_1^1: \quad 2\eta_{xy} - \xi_{xx} - 3x^\nu y^{-2}\xi_y = 0, \tag{2.20}$$

$$y_1^0: \quad \eta_{xx} + (\eta_y - 2\xi_x)x^\nu y^{-2} - \nu x^{\nu-1}y^{-2}\xi + 2x^\nu y^{-3}\eta = 0. \tag{2.21}$$

В результате интегрирования уравнений (2.18), (2.19) находим

$$\xi(x, y) = A(x)y + B(x), \quad \eta(x, y) = A'(x)y^2 + M(x)y + N(x),$$

где $A(x)$, $B(x)$, $M(x)$ и $N(x)$ — произвольные функции. Воспользуемся приведенными выше выражениями ξ, η и уравнением (2.20). Проводя расщепление в (2.20) по переменной y выясняем, что $A(x) \equiv 0$, $M(x) = 2^{-1}B'(x) + b$, $b = \mathrm{const}$. Использование последнего соотношения (2.21) системы определяющих уравнений дает $B'''(x) = 0$, $N(x) \equiv 0$, $B'(x) = 6b - 2\nu x^{-1}B(x)$. Теперь нетрудно заметить, что в случае $\nu \neq 0$

$$B(x) = ax^2 + cx, \quad a(1 + \nu) = 0, \quad b = c(1 + 2\nu)/6,$$

a, c — постоянные.

При $\nu \neq -1$ решение определяющих уравнений имеет вид

$$\xi = cx, \quad \eta = 3^{-1}(2+\nu)cy.$$

Этому преобразованию растяжения соответствует оператор

$$\nu \neq 0,\, \nu \neq -1: \qquad X_1 = x\partial_x + \frac{2+\nu}{3}y\partial_y. \tag{2.22}$$

В случае $\nu = -1$ решение определяющих уравнений зависит от двух произвольных постоянных:

$$\xi = ax^2 + cx, \quad \eta = (ax + c/2)y.$$

Соответствующие этому преобразованию базисные инфинитезимальные операторы имеют вид

$$\nu = -1: \qquad X_1 = x^2\partial_x + xy\partial_y, \quad X_2 = x\partial_x + \frac{y}{2}\partial_y \tag{2.23}$$

(X_1 — проективный оператор, X_2 — растяжение).

При $\nu = 0$ функция $B(x) = 6bx + d$ (b, d — постоянные). Поэтому решение определяющих уравнений (2.18)—(2.21) дается формулами $\xi = 6bx + d$, $\eta = 4by$ и

$$\nu = 0: \qquad X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \frac{3}{2}x\partial_x + y\partial_y \tag{2.24}$$

(X_1 — перенос, X_2 — растяжение).

Таким образом, в рассмотренном примере проведена *групповая классификация* обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (2.17) по параметру ν. В случае $\nu = 0$ и $\nu = -1$ уравнение допускает двумерные алгебры Ли L_2 операторов (2.24) и (2.23), в общем случае имеется лишь одна симметрия (2.22). Определение алгебры Ли операторов будет дано в следующем разделе.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка, допускающих алгебру Ли L_2, справедлива следующая теорема.

Теорема 8. Базис алгебры Ли L_2 подходящей заменой переменных может быть приведен к одному из следующих видов:
1) $X_1 = \partial_x,\;\; X_2 = \partial_y$;
2) $X_1 = \partial_y,\;\; X_2 = x\partial_y$;
3) $X_1 = \partial_y,\;\; X_2 = x\partial_x + y\partial_y$;
4) $X_1 = \partial_y,\;\; X_2 = y\partial_y$.
Соответствующие переменные x, y называются каноническими переменными.

Для уравнений вида $y'' = f(x, y, y')$ допускающих алгебру Ли L_r известно, что при $r = 1$ порядок уравнения можно понизить, а при $r \geq 2$ уравнение можно проинтегрировать. Проиллюстрируем это утверждение на примере уравнения (2.17) в случае $\nu = -1$, когда уравнение допускает двумерную алгебру Ли операторов (2.23) (легко видеть, что $[X_1, X_2] = X_1$).

Замена переменных

$$t = y/x, \quad u = -1/x \tag{2.25}$$

приводит операторы (2.23) к каноническому виду. Действительно, перепишем операторы в новых переменных. Согласно (1.3) имеем

$$X_1' = X_1(y/x)\partial_t + X_1(-1/x)\partial_u = \partial_u,$$
$$X_2' = X_2(y/x)\partial_t + X_2(-1/x)\partial_u = (2/3)t\partial_t + u\partial_u.$$

Выполним замену переменных в уравнении (2.17) при $\nu = -1$

$$y' = \frac{y_t + y_u u'(t)}{x_t + x_u u'(t)} = t - \frac{u}{u'},$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{x_t + x_u u'(t)}\frac{d}{dt}\left(t - \frac{u}{u'}\right) = \left(\frac{u}{u'}\right)^3 u''.$$

Легко видеть, что в переменных (t, u) рассматриваемое уравнение имеет вид

$$u'' = -t^{-2}(u')^3.$$

Подстановкой $v = u'$ оно сводится к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными: $v' = -t^{-2}v^3$. В результате интегрирования получаем

$$v(t) = \pm\sqrt{\frac{t}{Ct-2}} \quad (C = \mathrm{const}).$$

Решение уравнения $u' = v$ дается также в квадратурах. Возвращаясь к переменным (x, y) получим решение исходного уравнения

$$y'' = x^{-1}y^{-2}.$$

В случае $C = 0$ решение в неявном виде записывается следующим образом:

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{y}{x}\right)^{3/2} - \frac{1}{x} = \mathrm{const}.$$

При $C \neq 0$ имеем

$$\pm C^{-3/2}\sqrt{\frac{x}{y}}\sqrt{\frac{y}{Cy-2x}}\left[\sqrt{\frac{Cy}{x}}\left(\frac{Cy}{x}-2\right)+\right.$$
$$\left.+2\sqrt{\frac{Cy}{x}-2}\times\ln\left(2\sqrt{\frac{Cy}{x}}+2\sqrt{\frac{Cy}{x}-2}\right)\right]+\frac{1}{x} = \mathrm{const}.$$

Более подробно методы интегрирования ОДУ рассматриваются в разделе 7.

Приведем еще один пример вычисления группы допускаемых преобразований для уравнения в частных производных. Принципиальных отличий от разобранного выше примера нет, но объем вычислений заметно возрастает с увеличением числа независимых и зависимых переменных.

Пример 12. Найдем группу преобразований допускаемых уравнением Бюргерса

$$E: \quad u_t + uu_x - u_{xx} = 0. \tag{2.26}$$

В данном случае базовое пространство $\mathbb{Z} = \mathbb{R}^2(t, x) \times \mathbb{R}(u)$ и оператор группы имеет вид

$$X = \xi^t(t, x, u)\partial_t + \xi^x(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u$$

Так как уравнение (2.26) второго порядка, необходимо выписать второе продолжение оператора X

$$\underset{2}{X} = X + \zeta^{u_t}\partial_{u_t} + \zeta^{u_x}\partial_{u_x} + \zeta^{u_{tt}}\partial_{u_{tt}} + \zeta^{u_{tx}}\partial_{u_{tx}} + \zeta^{u_{xx}}\partial_{u_{xx}}.$$

Согласно (2.10) подействуем этим оператором на уравнение (2.26) и перейдем на множество решений уравнения:

$$\begin{aligned} &\zeta^{u_t} + u\zeta^{u_x} + u_x\eta - \zeta^{u_{xx}} = 0,\\ &u_{xx} = u_t + uu_x. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Определим дифференциальные операторы

$$D_t = \partial_t + u_t\partial_u + u_{tt}\partial_{u_t} + u_{tx}\partial_{u_x}, \quad D_x = \partial_x + u_x\partial_u + u_{tx}\partial_{u_t} + u_{xx}\partial_{u_x}$$

и в соответствии с формулами (2.3) выпишем нужные нам координаты продолженного оператора

$$\begin{aligned} \zeta^{u_t} &= D_t\eta - u_tD_t\xi^t - u_xD_t\xi^x =\\ &\quad \eta_t + u_t(\eta_u - \xi^t_t) - u_x\xi^x_t - u_t^2\xi^t_u - u_tu_x\xi^x_u,\\ \zeta^{u_x} &= D_x\eta - u_tD_x\xi^t - u_xD_x\xi^x =\\ &\quad \eta_x - u_t\xi^t_x + u_x(\eta_u - \xi^x_x) - u_tu_x\xi^t_u - u_x^2\xi^x_u,\\ \zeta^{u_{xx}} &= D_x\zeta^{u_x} - u_{tx}D_x\xi^t - u_{xx}D_x\xi^x =\\ &= \eta_{xx} + u_t(\eta_u - 2\xi^x_x - \xi^t_{xx}) + u_x(2\eta_{xu} - \xi^x_{xx} + u\eta_u - 2u\xi^x_x) -\\ &\quad - 2u_{tx}\xi^t_x - u_t^2\xi^t_u + u_x^2(\eta_{uu} - 2\xi^x_{xu} - 3u\xi^x_u) -\\ &\quad - u_tu_x(2\xi^t_{xu} + 3\xi^x_u + u\xi^t_u) - 2u_xu_{tx}\xi^t_u - u_tu_x^2\xi^t_{uu} - u_x^3\xi^x_{uu}. \end{aligned}$$

При вычислении $\zeta^{u_{xx}}$ использовано второе уравнение (2.27). Подставим выражения для ζ^{u_t}, ζ^{u_x}, $\zeta^{u_{xx}}$ в первое уравнение (2.27) и учитывая, что искомые функции ξ^t, ξ^x, η зависят лишь от t, x и u, проведем его расщепление по переменным

u_t, u_x, u_{tx} и др. В результате получим следующую систему определяющих уравнений:

$$1: \quad \eta_t + u\eta_x - \eta_{xx} = 0, \tag{2.28}$$
$$u_t: \quad 2\xi^x_x + \xi^t_{xx} - \xi^t_t - u\xi^t_x = 0, \tag{2.29}$$
$$u_x: \quad \eta - 2\eta_{xu} + \xi^x_{xx} + u\xi^x_x - \xi^x_t = 0, \tag{2.30}$$
$$u_x^2: \quad 2u\xi^x_u + 2\xi^x_{xu} - \eta_{uu} = 0, \tag{2.31}$$
$$u_{tx}: \quad 2\xi^t_x = 0, \tag{2.32}$$
$$u_t u_x: \quad 2(\xi^t_{xu} + \xi^x_u) = 0, \tag{2.33}$$
$$u_x u_{tx}: \quad 2\xi^t_u = 0, \tag{2.34}$$
$$u_t u_x^2: \quad \xi^t_{uu} = 0, \tag{2.35}$$
$$u_x^3: \quad \xi^x_{uu} = 0. \tag{2.36}$$

Из уравнений (2.32)–(2.36) следует $\xi^t = \xi^t(t)$, $\xi^x = \xi^x(t, x)$. Тогда уравнение (2.31) упрощается и принимает вид $\eta_{uu} = 0$. Следовательно, функция η линейна по переменной u: $\eta = b_1(t, x)u + b_2(t, x)$. В результате подстановки выражения для η в (2.28) и расщепления по переменной u получаем $b_2(t, x) = C_1 x + C_2$, $b_1(t, x) = C_3 - C_1 t$. Подстановка функции $\eta = C_1 x + C_2 + (C_3 - C_1 t)u$ в (2.30) позволяет определить $\xi^x = (C_1 t - C_3)x + C_2 t + C_4$. Из уравнения (2.29), принимающего вид $2\xi^x_x - \xi^t_t = 0$, находим ξ^t. Таким образом, решение системы определяющих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \xi^t &= C_1 t^2 - 2C_3 t + C_5, \\ \xi^x &= (C_1 t - C_3)x + C_2 t + C_4, \\ \eta &= C_1 x + C_2 + (C_3 - C_1 t)u, \end{aligned} \tag{2.37}$$

где C_i — постоянные. Формулы (2.37) задают набор базисных допускаемых операторов

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = t\partial_x + \partial_u,$$
$$X_4 = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u, \quad X_5 = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u$$

образующих алгебру Ли L_5. Конечные преобразования, соответствующие этим операторам, определяют 5-параметрическую группу преобразований G_5, допускаемую уравнениями (2.26).

2.5 «Размножение» решений дифференциальных уравнений

В теореме 7 раздела 2.2 отмечен следующий важный факт: *допускаемая группа действует на множестве решений дифференциального уравнения.* Это означает, что под действием любого допускаемого преобразования решение дифференциального уравнения снова переходит в решение этого же уравнения. Данное свойство позволяет использовать преобразования допускаемой группы для производства новых решений из уже известных. Продемонстрируем применение этого подхода на следующих примерах.

Пример 13. Уравнения Навье-Стокса динамики вязкой жидкости

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \nu\triangle\mathbf{u}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \tag{2.38}$$

допускают бесконечномерную группу преобразований. Ее конечномерная часть порождается переносом по времени, тремя вращениями и растяжением. Бесконечномерной части допускаемой группы соответствует алгебра Ли операторов

$$\langle\varphi^i(t)\rangle_i = \varphi^i\partial_{x^i} + \dot\varphi^i\partial_{u^i} - x^i\ddot\varphi^i\partial_p,\ (i=1,2,3);\quad \langle\sigma\rangle_p = \sigma(t)\partial_p \tag{2.39}$$

(по индексу i суммирования нет!). Функции $\varphi^i(t)$ и $\sigma(t)$ произвольны. Операторы $\langle\varphi^i\rangle_i$ порождают обобщенные преобразования Галилея

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x}^i = x^i + \varphi^i(t), \quad \overline{u}^i = u^i + \dot\varphi^i, \quad \overline{p} = p - x^i\varphi^i(t) - \frac{1}{2}\varphi^i\ddot\varphi^i. \tag{2.40}$$

Они означают, что уравнения Навье-Стокса сохраняются при переходе в неинерциальную систему координат, движущуюся прямолинейно с ненулевым ускорением. Возникающие при этом силы инерции компенсируются за счет соответствующей нормировки давления. Данное интересное свойство, говорит, в частности, о неединственности решения задачи Коши для уравнений Навье-Стокса. Действительно, рассмотрим решение уравнений (2.38) $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t,\mathbf{x})$, $p = p(t,\mathbf{x})$, отвечающее некоторым начальным данным

$$t = 0: \quad \mathbf{u}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad p(0,\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}). \tag{2.41}$$

Подействуем на это решение преобразованием (2.40) с некоторой функцией $\varphi^i(t)$, удовлетворяющей условиям

$$\varphi^i(0) = 0, \quad \dot\varphi^i(0) = 0.$$

Полученное новое решение уравнений Навье-Стокса $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}(t, \overline{\mathbf{x}})$, $p = \overline{p}(t, \overline{\mathbf{x}})$ удовлетворяет тем же начальным данным (2.41), но, очевидно, отличается от исходного. Отмеченная неединственность решения снимается если помимо начальных данных задавать также и граничные условия.

Пример 14. Уравнения движения идеального одноатомного газа (показатель политропы $\gamma = 5/3$) имеют вид

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho^{5/3}}\right) = 0. \tag{2.42}$$

Здесь $\mathbf{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление, $d/dt = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ — оператор полной производной, операторы ∇ и div вычисляются по переменным $\mathbf{x} = (x, y, z)$ — декартовым координатам.

Уравнения (2.42), кроме очевидных преобразований (переносы, галилеевы переносы, растяжения, вращения), допускают нетривиальное проективное преобразование:

$$\begin{aligned} &\bar{t} = \tfrac{t}{1-at}, \quad \overline{\mathbf{x}} = \tfrac{\mathbf{x}}{1-at}, \\ &\overline{\mathbf{u}} = (1-at)\mathbf{u} + a\mathbf{x}, \quad \overline{\rho} = (1-at)^3\rho, \quad \overline{p} = (1-at)^5 p. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Здесь a — произвольная постоянная с размерностью обратно пропорциональной времени (параметр группы преобразований). Соответствующий допускаемый уравнениями (2.42) оператор имеет вид

$$X = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y + tz\partial_z + (x - tu)\partial_u + \\ (y - tv)\partial_v + (z - tw)\partial_w - 3t\rho\partial_\rho - 5tp\partial_p.$$

Обратная к (2.43) замена переменных дается формулами

$$\begin{aligned} &t = \tfrac{\bar{t}}{1+a\bar{t}}, \quad \mathbf{x} = \tfrac{\overline{\mathbf{x}}}{1+a\bar{t}}, \\ &\mathbf{u} = (1+a\bar{t})\overline{\mathbf{u}} - a\overline{\mathbf{x}}, \quad \rho = (1+a\bar{t})^3\overline{\rho}, \quad p = (1+a\bar{t})^5\overline{p}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Утверждение. *Если совокупность функций*

$$\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}), \quad \rho = \overline{\rho}(t, \mathbf{x}), \quad p = \overline{p}(t, \mathbf{x})$$

удовлетворяет системе уравнений (2.42), то той же системе уравнений удовлетворяет совокупность функций

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = (1+a\bar{t})\overline{\mathbf{u}}(\bar{t},\overline{\mathbf{x}}) - a\overline{\mathbf{x}}, \quad \rho(t,\mathbf{x}) = (1+a\bar{t})^3\overline{\rho}(\bar{t},\overline{\mathbf{x}}), \\ &p(t,\mathbf{x}) = (1+a\bar{t})^5\overline{p}(\bar{t},\overline{\mathbf{x}}), \end{aligned} \tag{2.45}$$

где

$$\bar{t} = \frac{t}{1-at}, \quad \overline{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{1-at}.$$

Убедиться в справедливости данного утверждения можно и непосредственными вычислениями с использованием вытекающих из (2.43) и (2.44) соотношений:

$$1-at = \frac{1}{1+a\bar{t}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = (1+a\bar{t})\left(\frac{\partial}{\partial\bar{t}} + a\mathbf{x}\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{\mathbf{x}}}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} = (1+a\bar{t})\frac{\partial}{\partial\overline{\mathbf{x}}},$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} = (1+a\bar{t})^2\frac{\partial}{\partial\bar{t}} + \overline{\mathbf{u}}\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{\mathbf{x}}} = (1+a\bar{t})^2\frac{d}{d\bar{t}}.$$

Используем рассматриваемое преобразование, относительно которого уравнения (2.42) инвариантны, для «размножения» решений. Очевидно, что функции

$$\mathbf{u} = 0, \quad \rho = \rho_0(\mathbf{x}) > 0, \quad p = p_0 = \mathrm{const} > 0,$$

отвечающие состоянию покоя, являются решением системы уравнений (2.42). Тогда, согласно (2.45), функции

$$\mathbf{u} = -\frac{a\mathbf{x}}{1-at}, \quad \rho = \frac{1}{(1-at)^3}\,\rho_0\left(\frac{\mathbf{x}}{1-at}\right), \quad p = \frac{p_0}{(1-at)^5} \tag{2.46}$$

также являются решением уравнений (2.42).

В этом решении вектор скорости пропорционален радиусу-вектору; давление p зависит только от времени. Решение (2.46) определено для всех $t \geq 0$, если $a < 0$ и для $0 \leq t < 1/a$, если $a > 0$. Причем в первом случае оно описывает однородное расширение газа, а во втором — сжатие. Траектории движения частиц, определяемые из системы ОДУ

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{x}_0$$

имеют вид

$$\mathbf{x} = (1 - at)\mathbf{x}_0. \tag{2.47}$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ частицы газа образовывали окружность радиуса $|\mathbf{x}_0|$, тогда они образуют окружность радиуса $|(1-at)\mathbf{x}_0|$ и в последующие моменты времени $t > 0$. Очевидно, что при отрицательном параметре a происходит расширение, а при положительном — сжатие. Из уравнений (2.47) также следует, что каждая частица движется с постоянной скоростью, пропорциональной вектору $\mathbf{x}_0$, задающему начальное положение частицы.

Рассматриваемое решение обладает свойством однородности: поля скоростей частиц относительно системы координат, связанной с любой движущейся материальной частицей, одинаковы. Действительно, перейдем в систему координат связанную с частицей $\mathbf{x}_*$. При этом координаты и скорости преобразуются по формулам

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_*, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_* \quad \left(\mathbf{u}_* = -\frac{a\mathbf{x}_*}{1 - at}\right).$$

Тогда, как и утверждалось, поле скоростей в решении (2.46) имеет вид

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{a\mathbf{x}_1}{1 - at}.$$

Пример 15. Рассмотрим уравнения мелкой воды с вращением (упражнение 8 в разделе 2.6). Далее удобно использовать полярные координаты (r, θ), радиальную U и окружную V компоненты вектора скорости, которые связаны с координатами (x, y) и скоростями (u, v) следующими соотношениями

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad u = U\cos\theta - V\sin\theta, \quad v = U\sin\theta + V\cos\theta.$$

В полярных координатах система уравнений вращающейся мелкой воды имеет вид

$$\begin{aligned} &U_t + UU_r + \tfrac{1}{r}VU_\theta - \tfrac{V^2}{r} - fV + gh_r = 0, \\ &V_t + UV_r + \tfrac{1}{r}VV_\theta + \tfrac{UV}{r} + fU + \tfrac{g}{r}h_\theta = 0, \\ &h_t + \tfrac{1}{r}(rUh)_r + \tfrac{1}{r}(Vh)_\theta = 0; \end{aligned} \tag{2.48}$$

при этом допускаемый оператор X_9 записывается следующим образом

$$\begin{gathered}\hat{X}_9 = \sin(ft)\partial_t + \tfrac{fr}{2}\cos(ft)\partial_r - \tfrac{f}{2}\sin(ft)\partial_\theta - \\ - \tfrac{f}{2}\big(U\cos(ft) + fr\sin(ft)\big)\partial_U - \tfrac{f}{2}(V + fr)\cos(ft)\partial_V - fh\cos(ft)\partial_h.\end{gathered}$$

Интегрирование уравнений Ли

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial\bar{t}}{\partial a} = \sin(f\bar{t}), \quad \tfrac{\partial\bar{r}}{\partial a} = \tfrac{f\bar{r}}{2}\cos(f\bar{t}), \quad \tfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial a} = -\tfrac{f}{2}\sin(f\bar{t}),\\ &\tfrac{\partial\overline{U}}{\partial a} = -\tfrac{f}{2}(\overline{U}\cos(f\bar{t}) + f\bar{r}\sin(f\bar{t})),\\ &\tfrac{\partial\overline{V}}{\partial a} = \tfrac{f}{2}(\overline{V} + f\bar{r})\cos(f\bar{t}), \tfrac{\partial\bar{h}}{\partial a} = -f\bar{h}\cos(f\bar{t})\end{aligned} \tag{2.49}$$

с начальными условиями

$$\bar{t}|_{a=0} = t,\ \bar{r}|_{a=0} = r,\ \bar{\theta}|_{a=0} = \theta,\ \overline{U}|_{a=0} = U,\ \overline{V}|_{a=0} = V,\ \bar{h}|_{a=0} = h \tag{2.50}$$

дает следующий результат ($t \neq (2n+1)\pi/f$, n — целое число):

$$\begin{aligned}&\bar{t} = \tfrac{2}{f}\arctan(\alpha\tau) + \chi(t), \quad \bar{r} = r\sqrt{\tfrac{\alpha(1+\tau^2)}{1+\alpha^2\tau^2}},\\ &\bar{\theta} = \theta + \arctan(\tau) - \arctan(\alpha\tau),\\ &\overline{U} = \left(U - \tfrac{fr}{2}\tfrac{(\alpha^2-1)\tau}{1+\alpha^2\tau^2}\right)\sqrt{\tfrac{1+\alpha^2\tau^2}{\alpha(1+\tau^2)}},\\ &\overline{V} = \left(V + \tfrac{fr}{2}\tfrac{(\alpha-1)(\alpha\tau^2-1)}{1+\alpha^2\tau^2}\right)\sqrt{\tfrac{1+\alpha^2\tau^2}{\alpha(1+\tau^2)}}, \quad \bar{h} = h\tfrac{1+\alpha^2\tau^2}{\alpha(1+\tau^2)}.\end{aligned} \tag{2.51}$$

Здесь $\tau = \tan(\frac{ft}{2})$, $\alpha = \exp(af) > 0$, $\chi(t) = 2\pi k/f$, где k — целое число, такое что заданное начальными условиями (2.50) значение t принадлежит интервалу $((2k-1)\pi/f, (2k+1)\pi/f)$.

В случае $t = (2n+1)\pi/f$, решение уравнений (2.49), (2.50) имеет вид

$$\begin{aligned}&\bar{t} = t,\ \bar{r} = \tfrac{r}{\sqrt{\alpha}},\ \bar{\theta} = \theta,\\ &\overline{U} = U\sqrt{\alpha},\ \overline{V} = \left(V + \tfrac{fr(\alpha-1)}{2\alpha}\right)\sqrt{\alpha},\ \bar{h} = \alpha h.\end{aligned} \tag{2.52}$$

Функции, определенные формулами (2.51) и (2.52) являются непрерывно дифференцируемыми по переменной α.

Покажем, что заданные формулами (2.51) функции в точках $t_* = (2n+1)\pi/f$ можно по непрерывности доопределить согласно (2.52), при этом полученное отображение будет непрерывно дифференцируемым по всем аргументам. Зафиксируем $\alpha > 0$ и рассмотрим односторонние пределы в (2.51) при $t \to t_* \mp 0$ (в этом случае переменная $\tau(t) = \tan\left(\frac{ft}{2}\right) \to \pm\infty$). Функция $\frac{f}{2}\arctan(\alpha\tau(t))$, разрывная в точке $t = t_*$, имеет односторонние пределы равные π/f слева и $-\pi/f$ справа от разрыва. Функция $\chi(t)$ является кусочно-постоянной и принимает значения $2\pi n/f$ слева и $2\pi(n+1)/f$ справа от точки $t = t_*$. Поэтому при $t \to t_* \mp 0$ функция $\overline{t}(t,\alpha) = \frac{2}{f}\arctan(\alpha\tau) + \chi(t)$ имеет односторонние пределы, которые совпадают и равны $t_* = (2n+1)\pi/f$, что согласуется с первой формулой (2.52). Вычисляя односторонние пределы для остальных функций в формулах (2.51), убеждаемся в их совпадении с соответствующими выражениями в (2.52). Таким образом, доопределенные в точках $t = t_*$ функции (2.51) являются непрерывными по всем аргументам.

Зависимость функций $\overline{r}$, $\overline{\theta}$, $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{h}$ от переменных r, θ, U, V и h линейная, поэтому дифференцируемость по этим аргументам не вызывает сомнения. Также очевидно, что рассматриваемые функции непрерывно дифференцируемы по переменной t во всех точках, кроме $t = t_*$. Дифференцируя рассматриваемое отображение по t и переходя к пределу при $t \to t_* \mp 0$, убеждаемся в существовании и совпадении односторонний пределов:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\overline{t}}{\partial t}\Big|_{t=t_*} = \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{\partial\overline{r}}{\partial t}\Big|_{t=t_*} = 0, \quad \frac{\partial\overline{\theta}}{\partial t}\Big|_{t=t_*} = \frac{(\alpha-1)f}{2\alpha}, \\
\frac{\partial\overline{U}}{\partial t}\Big|_{t=t_*} = \frac{(\alpha^2-1)f^2 r}{4\alpha\sqrt{\alpha}}, \quad \frac{\partial\overline{V}}{\partial t}\Big|_{t=t_*} = 0, \quad \frac{\partial\overline{h}}{\partial t}\Big|_{t=t_*} = 0.
\end{gathered}$$

Проведенный анализ показывает, что отображение (2.51), доопределенное в точках $t_* = (2n+1)\pi/f$ в соответствии с формулами (2.52), является непрерывно дифференцируемым по всем аргументам.

Так как система уравнений (2.48) допускает инфинитезимальный оператор $\hat{X}_9$, то согласно общей теории уравнения (2.48) не меняются при замене переменных, соответствующей конечным преобразованиям оператора $\hat{X}_9$. Это позволяет сформулировать следующее утверждение, убедиться в справедливости которого можно и непосредственными вычислениями.

Утверждение. *Если совокупность функций* $U = \overline{U}(t,r,\theta)$, $V = \overline{V}(t,r,\theta)$, $h = \overline{h}(t,r,\theta)$ *удовлетворяет системе* *уравнений (2.48), то той же системе уравнений удовлетворяет совокупность функций*

$$\begin{aligned} U(t,r,\theta) &= \left(\overline{U}(\bar{t},\bar{r},\bar{\theta}) + \tfrac{f\bar{r}}{2}\tfrac{(\alpha^2-1)\bar{\tau}}{\alpha^2+\bar{\tau}^2}\right)\sqrt{\tfrac{\alpha^2+\bar{\tau}^2}{\alpha(1+\bar{\tau}^2)}}, \\ V(t,r,\theta) &= \left(\overline{V}(\bar{t},\bar{r},\bar{\theta}) - \tfrac{f\bar{r}}{2}\tfrac{(\alpha-1)(\bar{\tau}^2-\alpha)}{\alpha^2+\bar{\tau}^2}\right)\sqrt{\tfrac{\alpha^2+\bar{\tau}^2}{\alpha(1+\bar{\tau}^2)}}, \\ h(t,r,\theta) &= \tfrac{\alpha^2+\bar{\tau}^2}{\alpha(1+\bar{\tau}^2)}\overline{h}(\bar{t},\bar{r},\bar{\theta}), \end{aligned} \tag{2.53}$$

где

$$\bar{\tau} = \tan(\tfrac{f\bar{t}}{2}), \quad \tau = \tan(\tfrac{ft}{2}), \quad \bar{t} = \tfrac{2}{f}\arctan(\alpha\tau) + \chi(t),$$
$$\bar{r} = r\sqrt{\tfrac{\alpha(1+\tau^2)}{1+\alpha^2\tau^2}}, \quad \bar{\theta} = \theta + \arctan(\tau) - \arctan(\alpha\tau),$$

α — произвольное положительное число, $\chi(t)$ — кусочно-постоянная функция, равная $2\pi k/f$, на интервале $t \in ((2k-1)\pi/f, (2k+1)\pi/f)$, k — целое. В точках $t = (2k+1)\pi/f$ полагаем, что $\bar{t} = t$, $\bar{r} = r/\sqrt{\alpha}$, $\bar{\theta} = \theta$.

Найденное преобразование позволяет сопоставить всем известным точным решениям рассматриваемой модели новые точные решения. Уравнения (2.48) допускают класс стационарных вращательно-симметричных решений

$$U = \hat{U} = 0, \quad V = \hat{V}(r), \quad h = \hat{h}(r) = \frac{1}{g}\int\limits_0^r \left(\frac{\hat{V}^2}{r} + f\hat{V}\right) dr + h_0, \tag{2.54}$$

где $\hat{V}(r)$ произвольная гладкая функция, h_0 — неотрицательная постоянная. Согласно утверждению, набор функций

$$\begin{aligned} &U = \tfrac{fr}{2}\,\tfrac{(\alpha^2-1)\tau}{1+\alpha^2\tau^2}, \quad V = \sqrt{\tfrac{\alpha(1+\tau^2)}{1+\alpha^2\tau^2}}\,\hat{V}\left(r\sqrt{\tfrac{\alpha(1+\tau^2)}{1+\alpha^2\tau^2}}\right) - \tfrac{fr}{2}\,\tfrac{(\alpha-1)(\alpha\tau^2-1)}{1+\alpha^2\tau^2}, \\ &h = \tfrac{\alpha(1+\tau^2)}{1+\alpha^2\tau^2}\,\hat{h}\left(r\sqrt{\tfrac{\alpha(1+\tau^2)}{1+\alpha^2\tau^2}}\right); \quad \tau = \tan\left(\tfrac{ft}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.55}$$

также является решением системы уравнений (2.48), которое в точках $t = (2n+1)\pi/f$ следует доопределить по непрерывности.

Пусть «базовое» решение соответствует состоянию покоя:

$$\hat{U} = 0, \quad \hat{V} = 0, \quad \hat{h} = h_0.$$

Подставляя эти функции в (2.55), получаем новое точное решение, обладающее свойством периодичности по времени:

$$U = \tfrac{fr}{2}\,\tfrac{(\alpha^2-1)\tau}{1+\alpha^2\tau^2}, \quad V = \tfrac{fr}{2}\,\tfrac{(\alpha-1)(\alpha\tau^2-1)}{1+\alpha^2\tau^2}, \quad h = \tfrac{\alpha(1+\tau^2)}{1+\alpha^2\tau^2}. \tag{2.56}$$

Траектории движения частиц определяются из системы уравнений

$$\tfrac{dr}{dt} = U, \quad \tfrac{d\theta}{dt} = \tfrac{V}{r}, \quad r|_{t=0} = r_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0$$

и имеют вид

$$r(t) = r_0\sqrt{\tfrac{1+\alpha^2\tau^2}{1+\tau^2}}, \quad \theta(t) = \theta_0 + \arctan(\alpha\tau) - \arctan(\tau).$$

Эти уравнения можно переписать следующим образом

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

где

$$a = \tfrac{(\alpha+1)r_0}{2}\cos\theta_0, \quad b = \tfrac{(\alpha+1)r_0}{2}\sin\theta_0, \quad R = \tfrac{(\alpha-1)r_0}{2}.$$

Частицы жидкости в решении (2.56) движутся по окружностям и за время $T = 2\pi/f$ возвращаются в исходное положение. Решение описывает периодический процесс растекания/сжатия жидкого цилиндра с подвижной непроницаемой границей движущейся по закону

$$r = R_0\sqrt{(1+\tau^2)^{-1}(1+\alpha^2\tau^2)},$$

где R_0 — начальный радиус цилиндра.

2.6 Задачи

1. Вычислить первое и второе продолжение операторов:

   (a) $X = x^2\partial_x + xu\partial_u, \quad \mathbb{Z} = \mathbb{R}^2(t,x)\times\mathbb{R}(u)$;

   (b) $X = 4t\partial_t - u\partial_u, \quad \mathbb{Z} = \mathbb{R}^2(t,x)\times\mathbb{R}(u)$;

   (c) $X = \partial_t + x\partial_x + u\partial_u + 2v\partial_v, \quad \mathbb{Z} = \mathbb{R}^2(t,x)\times\mathbb{R}^2(u,v)$;

(d) $X = -t\partial_t + \partial_x + u\partial_u + w\partial_w + 2v\partial_v, \quad \mathbb{Z} = \mathbb{R}^2(t,x) \times \mathbb{R}^3(u,w,v)$;

(e) $X = (x-y)\partial_x + (x+y)\partial_y, \quad \mathbb{Z} = \mathbb{R}(x) \times \mathbb{R}(y)$;

(f) $X = (x-y)\partial_x + (x+y)\partial_y, \quad \mathbb{Z} = \mathbb{R}^2(x,y) \times \mathbb{R}(z)$.

2. Показать, что уравнение нелинейной теплопроводности

$$u_t - u^4 u_{xx} = 0$$

допускает алгебру Ли L_5 операторов

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = 2t\partial_t + x\partial_x,$$
$$X_4 = 4t\partial_t - u\partial_u, \quad X_5 = x^2\partial_x + xu\partial_u.$$

3. Показать, что уравнения одномерной газовой динамики для политропного газа

$$u_t + uu_x + \rho^{-1}p_x = 0,$$
$$\rho_t + \rho u_x + u\rho_x = 0,$$
$$p_t + \gamma p u_x + up_x = 0$$

допускают алгебру Ли L_6 операторов

$$X_1 = \partial_t,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = t\partial_t + x\partial_x,\ X_4 = t\partial_x + \partial_u,$$
$$X_5 = t\partial_t - u\partial_u + 2\rho\partial_\rho,\ X_6 = \rho\partial_\rho + p\partial_p.$$

В случае $\gamma = 3$ допускаемая алгебра Ли расширяется

$$X_7 = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u - t\rho\partial_\rho - 3tp\partial_p.$$

4. Вычислить группы преобразований, допускаемых ОДУ второго порядка.

(a) $y'' = y^{-2}y' - (xy)^{-1}$;

(b) $y'' = \exp(-y')$;

(c) $y'' = x^{-4}y(y')^3$;

(d) $y'' = y^2 \exp(-x)$;

(e) $y'' = xy + y^{-1}(y')^2$.

5. Найти группу преобразований, допускаемых одномерными уравнениями мелкой воды ($g = \mathrm{const}$)
$$u_t + uu_x + gh_x = 0, \quad h_t + hu_x + uh_x = 0.$$

6. Найти преобразования растяжения, допускаемые уравнением пограничного слоя на полубесконечной пластине (задача Блазиуса)
$$\begin{aligned}&\psi_y\psi_{xy} - \psi_x\psi_{yy} = \nu\psi_{yyy},\\ &\psi(x,0) = \psi_y(x,0) = 0, \quad \psi_y \to U \ (y \to \infty).\end{aligned}$$
Здесь ν и U — постоянные.

7. Доказать, что модель двумерных изэнтропических движений политропного газа с показателем адиабаты $\gamma = 2$, описываемая системой дифференциальных уравнений
$$\begin{aligned}&u_t + uu_x + vu_y + 2cc_x = 0,\\ &v_t + uv_x + vv_y + 2cc_y = 0,\\ &c_t + uc_x + vc_y + 2^{-1}c(u_x + v_y) = 0\end{aligned}$$
допускает проективный оператор
$$X = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y - tc\partial_c + (x - tu)\partial_u + (y - tv)\partial_v.$$

8. Показать, что уравнения вращающейся мелкой воды ($g,\ f = \mathrm{const}$)
$$\begin{aligned}&u_t + uu_x + vu_y - fv + gh_x = 0,\\ &v_t + uv_x + vv_y + fu + gh_y = 0,\\ &h_t + (uh)_x + (vh)_y = 0\end{aligned}$$

допускают операторы

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = \partial_y,\\
&X_4 = -y\partial_x + x\partial_y - v\partial_u + u\partial_v,\\
&X_5 = x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v + 2h\partial_h,\\
&X_6 = \cos(ft)\partial_x - \sin(ft)\partial_y - f\sin(ft)\partial_u - f\cos(ft)\partial_v,\\
&X_7 = \sin(ft)\partial_x + \cos(ft)\partial_y + f\cos(ft)\partial_u - f\sin(ft)\partial_v,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&X_8 = \cos(ft)\partial_t - \tfrac{f}{2}\big(x\sin(ft) - y\cos(ft)\big)\partial_x -\\
&-\tfrac{f}{2}\big(x\cos(ft) + y\sin(ft)\big)\partial_y +\\
&+\tfrac{f}{2}\big((u - fy)\sin(ft) + (v - fx)\cos(ft)\big)\partial_u -\\
&-\tfrac{f}{2}\big((u + fy)\cos(ft) - (v + fx)\sin(ft)\big)\partial_v + fh\sin(ft)\partial_h,\\
&X_9 = \sin(ft)\partial_t + \tfrac{f}{2}\big(x\cos(ft) + y\sin(ft)\big)\partial_x -\\
&-\tfrac{f}{2}\big(x\sin(ft) - y\cos(ft)\big)\partial_y -\\
&-\tfrac{f}{2}\big((u - fy)\cos(ft) - (v - fx)\sin(ft)\big)\partial_u -\\
&-\tfrac{f}{2}\big((u + fy)\sin(ft) + (v + fx)\cos(ft)\big)\partial_v - fh\cos(ft)\partial_h.
\end{aligned}
$$

3 Инварианты и инвариантные многообразия

В предыдущем разделе мы видели, что дифференциальное уравнение может допускать сразу несколько инфинитезимальных операторов. Каждому оператору соответствует своя однопараметрическая группа Ли преобразований. Композиция преобразований каждой однопараметрической группы дает преобразование того же вида. Однако, что если мы составим различные композиции преобразований, принадлежащие разным однопараметрическим группам? В таком случае возникает новый объект: многопараметрическая группа Ли преобразований. Основным ее свойством является следующее: в окрестности тождественного преобразования любая многопараметрическая группа «соткана» из однопараметрических. Т.е., любое преобразование многопараметрической группы можно получить в результате комбинации конечного числа базисных преобразований, принадлежащих ее однопараметрическим подгруппам. Мы не будем углубляться в теорию многопараметрических непрерывных групп Ли, поскольку всю необходимую информацию о строении этих групп можно получить на языке алгебр Ли, образуемых инфинитезимальными операторами.

3.1 Алгебры Ли операторов

Рассматривается пространство L линейных дифференциальных операторов первого порядка:

$$L = \{\xi^i_\alpha(x)\partial_{x^i}, \ \ \alpha = 1, \dots, r\}.$$

Определение 14. Коммутатором операторов $X = \xi^i(x)\partial_{x^i}$ и $Y = \eta^i(x)\partial_{x^i}$ называется оператор $[X, Y]$, определяемый формулой

$$[X, Y] = XY - YX = \left(\xi^i(x)\frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} - \eta^i(x)\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}\right)\partial_{x^k}. \tag{3.1}$$

Для любых $X_1, X_2, X_3 \in L$ выполнены следующие свойства коммутатора.

1. Билинейность: $[c_1X_1 + c_2X_2, X_3] = c_1[X_1, X_3] + c_2[X_2, X_3]$, $\forall\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. Антисимметричность: $[X_1, X_2] = -[X_2, X_1]$.

3. Тождество Якоби: $[[X_1, X_2], X_3] + [[X_2, X_3], X_1] + [[X_3, X_1], X_2] = 0$.

4. Инвариантность относительно замены координат: пусть при замене $(x) \leftrightarrow (y)$ операторы переписываются, как $X \leftrightarrow X'$. Тогда $[X_1', X_2'] = [X_1, X_2]'$.

5. Инвариантность относительно продолжения: $[\underset{k}{X_1, X_2}] = [\underset{k}{X_1}, \underset{k}{X_2}]$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

6. Сохранение инвариантности многообразия: если многообразие $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ инвариантно относительно операторов X_1, X_2, то оно инвариантно и относительно их коммутатора $[X_1, X_2]$.

Определение 15. Линейное пространство операторов L_r, $\dim L_r = r$, замкнутое относительно операции коммутирования, называется алгеброй Ли операторов.

Из свойств коммутатора следует, что линейное пространство L_r операторов, допускаемых произвольной системой дифференциальных уравнений, образует алгебру Ли. Пусть $0 < r < \infty$. Тогда в алгебре Ли L_r можно выбрать базисные элементы $\{X_1, \ldots, X_r\}$. Коммутатор любых базисных операторов раскладывается по тому же базису в виде

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k, \quad i, j, k = 1, \ldots, r. \tag{3.2}$$

Определение 16. Константы C_{ij}^k, фигурирующие в формуле (3.2), называются структурными константами алгебры Ли L_r.

При переходе от одного базиса в L_r к другому набор структурных констант изменяется по тензорному закону, поэтому набор $\{C_{ij}^k\}$ называют также структурным тензором алгебры Ли L_r. Свойства структурных констант следуют из свойств коммутатора операторов:

1. Кососимметричность по нижним индексам: $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$,

2. Тождество Якоби: $C_{ij}^l C_{lk}^m + C_{jk}^l C_{li}^m + C_{ki}^l C_{lj}^m = 0$.

Коммутаторы базисных операторов (3.2) удобно записывать в виде таблицы коммутаторов — таблицы умножения в алгебре Ли.

Определение 17. Совокупность однопараметрических преобразований, построенных для каждого оператора из алгебры Ли L_r, называется локальной r-параметрической группой Ли преобразований G_r.

Пример 16. Трехмерная алгебра Ли L_3 порождена операторами

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x - x\partial_y.$$

Таблица коммутаторов имеет вид

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	0	$-X_2$
X_2	0	0	X_1
X_3	X_2	$-X_1$	0

Ненулевые структурные константы следующие: $C_{13}^2 = -C_{31}^2 = -1$, $C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1$. Интегрируя уравнения Ли (1.2) для каждого из базисных операторов L_3 находим, что соответствующая трехпараметрическая группа Ли G_3 является группой движений плоскости и порождается следующими преобразованиями:

$$\begin{aligned}
X_1: &\quad \overline{x} = x + a_1, \;\; \overline{y} = y; \\
X_2: &\quad \overline{x} = x, \;\; \overline{y} = y + a_2; \\
X_3: &\quad \overline{x} = x\cos a_3 + y\sin a_3, \;\; \overline{y} = -x\sin a_3 + y\cos a_3.
\end{aligned}$$

Любое преобразование группы G_3 получается в виде композиции перечисленных преобразований.

3.2 Инвариантны многопараметрических групп Ли и полных систем операторов

В пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется r-мерная алгебра Ли $L_r = \{X_1, \ldots, X_r\}$. Ей соответствует r-параметрическая локальная группа Ли G_r. Изложенные выше факты и определения, относящиеся к инвариантам и инвариантным многообразиям однопараметрических групп Ли естественным образом переносятся на многопараметрические группы преобразований.

Определение 18. Функция $F(x) \neq \mathrm{const}$ называется инвариантом группы G_r если для любого $T \in G_r$ имеет место тождество $F(Tx) = F(x)$.

Теорема 9 (критерий инвариантности функции). *Функция $F(x)$ является инвариантом группы G_r если и только если выполнены соотношения*

$$X_\alpha F \equiv \xi_\alpha^i(x)\,\frac{\partial F}{\partial x^i} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, r. \tag{3.3}$$

Определение 19. Операторы $X_1, \ldots, X_r$ называются линейно связанными если существует такой набор функций $\varphi^\alpha(x)$, что

$$\varphi^\alpha(x) X_\alpha \equiv 0. \tag{3.4}$$

Если же равенство (3.4) возможно только при $\varphi^\alpha(x) \equiv 0$, $\alpha = 1, \ldots, r$, то операторы $X_1, \ldots, X_r$ называются линейно не связанными.

Определение 20. Операторы являются линейно зависимыми если они линейно связаны и $\varphi^\alpha = \mathrm{const}$, $\alpha = 1, \ldots, r$.

Пример 17. Операторы, порождающие группу вращений в трехмерном пространстве $SO(3)$

$$X_1 = z\partial_y - y\partial_z, \quad X_2 = x\partial_z - z\partial_x, \quad X_3 = y\partial_x - x\partial_y$$

линейно независимы, но линейно связаны. Действительно, $xX_1 + yX_2 + zX_3 \equiv 0$.

Определение 21. Операторы $X_1, \ldots, X_r$ образуют полную систему (= находятся в инволюции), если они линейно не связаны и существует такой набор функций $\varphi^\sigma_{\alpha\beta}(x)$, что выполнены соотношения

$$[X_\alpha, X_\beta] = \varphi^\sigma_{\alpha\beta} X_\sigma, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, r. \tag{3.5}$$

Полная система называется якобиевой, если $\varphi^\sigma_{\alpha\beta} \equiv 0$.

Замечание 3. Если система операторов $\{X_1, \ldots, X_r\}$ является базисом некоторой алгебры Ли, то эта система (после отбрасывания линейно связанных операторов) полна. Обратное, вообще говоря, не верно.

Теорема 10. *Полная система операторов $\{X_1, \ldots, X_r\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет ровно $n-r$ функционально независимых инвариантов.*

Каждая система линейно не связанных операторов $X_1, \ldots, X_r$ может быть приведена к полной и якобиевой. Для этого нужно:

1. Составить все коммутаторы $[X_\alpha, X_\beta]$.

2. Если $[X_\alpha, X_\beta] = \varphi^\sigma_{\alpha\beta} X_\sigma$ для всех $\alpha, \beta = 1, \ldots, r$, то система полна. В противном случае необходимо пополнить систему новыми операторами, которые не выражаются через $\{X_\alpha\}$: $X_{r+1} = [X_\alpha, X_\beta]$, $X_{r+2} = [X_\sigma, X_\tau]$,... К расширенной таким образом системе операторов вновь применить алгоритм начиная с шага 1.

   В пространстве $\mathbb{R}^n$ число линейно не связанных операторов не может превосходить n, поэтому за конечное число шагов будет получена полная система.

3. Преобразовать полную систему операторов к якобиевой путем составления невырожденных линейных комбинаций операторов вида $X'_\alpha = \omega^\beta_\alpha(x) X_\beta$, $\det ||\omega^\beta_\alpha|| \neq 0$. Целью преобразования является получение эквивалентной

системы операторов с матрицей из коэффициентов вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & {\xi'}_1^{r+1} & \dots & {\xi'}_1^{n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & {\xi'}_2^{r+1} & \dots & {\xi'}_2^{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & {\xi'}_r^{r+1} & \dots & {\xi'}_r^{n} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Полученная в результате выполнения алгоритма полная якобиева система операторов $X'_1, \dots, X'_{r'}$ эквивалентна исходной в том смысле, что множества решений системы (3.3) для них совпадают.

Пример 18. В пространстве $\mathbb{R}^5(t, x, y, u, v)$ рассматривается система операторов

$$X_1 = \partial_y + t\partial_x + \partial_u, \quad X_2 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v.$$

Требуется привести эту систему операторов к полной и якобиевой.

Операторы X_1, X_2 линейно не связаны, поскольку

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & t & 1 & 1 & 0 \\ 0 & y & -x & v & -u \end{pmatrix} = 2.$$

Вычисление коммутатора дает

$$[X_1, X_2] = \partial_x - t\partial_y - \partial_v.$$

Этот оператор линейно не связан с X_1, X_2. Значит необходимо пополнить систему новым оператором $X_3 = \partial_x - t\partial_y - \partial_v$. Подсчет коммутаторов показывает, что система операторов $\{X_1, X_2, X_3\}$ полна. Полученная система не является якобиевой, поскольку $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_2, X_3] = X_1$. Для приведения ее к якобиевой составим следующие линейные комбинации:

$$
\begin{aligned}
X_1' &= \frac{t}{t^2+1}\,X_1 + \frac{1}{t^2+1}\,X_3 = \partial_x + \frac{t}{t^2+1}\,\partial_u - \frac{1}{t^2+1}\,\partial_v,\\
X_2' &= \frac{1}{t^2+1}\,X_1 - \frac{t}{t^2+1}\,X_3 = \partial_y + \frac{1}{t^2+1}\,\partial_u + \frac{t}{t^2+1}\,\partial_v,\\
X_3' &= X_2 - y\,\frac{tX_1+X_3}{t^2+1} + x\,\frac{X_1-tX_3}{t^2+1} =\\
&= \left(v + \frac{x-ty}{t^2+1}\right)\partial_u + \left(-u + \frac{tx+y}{t^2+1}\right)\partial_v.
\end{aligned}
$$

Система операторов $X_1',\ X_2',\ X_3'$ якобиева, хотя и не имеет окончательно вид (3.6). В этом можно убедится непосредственной проверкой.

Для нахождения инвариантов полной системы операторов $X_1,\dots,X_r$ необходимо решить переопределенную систему уравнений (3.3). Условие полноты обеспечивает совместность этой системы. Алгоритм нахождения инвариантов полной якобиевой системы операторов следующий.

1. Сделаем преобразование, приводящее оператор X_1 к оператору переноса по переменной y_1. В соответствии с теоремой о выпрямлении оператора в качестве новых координат y выбираются функционально независимые решения системы уравнений
$$
\begin{aligned}
&Xy^1(x) = 1,\\
&Xy^i(x) = 0, \quad i = 2,\dots,n.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$
В результате замены из инвариантности функции F относительно оператора X_1 следует, что $F = F(y_2,\dots,y_n)$.

2. Производим ту же замену $(x) \leftrightarrow (y)$ в остальных операторах полной системы. Из общей теории следует, что операторы $X_2,\dots,X_r$ в новых переменных имеют вид
$$
\begin{aligned}
X_\alpha = \varphi_\alpha(y)\Big(&\tilde\xi^1_\alpha(y)\partial_{y^1} + \tilde\xi^2_\alpha(y^2,\dots,y^n)\partial_{y^2} + \ldots +\\
&+\tilde\xi^n_\alpha(y^2,\dots,y^n)\partial_{y^n}\Big), \quad \alpha = 2,\dots,r.
\end{aligned}
$$

3. Отбрасывая множители $\varphi_\alpha(y)$ и учитывая независимость функции F от y^1 получаем новую систему из $r-1$ операторов
$$Y_\alpha = \tilde{\xi}^2_\alpha(y^2,\ldots,y^n)\partial_{y^2} + \ldots + \tilde{\xi}^n_\alpha(y^2,\ldots,y^n)\partial_{y^n}, \ \ \alpha = 2,\ldots,r,$$
действующих в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}(y^2,\ldots,y^n)$. Приведя эту полную систему операторов к якобиевой, вновь переходим к шагу 1.

Выполнение данного алгоритма после r-той итерации даст набор операторов $\{Z_\alpha = \partial_{z^\alpha}, \ \alpha = 1,\ldots,r\}$. Если $r < n$, то инвариантами этой системы являются функционально независимые переменные $z^{r+1},\ldots,z^n$. Записывая их выражения через исходные переменные, получим искомый набор $I^1 = z^{r+1}(x),\ldots,I^{n-r} = z^n(x)$ инвариантов операторов $X_1,...,X_r$. Если $r = n$, то инвариантами исходной системы операторов будут только константы.

Замечание 4. Вычислительная сложность данного алгоритма зависит от порядка, в котором выбираются операторы.

Пример 19. Найти инварианты полной якобиевой системы операторов X_1', X_2', X_3', построенной в примере 18.

Вначале осуществим замену переменных, «выпрямляющую» оператор X_1'. Инвариантами этого оператора являются величины t, y, $tx-(t^2+1)u$, $x+(t^2+1)v$. Новые переменные выбираются в виде
$$y^1 = x, \ \ y^2 = t, \ \ y^3 = y, \ \ y^4 = tx-(t^2+1)u, \ \ y^5 = x+(t^2+1)v.$$
Исходные операторы переписываются следующим образом:
$$\begin{aligned} &Y_1 = \partial_{y^1},\\ &Y_2 = \partial_{y^3} - \partial_{y^4} + y^2\partial_{y^5},\\ &Y_3 = (y^2y^3-y^5)\partial_{y^4} + (y^3+y^4)\partial_{y^5}. \end{aligned}$$
Система операторов Y_2, Y_3 является якобиевой. В пространстве переменных $\mathbb{R}^4(y^2,\ldots,y^5)$ оператор Y_2 имеет инварианты y^2, y^3+y^4, $y^2y^3-y^5$. Вводим замену переменных, «выпрямляющую» оператор Y_2:
$$z^1 = y^3, \quad z^2 = y^2, \quad z^3 = y^3+y^4, \quad z^4 = y^2y^3-y^5.$$
В новых переменных
$$\begin{aligned} &Z_2 = \partial_{z^1},\\ &Z_3 = z^4\partial_{z^3} - z^3\partial_{z^4}. \end{aligned}$$

Наконец, оператор Z_3 в пространстве $\mathbb{R}^3(z^2, z^3, z^4)$ имеет инварианты z^2, $(z^3)^2 + (z^4)^2$. Переписывая эти инварианты в исходных переменных, получаем инварианты исходной системы операторов:

$$I_1 = z^2 = t,$$
$$I_2 = (z^3)^2 + (z^4)^2 = \big(y + tx - (t^2+1)u\big)^2 + \big(ty - x - (t^2+1)v\big)^2 .$$

3.3 Базис инвариантов группы Ли преобразований

Задана локальная группа Ли G_r преобразований, действующих в $\mathbb{R}^n$. Она задается своей алгеброй Ли $L_r = \{X_1, \ldots, X_r\}$. Введем в рассмотрение матрицу $M = ||\xi^i_\alpha(x)||$, $i = 1, \ldots, n$, $\alpha = 1, \ldots, r$ из координат базисных операторов. Ранг матрицы M, вообще говоря, зависит от точки x.

Определение 22. Общим рангом матрицы $M(x)$ (обозначается о.р. M) называется наибольший ранг матрицы M при $x \in \mathbb{R}^n$.

Обозначим $r_* =$ о.р. M.

Теорема 11. *Группа G_r имеет инварианты если и только если $r_* < n$. При выполнении этого условия существуют $t = n - r_*$ функционально независимых инвариантов $I^1(x), \ldots, I^t(x)$. Любой другой инвариант $F(x)$ выражается через них в виде $F(x) = \Phi(I^1, \ldots, I^t)$.*

Определение 23. Набор $I = (I^1(x), \ldots, I^t(x))$ функционально независимых инвариантов группы G_r называется базисом инвариантов или универсальным инвариантом.

Для отыскания универсального инварианта заданной группы G_r необходимо вычислить ее общий ранг r_*, отбросить линейно связанные операторы из базиса и воспользоваться алгоритмом построения инвариантов полной системы операторов.

Пример 20. Построим базис инвариантов группы вращений в трехмерном пространстве $SO(3)$ (см. пример 17). Линейно не связанными операторами из порождающей алгебры являются операторы

$$X_1 = z\partial_y - y\partial_z, \quad X_2 = x\partial_z - z\partial_x.$$

Общий ранг группы есть $r_* = 2$. Значит базис инвариантов состоит из одного инварианта. Для приведения системы операторов к якобиевой запишем операторы в виде

$$X_1' = \partial_y - \frac{y}{z}\,\partial_z, \quad X_2' = \partial_x - \frac{x}{z}\,\partial_z.$$

Инвариантами оператора X_1' являются x, y^2+z^2. Осуществляем замену переменных, «выпрямляющую» оператор X_1':

$$y^1 = y, \quad y^2 = x, \quad y^3 = \sqrt{y^2+z^2}.$$

В новых переменных

$$Y_1 = \partial_{y^1}, \quad Y_2 = \partial_{y^2} - \frac{y^2}{y^3}\,\partial_{y^3}.$$

Оператор Y_2 в пространстве $\mathbb{R}^2(y^2, y^3)$ имеет единственный инвариант $(y^2)^2 + (y^3)^2$. Переписывая его в исходных переменных, получаем инвариант группы $SO(3)$:

$$I = x^2 + y^2 + z^2.$$

3.4 Инвариантные многообразия. Индуцированные группа и алгебра Ли

Определение 24. Многообразие $\mathcal{M}$ инвариантно относительно группы G_r если для любой точки $x \in \mathcal{M}$ и для любого преобразования $T \in G_r$ выполнено $Tx \in \mathcal{M}$.

Пусть многообразие $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ регулярно задано системой уравнений

$$\psi^\sigma(x) = 0, \quad \sigma = 1, \ldots, s; \quad \operatorname{rank} \left\| \frac{\partial \psi^\sigma}{\partial x^i} \right\|_{\mathcal{M}} = s. \tag{3.8}$$

Теорема 12. *Многообразие $\mathcal{M}$ регулярно заданное уравнениями (1.6) инвариантно относительно действия группы G_r с оператором X, если и только если выполнено*

$$X_\alpha\,\psi^\sigma\,|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \sigma = 1, \ldots, s; \quad \alpha = 1, \ldots, r. \tag{3.9}$$

Определение 25. Многообразие $\mathcal{M}$ называется особым относительно группы G_r, порождаемой операторами $X_\alpha = \xi^i_\alpha \partial_{x^i}$, если

$$\operatorname{rank} \left|\left|\xi^i_\alpha(x)|_{\mathcal{M}}\right|\right| < r_*.$$

В противном случае многообразие называется неособым. Напомним, что r_* — наибольших ранг матрицы с элементами $\xi^i_\alpha(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 13 (о представлении неособого инвариантного многообразия)**.** *Для того, чтобы группа G_r имела неособые инвариантные многообразия необходимо $r_* < n$. Если это так и $I = (I^1, \ldots, I^t)$, $t = n - r_*$ — универсальный инвариант группы G_r, то всякое неособое инвариантное относительно группы G_r многообразие $\mathcal{M}$ можно задать уравнениями вида*

$$\Phi^\sigma(I^1, ..., I^t) = 0, \quad \sigma = 1, ..., s \tag{3.10}$$

с подходящими функциями Φ^σ.

Согласно определению 24 для любого $x \in \mathcal{M}$ определен его образ под действием преобразований группы G_r и этот образ также принадлежит $\mathcal{M}$. Таким образом, определено индуцированное действие группы G_r на многообразии $\mathcal{M}$. Оно обозначается $G_r|_{\mathcal{M}}$. Преобразования $G_r|_{\mathcal{M}}$ сами образуют локальную группу Ли.

Определение 26. Локальная группа Ли $G_r|_{\mathcal{M}}$ называется индуцированной группой многообразия $\mathcal{M}$, порожденной группой G_r. Ее алгебра Ли обозначается $L_r|_{\mathcal{M}}$.

Без ограничения общности предположим, что ранговый минор в матрице $||\partial\psi^\sigma/\partial x^i||$ находится в первых s столбцах. Сделаем невырожденную замену переменных, локально «выпрямляющую» многообразие $\mathcal{M}$:

$$y^\sigma = \psi^\sigma(x), \quad y^\tau = x^\tau; \quad \sigma = 1, \ldots, s, \ \tau = s+1, \ldots, n. \tag{3.11}$$

Для точек $\mathcal{M}$ имеем $y^\sigma = 0$, $\sigma = 1, \ldots, s$. Координаты $y^{s+1}, \ldots, y^n$ можно принять за координаты точки на многообразии

$$\mathcal{M}: \quad (0, \ldots, 0, y^{s+1}, \ldots, y^n) \in \mathcal{M}.$$

В силу критерия инвариантности (3.9) операторы L_r пересчитываются следующим образом

$$\bar{X}_\alpha = X_\alpha(y^i)|_{\mathcal{M}}\, \partial_{y^i} = \xi^\tau(\bar{y})\partial_{y^\tau}. \tag{3.12}$$

Здесь $\bar{y} = (y^{s+1}, \dots, y^n)$, индекс τ пробегает значения $\tau = s+1, \dots, n$. Операторы $\bar{X}_\alpha$ порождают индуцированную алгебру Ли $L_r|_{\mathcal{M}}$.

Пример 21. Показать, что эллиптический параболоид $\mathcal{M}: \quad z = x^2 + y^2$ является инвариантным многообразием преобразования растяжения $X = x\partial_x + y\partial_y + 2z\partial_z$. Записать его в терминах инвариантов оператора X. Описать индуцированные группу и алгебру Ли.

Здесь $\psi = z - x^2 - y^2$. Проверяем критерий инвариантности (3.9).

$$X\psi|_{\mathcal{M}} = 2(z - x^2 - y^2)|_{\mathcal{M}} = 0.$$

Инварианты оператора X: $I^1 = z/x^2$, $I^2 = y/x$. При сужении инвариантов на многообразие $\mathcal{M}$ получаем:

$$I^1|_{\mathcal{M}} = \frac{x^2 + y^2}{x^2}, \quad I^2|_{\mathcal{M}} = \frac{y}{x}.$$

Между ними имеется функциональная связь $I^1|_{\mathcal{M}} = 1 + \left(I^2|_{\mathcal{M}}\right)^2$. Отсюда следует, что многообразие $\mathcal{M}$ в терминах инвариантов оператора X записывается в виде $I^1 = 1 + \left(I^2\right)^2$.

Для вычисления операторов индуцированной алгебры Ли сделаем замену (3.11):

$$y^1 = z - x^2 - y^2, \quad y^2 = x, \quad y^3 = y.$$

Тогда $\bar{X} = X|_{\mathcal{M}} = y^2\partial_{y^2} + y^3\partial_{y^3}$. Таким образом, индуцированная алгебра Ли порождается оператором $\bar{X}$; индуцированная группа является группой растяжений.

3.5 Частично инвариантные многообразия

Пусть $G_r = \{T_a : \bar{x} = f(x, a)\}$, $a \in \Delta \subset \mathbb{R}^r$ — локальная группа Ли преобразований, действующая в пространстве $\mathbb{R}^n$. Соответствующая ей алгебра Ли L_r задается операторами $X_\alpha = \xi^i_\alpha \partial_{x^i}$, $(i = 1, ..., n;\ \alpha = 1, ..., r)$. Многообразие $\mathcal{M}$ регулярно задано уравнениями

$$\mathcal{M}: \quad \psi^\sigma(x) = 0, \quad \sigma = 1, \dots, s; \quad \text{о.р.} \left|\left|\partial\psi^\sigma/\partial x^k\right|\right| = s. \tag{3.13}$$

Определение 27. Орбитой точки x под действием преобразований группы G_r называется совокупность точек $f(x,a)$, когда a пробегает все возможные значения из $\Delta \subset \mathbb{R}^r$. Орбитой $f(\mathcal{M},a)$ многообразия $\mathcal{M}$ называется совокупность орбит всех его точек $x \in \mathcal{M}$.

Введем следующую числовую характеристику.

Определение 28. Дефектом $\delta(\mathcal{M},G_r)$ многообразия $\mathcal{M}$ относительно действия группы G_r называется разность между размерностью орбиты $f(\mathcal{M},a)$ и размерностью самого многообразия $\mathcal{M}$:

$$\delta(\mathcal{M},G_r) = \dim f(\mathcal{M},a) - \dim \mathcal{M}. \tag{3.14}$$

Дефект многообразия является важной характеристикой, показывающей степень неинвариантности многообразия $\mathcal{M}$ относительно действия G_r. Для инвариантных многообразий дефект равен нулю так как орбита каждой точки многообразия принадлежит самому многообразию.

Орбита произвольного многообразия под действием группы преобразования пространства сама является инвариантным многообразием группы, так как по определению содержит орбиты всех своих точек. Более того, орбита $f(\mathcal{M},a)$ является наименьшим инвариантным многообразием группы G_r, содержащим $\mathcal{M}$. Таким образом, ее можно описать в терминах функциональных соотношений между инвариантами группы. Пусть G_r имеет полный набор функционально независимых инвариантов $I = \big(I^1(x),\dots,I^t(x)\big)$, где $t = n - r_*$ и $r_* = \text{о.р.}||\xi^i_\alpha||$. Тогда в силу теоремы о представлении неособого инвариантного многообразия орбиту многообразия $\mathcal{M}$ можно задать уравнениями

$$\Phi^\tau\big(I^1(x),\dots,I^t(x)\big) = 0, \quad \tau = 1,\dots,l. \tag{3.15}$$

Определение 29. При условии регулярности задания (3.15) (это означает, что о.р. $||\partial\Phi^\tau/\partial I^k|| = l$) число

$$\rho(\mathcal{M},G_r) = t - l \tag{3.16}$$

называется рангом частично инвариантного многообразия $\mathcal{M}$ относительно группы G_r. Пара чисел (ρ,δ) определяют тип частично инвариантного многообразия $\mathcal{M}$.

Ранг показывает размерность инвариантного многообразия $f(\mathcal{M},a)$ в пространстве инвариантов группы G_r. На практике не очень удобно пользоваться формулой (3.16), так как для вычисления ранга с ее помощью нужно иметь инвариантное представление (3.15) орбиты многообразия $\mathcal{M}$. Однако, с использованием формулы (3.14), ранг можно определить в терминах коразмерности s исходного многообразия $\mathcal{M}$ и его дефекта:

$$\rho(\mathcal{M}, G_r) = \delta(\mathcal{M}, G_r) + t - s. \tag{3.17}$$

Заданный теоремой 12 критерий инвариантности многообразия обобщается на случай частично инвариантных многообразий следующим образом.

Теорема 14. *Пусть частично инвариантное многообразие $\mathcal{M}$ группы G_r регулярно задано соотношениями* (3.13). *Пусть $\{X_1, \ldots, X_r\}$ — базис инфинитезимальных операторов группы G_r. Тогда для дефекта частично инвариантного многообразия $\mathcal{M}$ справедлива формула*

$$\delta(\mathcal{M}, G_r) = \text{ о.р. } ||X_\alpha \psi^\sigma(x)|_{\mathcal{M}}|| \tag{3.18}$$

В правой части равенства (3.18) стоит общий ранг матрицы с элементами $X_\alpha \psi^\sigma(x)$, вычисленной в точках многообразия $\mathcal{M}$. В случае инвариантного многообразия в силу теоремы 12 эта матрица состоит из одних нулей, что согласуется с нулевым дефектом инвариантного многообразия.

Выберем подгруппу $H \subset G_r$. Частично инвариантное многообразие $\mathcal{M}$ типа (ρ, δ) также может быть рассмотрено, как частично инвариантное многообразие подгруппы H. При этом числа ρ и δ, вообще говоря, изменятся и станут (ρ', δ').

Теорема 15. *При переходе к подгруппе ранг частично инвариантного многообразия не убывает, а дефект не увеличивается, т.е.*

$$\rho' \geq \rho, \quad \delta' \leq \delta. \tag{3.19}$$

Особо выделяется случай, когда при переходе к подгруппе ранг частично инвариантного многообразия остается прежним, а дефект уменьшается.

Определение 30. Говорят, что частично инвариантное многообразие $\mathcal{M}$ группы G типа (ρ, δ) редуцируется к частично инвариантному многообразию группы $H \subset G$ типа (ρ', δ') если

$$\rho' = \rho, \quad \delta' < \delta.$$

В случае $\delta' = 0$ говорят о редукции частично инвариантного многообразия к инвариантному.

Пример 22. В пространстве $\mathbb{R}^4(x, y, u, v)$ действует группа G_2, заданная своими инфинитезимальными образующими

$$X_1 = y\partial_x - x\partial_y, \quad X_2 = v\partial_u - u\partial_v.$$

В качестве $\mathcal{M}$ выберем многообразие, заданное уравнениями

$$\mathcal{M} : \begin{cases} \psi^1 = xu + yv - x^2 - y^2 = 0, \\ \psi^2 = (xu + yv)^2 - u^2 - v^2 = 0. \end{cases} \tag{3.20}$$

Коразмерность многообразия $\mathcal{M}$ совпадает с размерностью и равна $n - s = 2$. Вычисление дефекта многообразия по формуле (3.18) дает

$$\delta = \text{о.р.} \left. \begin{pmatrix} yu - xv & 2(xu + yv)(yu - xv) \\ xv - yu & 2(xu + yv)(xv - yu) \end{pmatrix} \right|_{\mathcal{M}} = 1.$$

Группа G_2 имеет $t = 4 - 2 = 2$ инварианта. Ранг многообразия определяется формулой (3.17): $\rho = 1 + 2 - 2 = 1$. Таким образом, многообразие $\mathcal{M}$ является частично инвариантным многообразием группы G_2 типа $(1, 1)$.

Рассмотрим подгруппу $G_1 \subset G_2$, порождаемую инфинитезимальным оператором $X = X_1 + X_2 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v$. Действие оператора X на функции ψ^σ дает нули, т.е. многообразие $\mathcal{M}$ является инвариантным многообразием группы G_1, следовательно $\delta' = 0$. Далее, инвариантами группы G_1 являются функции

$$j_1 = x^2 + y^2, \quad j_2 = u^2 + v^2, \quad j_3 = xu + yv.$$

В пространстве инвариантов $\mathbb{R}^3(j_1, j_2, j_3)$ многообразие $\mathcal{M}$ задается соотношениями

$$\mathcal{M} : \quad \Phi^1 = j_3 - j_1 = 0, \quad \Phi^2 = j_3^2 - j_2 = 0.$$

По формуле (3.16) ранг многообразия $\mathcal{M}$, как инвариантного многообразия группы G_1 равен $\rho' = 3 - 2 = 1$. Таким образом, частично инвариантное многообразие $\mathcal{M}$ группы G_2 редуцируется к инвариантному многообразию группы G_1.

3.6 Задачи

1. Выяснить, образуют ли операторы $X_1, \dots, X_r$ алгебру Ли L_r. Если образуют, найти преобразования, которыми порождается соответствующая группа G_r.

   (a) $X_1 = \partial_t,\ \ X_2 = \partial_x,\ \ X_3 = t\partial_x + \partial_u,\ \ X_4 = t\partial_t + x\partial_x,\ \ X_5 = x\partial_x + u\partial_u + 2h\partial_h;$

   (b) $X_1 = \partial_t,\ \ X_2 = \partial_x,\ \ X_3 = 2t\partial_t + x\partial_x,\ \ X_4 = 4t\partial_t - u\partial_u,\ \ X_5 = x^2\partial_x + xu\partial_u;$

   (c) $X_1 = \partial_x + \partial_p,\ \ X_2 = \partial_y + \partial_q,\ \ X_3 = y\partial_x - x\partial_y + q\partial_p - p\partial_q;$

   (d) $X_1 = t\partial_x + \partial_u,\ \ X_2 = t\partial_y + \partial_v,\ \ X_3 = \partial_t;$

   (e) $X_1 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v,\ \ X_2 = x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v;$

   (f) $X_1 = t\partial_x + \partial_u,\ \ X_2 = t\partial_y + \partial_v,\ \ X_3 = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y + (x - tu)\partial_u + (y - tv)\partial_v;$

   (g) $X_1 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v,\ \ X_2 = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y + (x - tu)\partial_u + (y - tv)\partial_v;$

   (h) $X_1 = \partial_t,\ \ X_2 = \partial_x,\ \ X_3 = t\partial_x + \partial_u,\ \ X_4 = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u,$
   $X_5 = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u.$

2. Найти инварианты многопараметрических групп Ли L_r операторов $X_1, ..., X_r$.

   (a) $X_1 = 2t\partial_t + x\partial_x,\ \ X_2 = 2x\partial_x + u\partial_u;$

   (b) $X_1 = x\partial_x + y\partial_y + p\partial_p + q\partial_q,\ \ X_2 = y\partial_x - x\partial_y + q\partial_p - p\partial_q;$

   (c) $X_1 = \partial_x + \partial_p,\ \ X_2 = \partial_y + \partial_q,\ \ X_3 = y\partial_x - x\partial_y + q\partial_p - p\partial_q;$

   (d) $X_1 = x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v,\ \ X_2 = a\partial_t + y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v;$

   (e) $X_1 = \partial_t,\ \ X_2 = 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y - c\partial_c - u\partial_u - v\partial_v,$
   $X_3 = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y - tc\partial_c + (x - tu)\partial_u + (y - tv)\partial_v;$

   (f) $X_1 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v,\ \ X_2 = x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v + c\partial_c,$
   $X_3 = (t^2 + 1)\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y - tc\partial_c + (x - tu)\partial_u + (y - tv)\partial_v;$

(g) $X_1 = -\sin(ft)\partial_x + (1-\cos(ft))\partial_y - f\cos(ft)\partial_u + f\sin(ft)\partial_v,$

$X_2 = (1-\cos(ft))\partial_x + \sin(ft)\partial_y + f\sin(ft)\partial_u + f\cos(ft)\partial_v;$

(h) $X_1 = \partial_t - \frac{f}{2}\partial_\theta,$

$X_2 = \cos(ft)\partial_t - \frac{f}{2}r\sin(ft)\partial_r - \frac{f}{2}\cos(ft)\partial_\theta + \frac{f}{2}(U\sin(ft) - fr\cos(ft))\partial_U +$

$+\frac{f}{2}(V+fr)\sin(ft)\partial_V + fh\sin(ft)\partial_h,$

$X_3 = \sin(ft)\partial_t + \frac{f}{2}r\cos(ft)\partial_r - \frac{f}{2}\sin(ft)\partial_\theta - \frac{f}{2}(U\cos(ft) + fr\sin(ft))\partial_U -$

$-\frac{f}{2}(V+fr)\cos(ft)\partial_V - fh\cos(ft)\partial_h \qquad (f = \mathrm{const}).$

3. Построить пример полной системы операторов в $\mathbb{R}^2$, не порождающих алгебру Ли.

4. Вычислить ранг и дефект многообразия $\mathcal{M}$ относительно группы G, порождаемой операторами X_α. Проверить, имеет ли место редукция многообразия $\mathcal{M}$. Охарактеризовать орбиту многообразия $\mathcal{M}$.

(a) $\mathcal{M}:\ \psi^1 = \frac{u+v}{x} = 0,\ \psi^2 = \frac{y^2+uv}{x^2} = 0,$

$G:\ X_1 = x\partial_x + y\partial_y,\ X_2 = u\partial_u + v\partial_v;$

(b) $\mathcal{M}:\ \psi^1 = \frac{y}{x} + 1 = 0,\ \psi^2 = u^2 + v - \frac{x}{y} = 0$

$G:\ X_1 = x\partial_x + y\partial_y,\ \ X_2 = \partial_v;$

(c) $\mathcal{M}:\ \psi^1 = \mathrm{arctg}(y/x) - t = 0,\ \psi^2 = \frac{(x-y)u+(x+y)v}{x^2+y^2} = 0$

$G:\ X_1 = -y\partial_x + x\partial_y - v\partial_u + u\partial_v,\ \ X_2 = \partial_t,\ \ X_3 = x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v;$

(d) $\mathcal{M}:\ \psi^1 = (ft+2\theta)^2 - (fr^2 + 2Vr)^2 = 0,\ \psi^2 = frU + \frac{fr^2\sin(ft)}{1+\cos(ft)} = 0$

$G:\ X_1 = \partial_t - \frac{f}{2}\partial_\theta,$

$X_2 = \cos(ft)\partial_t - \frac{f}{2}r\sin(ft)\partial_r - \frac{f}{2}\cos(ft)\partial_\theta + \frac{f}{2}(U\sin(ft) - fr\cos(ft))\partial_U +$

$+\frac{f}{2}(V+fr)\sin(ft)\partial_V,$

$X_3 = \sin(ft)\partial_t + \frac{f}{2} r\cos(ft)\partial_r - \frac{f}{2}\sin(ft)\partial_\theta - \frac{f}{2}(U\cos(ft) + fr\sin(ft))\partial_U -$
$-\frac{f}{2}(V + fr)\cos(ft)\partial_V.$

4 Абстрактные алгебры Ли

4.1 Основные определения

Пусть L — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), снабженное операцией коммутирования $[\cdot,\cdot]$, т.е. для любых $X, Y \in L$ определено $[X,Y] \in L$.

Определение 31. Замкнутое относительно операции коммутирования $[\cdot,\cdot]$ векторное пространство L называется алгеброй Ли если для любых $X, Y, Z \in L$ выполнены следующие утверждения

1. Билинейность: $[c_1X + c_2Y, Z] = c_1[X,Z] + c_2[Y,Z]$, $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).
2. Антисимметричность: $[X,Y] = -[Y,X]$.
3. Тождество Якоби: $\big[[X,Y],Z\big] + \big[[Y,Z],X\big] + \big[[Z,X],Y\big] = 0$.

В конечномерном случае существует базис $L_r = \{X_1,\ldots,X_r\}$. Здесь и далее $\{X_1,\ldots,X_r\}$ обозначает линейную оболочку указанных в скобках элементов. Алгебра Ли L_r полностью определяется своей таблицей коммутаторов: $[X_i, X_j] = C_{ij}^k\, X_k$. Величины $C_{ij}^k \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) называются структурными константами алгебры Ли L_r. При линейной замене базиса структурные константы изменяются, как компоненты дважды ковариантного и единожды контравариантного тензора:

$$\overline{X}_i = \varphi_i^j\, X_j; \quad \det||\varphi_i^j|| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{C}_{p\,q}^{m}\varphi_m^k = C_{i\,j}^k\,\varphi_p^i\,\varphi_q^j. \tag{4.1}$$

Две алгебры Ли одинаковой размерности, структурные константы которых связаны равенствами (4.1) с некоторой невырожденной постоянной матрицей $||\varphi_i^j||$ являются изоморфными. Алгебра Ли, все структурные константы которой равны нулю $C_{ij}^k = 0$ называется абелевой. В абелевой алгебре Ли коммутатор любых двух элементов равен нулю.

Определение 32. Коммутантом двух подпространств $M, N \subset L$ алгебры Ли L называется линейное подпространство, порожденное всеми возможными коммутаторами: $[M,N] = \{[X,Y]\,|X \in M,\ Y \in N\}$.

Определение 33. Подалгеброй алгебры Ли L называется ее векторное подпространство M, замкнутое относительно операции коммутирования: $[M, M] \subset M$. Подалгебра $N \subset L$ называется идеалом если $[M, L] \subset M$. Идеал $N \subset L$ называется центром алгебры Ли L если $[N, L] = \{0\}$.

Каждая алгебра Ли L всегда содержит два тривиальных идеала: $\{0\}$ и L.

Определение 34. Идеал $N \subset L$ называется собственным если $N \neq \{0\}$ и $N \neq L$. Нормализатором подалгебры M в алгебре Ли L называется максимальная по размерности подалгебра $N \subset L$ в которой M является идеалом. Используется обозначение $N = \mathrm{Nor}\,_L M$.

Нормализатором идеала является вся алгебра Ли; если нормализатор совпадает с самой подалгеброй $M = \mathrm{Nor}\,_L M$, говорят, что подалгебра самонормализована в L.

Определение 35. Алгебра Ли называется простой если она не содержит собственных идеалов.

Определение 36. Производной DL алгебры Ли L называется коммутант алгебры Ли L с самой собой: $DL = [L, L]$. Старшие производные определяются рекуррентно: $D^k L = [D^{k-1} L, D^{k-1} L]$. Возникает ряд производных:

$$L \supseteq DL \supseteq D^2 L \supseteq \ldots \supseteq D^k L \supseteq \ldots \tag{4.2}$$

Алгебра Ли L называется разрешимой если ряд (4.2) стабилизируется на нулевой подалгебре, т.е. существует число k, для которого выполнено $D^k L = \{0\}$.

Определение 37. Алгебра Ли L называется полупростой если она не содержит разрешимых идеалов. Радикалом $R(L)$ алгебры Ли L называется ее максимальный по размерности разрешимый идеал.

В любой алгебре Ли существует единственный радикал.

Определение 38. Пусть N — идеал в L. Элементы $X, Y \in L$ называются эквивалентными $X \sim Y$ относительно идеала N если $X - Y \in N$.

Это теоретико-множественное отношение эквивалентности. По отношению к нему вся алгебра Ли L разбивается на классы эквивалентности. Обозначим их $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ и т.д. Каждый класс эквивалентности характеризуется своим представителем: $\mathcal{X} = X + N$, $X \in \mathcal{X}$. Множество классов эквивалентности образует алгебру Ли относительно коммутатора

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = [X + N, Y + N] = [X, Y] + N. \tag{4.3}$$

Определение 39. Алгебра Ли классов эквивалентности называется факторалгеброй алгебры Ли L по идеалу N и обозначается L/N.

Пример 23. Рассмотрим конечномерную часть группы Ли, допускаемой уравнением теплопроводности $u_t = u_{xx}$. Ей соответствует шестимерная алгебра Ли L_6, порождаемая операторами:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_t, \quad X_3 = 2t\partial_t + x\partial_x - \frac{1}{2}u\partial_u$$

$$X_4 = 2t\partial_x - xu\partial_u, \quad X_5 = t^2\partial_t + tx\partial_x - \frac{1}{4}(x^2 + 2t)u\partial_u, \quad X_6 = u\partial_u.$$

Таблица коммутаторов алгебры L_6:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	0	X_1	$-X_6$	$\frac{1}{2}X_4$	0
X_2	0	0	$2X_2$	$2X_1$	X_3	0
X_3	$-X_1$	$-2X_2$	0	X_4	$2X_5$	0
X_4	X_6	$-2X_1$	$-X_4$	0	0	0
X_5	$-\frac{1}{2}X_4$	$-X_3$	$-2X_5$	0	0	0
X_6	0	0	0	0	0	0

Любое одномерное подпространство L_6 образует одномерную абелеву подалгебру. Двумерными подалгебрами будут, например, подалгебры $\{X_1, X_2\}$, $\{X_1 + X_4,\ X_2 + X_3\}$. При этом,

$$\operatorname{Nor}_{L_6}\{X_1, X_2\} = \{X_1, X_2, X_3, X_6\},$$

$$\operatorname{Nor}_{L_6}\{X_1 + X_4, X_2 + X_3\} = \{X_1 + X_4, X_2 + X_3, X_6\}.$$

Трехмерная подалгебра $\{X_1, X_4, X_6\}$ являются идеалом. Она же порождает радикал $R(L_6)$ (доказательство этого факта будет приведено позже). Одномерная подалгебра $\{X_6\}$ является центром алгебры Ли L_6. Производная алгебра DL совпадает с L — это означает, что алгебра L_6 не является разрешимой. В то же время идеал $M = \{X_1, X_4, X_6\}$ разрешим, поскольку $DM = \{X_6\}$, $D^2M = \{0\}$. Это означает, что L_6 не является ни простой ни полупростой.

4.2 Структурные свойства алгебр Ли

Определение 40. Пусть $M, N \subset L$. Суммой подпространств называется линейная оболочка всевозможных сумм элементов из обоих подпространств: $M + N = \{X + Y \mid X \in M, Y \in N\}$. Если $M \cap N = \{0\}$ и $[M, N] = \{0\}$, то сумма называется прямой: $M \oplus N$. Если же $M \cap N = \{0\}$, но $[M, N] \neq \{0\}$, то сумма называется полупрямой: $M \dot{\oplus} N$.

Теорема 16 (Леви-Мальцева)**.** *Любая алгебра Ли L разлагается в полупрямую сумму радикала R и полупростой алгебры N:*

$$L = R \dot{\oplus} N. \tag{4.4}$$

Полупростая алгебра N называется фактором Леви. В отличии от радикала, фактор Леви определен неоднозначно.

Теорема 17. *Всякая полупростая алгебра Ли L разлагается в прямую сумму простых идеалов*

$$N = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_k.$$

Пример 24. Продолжаем обсуждение алгебры Ли L_6 из примера 23. Разложение Леви имеет вид $L_6 = R \dot{\oplus} N$, где $R = \{X_1, X_4, X_6\}$, а $N = \{X_2, X_3, X_5\}$. В разрешимости идеала R мы уже убедились. Осталось проверить простоту подалгебры N. Действительно, таблица коммутаторов подалгебры N имеет вид

	X_2	X_3	X_5
X_2	0	$2X_2$	X_3
X_3	$-2X_2$	0	$2X_5$
X_5	$-X_3$	$-2X_5$	0

Из таблицы коммутаторов следует, что алгебра N не разрешима. В то же время ее разложение Леви имеет вид $N = R_1 \dot{\oplus} N_1$, где фактор Леви N_1 имеет размерность 1, 2 или 3. Но все одномерные и двумерные алгебры Ли разрешимы (см. упр. 3). Отсюда следует, что фактор Леви алгебры N имеет размерность 3, а значит совпадает с N. Таким образом, подалгебра N проста, что и требовалось.

4.3 Композиционный ряд

В алгебре Ли L выберем максимальный идеал M_1. Затем в M_1 выберем его максимальный идеал M_2 и т.д. Возникает ряд

$$L = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supset M_k \supseteq \{0\}. \tag{4.5}$$

Определение 41. Ряд (4.5), в котором M_{s+1} является максимальным идеалом в M_s называется композиционным рядом алгебры L.

Если имеется какой-нибудь ряд

$$L = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots \supseteq N_q \supseteq \{0\},$$

где N_{s+1} идеал в N_s (не обязательно максимальный), то его можно дополнить до композиционного ряда, «вставляя» недостающие члены ряда.

Теорема 18. *Для разрешимой алгебры Ли L существует композиционный ряд, все факторы которого M_s/M_{s+1} одномерны.*

Теорема 19 (С. Ли)**.** *Для разрешимой алгебры Ли L над алгебраически замкнутым полем (над полем $\mathbb{C}$) существует композиционный ряд идеалов*

$$L = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_k \supseteq \{0\}, \tag{4.6}$$

в котором $\dim M_s/M_{s+1} = 1$ *и все M_s, $s = 1, \ldots, k$ являются идеалами в L. Для разрешимой алгебры Ли над полем $\mathbb{R}$ в ряде идеалов* (4.6) $\dim M_s/M_{s+1} = 1$ *или* $\dim M_s/M_{s+1} = 2$.

Пример 25. Композиционный ряд идеалов алгебры Ли L_6 из примера 23 следующий

$$L_6 \supseteq \{X_1, X_4, X_6\} \supseteq \{0\}.$$

Отметим, что рассматриваемая алгебра Ли L_6 не является разрешимой и предыдущая теорема в данном случае не применима ($\dim M_s/M_{s+1} = 3$).

4.4 Задачи

1. Проверить, что множество верхнетреугольных матриц размерности $n \times n$ образует алгебру Ли с коммутатором $[A, B] = AB - BA$.

2. Проверить, что множество векторов $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ образует алгебру Ли относительно коммутатора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Построить таблицу коммутаторов этой алгебры Ли. Является ли она простой, разрешимой?

3. Показать, что линейной заменой базиса каждая двумерная алгебра Ли приводится к алгебре Ли со следующими коммутационными соотношениями между базисными элементами X_1 и X_2:

   - $[X_1, X_2] = 0$ — абелева,
   - $[X_1, X_2] = X_1$ — не абелева.

4. Пусть M, N — идеалы в L. Показать, что $M \cap N$ — идеал в L.

5. Пусть M, N — идеалы в L. Показать, что $M + N = \{X + Y \mid X \in M,\ Y \in N\}$ — также идеал в L.

6. Является ли трехмерная алгебра Ли из примера 16 простой, разрешимой?

7. Показать простоту алгебры Ли $SO(3)$, соответствующей группе вращений трехмерного пространства из примера 17.

8. Может ли алгебра Ли одновременно быть простой и разрешимой?

9. Доказать, что любая подалгебра разрешимой алгебры Ли также разрешима.

10. Доказать, что любая разрешимая алгебра содержит нетривиальный абелев идеал.

11. Найти факторалгебру алгебры L_6 из примера 23 по трехмерному идеалу $N = \{X_1, X_4, X_6\}$.

12. Являются ли следующие алгебры Ли разрешимыми?

    (a) $X_1 = \partial_t,\ \ X_2 = \partial_x,\ \ X_3 = t\partial_x + \partial_u,\ \ X_4 = t\partial_t + x\partial_x,\ \ X_5 = x\partial_x + u\partial_u + 2h\partial_h;$

(b) $X_1=\partial_t,\ \ X_2=\partial_x,\ \ X_3=2t\partial_t+x\partial_x,\ \ X_4=4t\partial_t-u\partial_u,\ \ X_5=x^2\partial_x+xu\partial_u;$

(c) $X_1=\partial_x,\ \ X_y=\partial_y,\ \ X_3=y\partial_x-x\partial_y+v\partial_u-u\partial_v,\ \ X_4=x\partial_x+y\partial_y+u\partial_u+v\partial_v;$

(d) $X_1=\partial_t,\ \ X_2=\partial_x,\ \ X_3=t\partial_x+\partial_u,\ \ X_4=2t\partial_t+x\partial_x-u\partial_u,$

$X_5=t^2\partial_t+tx\partial_x+(x-tu)\partial_u.$

13. Являются ли алгебры Ли $L(X_1,X_2,X_3)$ и $L'(Y_1,Y_2,Y_3)$ изоморфными?

$$
\begin{aligned}
&X_1=\partial_t,\ X_2=2t\partial_t+x\partial_x+y\partial_y-u\partial_u-v\partial_v\\
&X_3=t^2\partial_t+tx\partial_x+ty\partial_y+(x-tu)\partial_u+(y-tv)\partial_v;\\
&Y_1=\partial_t-\tfrac{f}{2}\partial_\theta,\ Y_2=\cos(ft)\partial_t-\tfrac{f}{2}r\sin(ft)\partial_r-\tfrac{f}{2}\cos(ft)\partial_\theta+\\
&+\tfrac{f}{2}(U\sin(ft)-fr\cos(ft))\partial_U+\tfrac{f}{2}(V+fr)\sin(ft)\partial_V,\\
&Y_3=\sin(ft)\partial_t+\tfrac{f}{2}r\cos(ft)\partial_r-\tfrac{f}{2}\sin(ft)\partial_\theta-\\
&-\tfrac{f}{2}(U\cos(ft)+fr\sin(ft))\partial_U-\tfrac{f}{2}(V+fr)\cos(ft)\partial_V.
\end{aligned}
$$

5 Инвариантно-групповые решения

Рассматривается дифференциальное уравнение либо система дифференциальных уравнений вида

$$E:\quad F^\sigma(x,u,\underset{1}{u},\ldots,\underset{k}{u})=0,\quad \sigma=1,\ldots,s. \tag{5.1}$$

Система (5.1) допускает группу $G_r=\{T_a\}$, $T_a:Z\times\mathbb{R}^r\to Z$. Пусть

$$\Phi:\ u^i=\varphi^i(x),\quad i=1,\ldots,m. \tag{5.2}$$

есть решение уравнений (5.1). Группе G_r соответствует алгебра Ли L_r, порожденная операторами

$$L_r=\{X_\alpha=\xi^i_\alpha(x,u)\partial_{x^i}+\eta^k_\alpha(x,u)\partial_{u^k},\ \alpha=1,\ldots,r\}.$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1^1(x,u) & \dots & \xi_1^n(x,u) \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_r^1(x,u) & \dots & \xi_r^n(x,u) \end{pmatrix},$$

и расширенную матрицу

$$M(\xi,\,\eta) = \begin{pmatrix} \xi_1^1(x,u) & \dots & \xi_1^n(x,u) & \eta_1^1(x,u) & \dots & \eta_1^m(x,u) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_r^1(x,u) & \dots & \xi_r^n(x,u) & \eta_r^1(x,u) & \dots & \eta_r^m(x,u) \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$r_*(\xi) = \text{ о.р.}\, M(\xi), \quad r_* = r_*(\xi,\,\eta) = \text{ о.р.}\, M(\xi,\,\eta). \tag{5.3}$$

Универсальный инвариант группы H представим в виде

$$I = (I^1(x,u), \dots, I^t(x,u)), \quad t = n + m - r_*.$$

5.1 Инвариантные решения

Определение 42. Решение Φ называется инвариантным H-решением уравнений E, если Φ является инвариантным многообразием для подгруппы $H \subset G_r$.

Следующие два условия эквивалентны.

- Для существования неособого H-решения необходимо

$$\text{о.р.} \left\| \frac{\partial I^s}{\partial u^j} \right\| = m. \tag{5.4}$$

- Для существования неособого инвариантного H-решения необходимо выполнение равенства

$$r_*(\xi) = r_*(\xi,\,\eta). \tag{5.5}$$

Равенство (5.5) проще для проверки, поскольку не требует вычисления инвариантов группы H.

Теорема 20. *Пусть система дифференциальных уравнений E допускает группу H, для которой выполнено одно из условий (5.4) или (5.5). Тогда существует факторсистема E/H, связывающая только инварианты I^τ, $\tau = 1, \dots, t$, функции $\Phi^k(I)$, $k = 1, \dots, m$ и производные $\partial\Phi^k/\partial I^\tau$. При этом система E/H обладает свойствами:*

1. *Для всякого H–инвариантного решения, записанного в виде $\Phi^k(I) = 0$, $k = 1, \dots, m$ функции Φ^k удовлетворяют системе E/H.*

2. *Каждое решение системы E/H, для которого о.р. $||\partial\Phi^k/\partial I^\tau|| = m$ дает инвариантное H–решение системы E, записанное в неявной форме $\Phi^k(I(x,u)) = 0$.*

Определение 43. Число $\rho = n - r_*$ называется рангом H–инвариантного решения.

На практике инварианты группы H удобно представлять в разделенном виде:

$$I : \begin{cases} I^1(x,u), \dots, I^m(x,u), \\ \lambda^1 = I^{m+1}(x), \dots, \lambda^\rho = I^t(x). \end{cases}$$

Тогда представление инвариантного многообразия имеет следующий вид

$$I^k(x,u) = U^k(\lambda^1(x), \dots, \lambda^\rho(x)), \quad k = 1, \dots, m. \tag{5.6}$$

В силу условий (5.4), (5.5) равенства (5.6) можно разрешить относительно всех искомых функций $u^1, \dots, u^m$.

Подстановка полученных представлений в исходную систему уравнений E после приведения подобных членов и сокращения ненулевых множителей приводит к фактор-системе E/H, связывающей только инвариантные функции U^k и инвариантные независимые переменные λ^i. При этом, фактор-система E/H *проще* исходной системы E, поскольку связывает функции от меньшего числа независимых переменных! В частности, для решений ранга $\rho = 1$ фактор-система является системой обыкновенных дифференциальных уравнений, а для решений ранга $\rho = 0$ — системой алгебраических соотношений. Конечно же, при этом она дает описания только некоторого частного класса решений исходной системы E, а именно, решений, инвариантных относительно подгруппы H.

Приведем несколько примеров построения инвариантных решений.

Пример 26. Уравнение Кортевега-де-Фриза

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{5.7}$$

допускает алгебру Ли операторов L_4:

$$X_1 = \partial_t,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = t\partial_x + \partial_u,\ X_4 = 3t\partial_t + x\partial_x - 2u\partial_u.$$

Выпишем фактор–уравнение, определяющее инвариантное решение относительно преобразования $X = \alpha X_1 + X_3$, ($\alpha = \mathrm{const}$, $\alpha \neq 0$). Набор базисных инвариантов имеет вид $I = (x - \beta t^2/2, u - \beta t)$, $\beta = \alpha^{-1}$. Согласно (5.6) введем обозначения $\lambda = x - \beta t^2/2$, $U(\lambda) = u - \beta t$. Выражая отсюда явным образом функцию u, получаем представление решения

$$u(t,x) = U(\lambda) + \beta t, \quad \lambda = x - \beta t^2/2.$$

Его подстановка в (5.7) после упрощения дает фактор–уравнение E/H:

$$U''' + UU' + \beta = 0. \tag{5.8}$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (5.8) существенно проще, чем (5.7). При этом, оно описывает только частные решения исходного уравнений (5.7), а именно, решения инвариантные относительно выбранного преобразования X. После однократного интегрирования (5.8) принимает вид $U'' + U^2/2 + \beta\lambda + C_1 = 0$. Решение последнего уравнения дается с помощью эллиптических функций.

Пример 27. Условия существования инвариантного решения (5.5) являются необходимыми в том смысле, что они только гарантируют возможность записи представления H-инвариантного решения и получения фактор-системы E/H. Однако, полученная фактор-система может оказаться противоречивой, т.е. решение не будет существовать. Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$tu_t + xu_x = 1.$$

Очевидно, что оно допускает равномерное растяжение переменных t и x, которому отвечает инфинитезимальный оператор $X = t\partial_t + x\partial_x$. Набор базисных инвариантов $I = (x/t, u)$, поэтому представление решение имеет вид: $u = U(\lambda)$, $\lambda = x/t$. Подстановка $u = U(\lambda)$ в исходное уравнение после элементарного упрощения приводит к противоречивому фактор–уравнению $E/H:\ \ 0 = 1$. Таким образом, рассматриваемое уравнение не имеет решения, инвариантного относительно равномерных растяжений t и x, хотя необходимые условия (5.5) выполнены.

Пример 28. В приложениях часто возникает необходимость исследовать математические модели с граничными условиями. Приведем пример построения инвариантного решения, на основе описанного выше алгоритма, для системы дифференциальных уравнений с краевыми условиями.

Система уравнений

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x + vu_y + gh_x = 0, \quad u_x + v_y = 0, \\ &h_t + u(t,x,h)h_x = v(t,x,h), \quad v(t,x,0) = 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

описывает распространение длинных волн в слое идеальной несжимаемой жидкости жидкости со свободной границей $y = h(t,x)$ над ровным дном $y = 0$ в поле силы тяжести ($g = 1$). Безразмерные переменные t, x, y, $u(t,x,y)$, $v(t,x,y)$ соответствуют времени, декартовым координатам и компонентам вектора скорости. Рассматриваемая модель описывает сдвиговые движения жидкости (горизонтальная компонента вектора скорости зависит от вертикальной координаты). В частном случае, когда $u_y \equiv 0$, система (5.9) сводится к классической модели мелкой воды

$$u_t + uu_x + gh_x = 0, \quad h_t + (uh)_x = 0.$$

В приближении длинных волн завихренность потока ω пропорциональна u_y, поэтому модель (5.9) будем называть уравнениями вихревой мелкой воды.

Заметим, что кинематическое условие на свободной границе (третье уравнение системы (5.9)) можно упростить с помощью замены переменных. Введем новую независимую переменную z и новую искомую функцию $w(t,x,z)$ по правилу

$$z = \frac{y}{h(t,x)}, \quad w = \frac{dz}{dt} = \frac{v}{h} - \frac{y}{h^2}\Big(h_t + uh_x\Big).$$

В новых переменных система (5.9) имеет вид

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x + wu_z + h_x = 0, \\ &h_t + uh_x + h(u_x + w_z) = 0, \\ &w(t,x,0) = w(t,x,1) = 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Уравнения (5.10) допускают алгебру Ли операторов L_5:

$$X_1 = \partial_t,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = t\partial_x + \partial_u,$$
$$X_4 = t\partial_t + x\partial_x - w\partial_w,\ X_5 = x\partial_x + u\partial_u + 2h\partial_h.$$

Построим инвариантное решение по подалгебре $H = \{X_4, X_5\}$. Легко видеть, что в рассматриваемом случае необходимое условие существования инвариантного решения (5.5) выполнено. Набор базисных инвариантов, соответствующий подалгебре H имеет вид $(z, tu/x, tw, t^2h/x^2)$. Поэтому получаем следующее представление решения:

$$u = \frac{x}{t}A(z), \quad w = \frac{1}{t}B(z), \quad h = h_0\frac{x^2}{t^2} \quad (h_0 = \text{const}). \tag{5.11}$$

Подстановка (5.11) в уравнения (5.10) дает факторсистему E/H:

$$A^2 - A + BA' + 2h_0 = 0, \quad 3A - 2 + B' = 0, \quad B(0) = B(1) = 0. \tag{5.12}$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения с граничными условиями (5.12) можно проинтегрировать. Выразим из первого уравнения системы (5.12) функцию $B = (A - A^2 - 2h_0)/A'$ и подставим во второе. В результате получено уравнение второго порядка для определению функции $A(z)$:

$$(A^2 - A + 2h_0)A'' + (A-1)A'^2 = 0.$$

Далее разложим на множители многочлен $A^2 - A + 2gh_0$ и поменяем ролями переменные z и A. Принимая во внимание, что

$$\frac{dA}{dz} = \left(\frac{dz}{dA}\right)^{-1}, \quad \frac{d^2A}{dz^2} = -\left(\frac{dz}{dA}\right)^{-3}\frac{d^2z}{dA^2},$$

мы приходим к уравнению

$$(A - \lambda_1)(A - \lambda_2)\frac{d^2z}{dA^2} + (1 - A)\frac{dz}{dA} = 0,$$

где $\lambda_1 = (1 - \sqrt{1 - 8h_0})/2$, $\lambda_2 = (1 + \sqrt{1 - 8h_0})/2$ $(0 < h_0 < 1/8)$. Для удобства интегрирования сделаем замену $\tau = (A - \lambda_1)/(\lambda_2 - \lambda_1)$ и приведем последнее дифференциальное уравнение к виду

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2z}{d\tau^2} + \left(\tau - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)\frac{dz}{d\tau} = 0. \tag{5.13}$$

Один раз интегрируя уравнение (5.13), находим функцию

$$\zeta(\tau) \equiv \frac{dz}{d\tau} = C_1 \tau^{a-1}(1-\tau)^{b-1}, \quad a = \frac{2-3\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}, \quad b = \frac{1-3\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

Учитывая граничные условия $z(0)=0$ и $z(1)=1$, получаем следующее представление для функции $z(\tau)$

$$z(\tau) = \int_0^\tau \zeta(\tau')\,d\tau' \left(\int_0^1 \zeta(\tau)\,d\tau\right)^{-1}$$

Вернемся к переменным (A,z) и используя неполную бета-функцию $\beta(\tau,a,b)$ выпишем решение факторсистемы (5.12) в неявном виде:

$$z(A) = \frac{\beta(\frac{A-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1},a,b)}{\beta(a,b)}, \quad B(z) \equiv \bar{B}(A) = -(A-\lambda_1)(A-\lambda_2)z'(A).$$

Отметим, что граничные условия $B(0)=B(1)=0$ выполнены, так как $z(\lambda_1)=0$, $z(\lambda_2)=1$. В результате обращения монотонной функции $z=z(A)$ и подстановки в (5.11) получаем инвариантное решение уравнений вихревой мелкой воды (5.10).

5.2 Свойства факторсистемы E/H

Предположим, что исходная система дифференциальных уравнений E допускает группу преобразований G. Выберем из нее некоторую подгруппу $H \subset G$ (то же самое, подалгебру $H \subset L$ в допускаемой алгебре Ли) и построим фиакторсистему E/H (мы предполагаем выполненными необходимые условия существования H-решения). Возникает вопрос, какую часть исходной группы «унаследует» факторсистема? Иными словами, какая часть из операторов соответствующей алгебры Ли L будет допускаться уравнениями E/H?

Теорема 21. *Факторсистема E/H допускает преобразования, порожденные факторалгеброй* $\mathrm{Nor}_L H/H$.

Вообще говоря, факторсистема E/H может допускать и какие-то новые преобразования, не наследуемые из исходной группы (некоторые авторы называют такие преобразования скрытыми симметриями исходных уравнений).

Однако, теорема 21 дает ту часть группы, которая заведомо будет допускаться подмоделью. Это важно, так как факторсистема, допускающая более широкую группу, проще для дальнейшего анализа. В силу теоремы 7 на странице 18 допускаемая группа G действует на множестве решений системы уравнений E.

Определение 44. Подгруппы H и H', содержащиеся в G подобны если существует преобразование $T \in G$, с которым $H' = THT^{-1}$.

Теорема 22. *Если подгруппы H и H' подобны и $H' = THT^{-1}$, то для любого H-инвариантного решения Φ решение $\Phi' = T\Phi$ является инвариантным H'-решением.*

Таким образом, подобные подгруппы порождают подобные инвариантные решения. Ясно, что отдельно вычислять инвариантные решения, порождаемые подобными подмоделями нет смысла — все они получаются из одного действием преобразований допускаемой группы. В этой связи возникает задача перечисления всех не подобных подгрупп допускаемой группы. Ниже она будет решена на языке алгебр Ли путем построения так называемой *оптимальной системы подалгебр* — полного набора не подобных подалгебр допускаемой алгебры Ли.

5.3 Частично инвариантные решения

Обобщение понятия инвариантного решения приводит к следующему определению.

Определение 45. Решение Φ называется частично инвариантным H-решением системы уравнений E, если многообразие Φ является частично инвариантным многообразием подгруппы $H \subset G_r$.

На частично инвариантные решения переносятся понятия ранга и дефекта, определенные ранее для частично инвариантных многообразий. Однако, здесь они имеют некоторую специфику, связанную с разделением ролей переменных x и u.

С обозначениями (5.3) введем следующие целочисленные характеристики подгруппы H:

$t = m + n - r_*$ —общее количество инвариантов группы H;

$\sigma = n - r_*(\xi)$ —количество инвариантов группы, зависящих только от независимых переменных x;

$\mu = t - \sigma$ — количество инвариантов, существенно зависящих от искомых функций u.

Частично инвариантное решение, заданное в виде многообразия Φ формулами (5.2), имеет коразмерность $s = m$. Поэтому ранг многообразия Φ вычисляется по формуле (3.17) в виде $\rho = \delta + t - m$. Орбита многообразия Φ есть инвариантное многообразие группы H, поэтому ее уравнения задаются в виде некоторой функциональной связи вида (3.15) между инвариантами группы. Для простоты предположим, что инварианты группы записаны в разделенном виде

$$I : \begin{cases} I^1(x, u), \dots, I^\mu(x, u), \\ \lambda^1 = I^{t-\sigma+1}(x), \dots, \lambda^\sigma = I^t(x). \end{cases} \tag{5.14}$$

При этом

$$\text{о.р.}\, \frac{\partial\big(I^1(x, u), \dots, I^\mu(x, u)\big)}{\partial\big(u^1, \dots, u^m\big)} = \mu. \tag{5.15}$$

Вначале сформируем уравнения орбиты частично инвариантного многообразия Φ под действием группы H. Для этого необходимо задать ранг частично инвариантного многообразия. В качестве ранга можно взять любое целое число ρ, удовлетворяющее неравенствам

$$\sigma \le \rho < \min\{n, t\}. \tag{5.16}$$

Уравнения орбиты $f(\Phi, H)$ конструируются в виде следующего набора функциональных связей между инвариантами (5.14) группы H:

$$\Phi^\tau(\lambda^1, \dots, \lambda^\sigma, I^1, \dots, I^{t-\sigma}) = 0, \quad \tau = 1, \dots, t - \rho. \tag{5.17}$$

Размерность такого многообразия в пространстве инвариантов есть ρ. Уравнения (5.17) удобно представить в разрешенном виде. При этом различаются два случая: $\sigma = \rho$ и $\sigma < \rho$.

Определение 46. Частично инвариантное относительно группы H решение называется регулярным, если $\rho = \sigma$. Это соответствует случаю, когда ранг решения совпадает с числом инвариантов группы H, зависящих только от x. Частично инвариантное решение называется нерегулярным, если $\rho > \sigma$.

Для регулярных частично инвариантных решений представление (5.17) в разрешенном виде таково:

$$I^k(x, u) = U^k\big(\lambda^1(x), \dots, \lambda^\sigma(x)\big), \quad k = 1, \dots, \mu. \tag{5.18}$$

Дефект решения есть $\delta = m - \mu$. Для выяснения смысла дефекта частично инвариантного решения заметим, что в силу условия (5.15) по теореме о неявной функции соотношения (5.18) можно разрешить относительно $\mu < m$ искомых функций u^i. Без ограничения общности будем считать, что это функции $u^1, \dots, u^\mu$. Остальные $\delta = m - \mu$ функций u^i, $i = \mu + 1, \dots, m$ не получают представления через инварианты группы H и изначально не обременяются никакими дополнительными условиями. Таким образом, появляется δ не инвариантных функций, которые изначально считаются зависящими произвольно от всех независимых переменных:

$$u^{\mu+1} = v^1(x), \dots, u^m = v^\delta(x). \tag{5.19}$$

Формулы (5.18), (5.19) задают представление регулярного частично инвариантного решения типа (ρ, δ).

В нерегулярном случае инвариантов λ недостаточно для построения инвариантной части решения в разрешенном виде. Удобно ввести $\rho - \sigma$ вспомогательных функций $v^1(x), \dots, v^{\rho-\sigma}(x)$. Тогда уравнения (5.17) орбиты многообразия Φ представляются в разрешенном виде следующим образом:

$$I^k(x,u) = U^k\big(\lambda^1(x), \dots, \lambda^\sigma(x), v^1(x), \dots, v^{\rho-\sigma}(x)\big), \quad k = 1, \dots, \mu. \tag{5.20}$$

По теореме о неявной функции левые части уравнений (5.20) могут быть разрешены относительно μ функций $u^1, \dots, u^\mu$. Таким образом, δ оставшихся функций не получают инвариантного представления и считаются зависящими от всех независимых переменных:

$$u^{\mu+1} = v^{\rho-\sigma+1}(x), \dots, u^m = v^\delta(x). \tag{5.21}$$

Формулы (5.20), (5.21) формируют представление нерегулярного частично инвариантного решения типа (ρ, σ). Представление нерегулярного частично инвариантного решения сложнее, чем регулярного потому, что инвариантные функции U^k в представлении (5.20) зависят от вспомогательных функций v^j.

Подстановка представления решения (5.6), (5.19) или (5.20), (5.21) в исходную систему уравнений (5.1) приводит к факторсистеме для инвариантных функций U^k, $k = 1, \dots, \mu$ и не инвариантных функций v^j, $j = 1, \dots, \delta$. Эта система имеет принципиальное отличие от факторсистемы, получаемой для инвариантных решений. Факторсистема частично инвариантного решения имеет вид соотношений E/H, связывающих только инвариантные функции и их аргументы, а также уравнений Π, в которые входят не инвариантные функции. Система уравнений Π рассматривается как переопределенная система для не инвариантных функций v^j, при известных из системы E/H функциях U^k.

Условия совместности системы П, вообще говоря, будут пополнять как инвариантную часть E/H, так и саму систему П. Целью исследования на данном этапе является приведение системы П в инволюцию, т.е. получение всех ее условий совместности и доказательство непротиворечивости. К сожалению, в общем виде проследить этот процесс не представляется возможным. Если этот шаг сделан, то факторсистема окончательно представляется в виде объединения подсистемы E/H только для инвариантных функций и совместной на решениях E/H системы П для определения не инвариантных функций. Редуцированная таким образом система, вообще говоря, проще исходных уравнений, так как система E/H содержит меньшее число независимых переменных, а система П — меньшее число искомых функций, чем исходная система уравнений E.

Важную роль в построении частично инвариантных решений играет понятие редукции. Пусть дана подгруппа $H \subset G$, порождающая частично инвариантное решение U ранга ρ и дефекта δ. Может найтись подгруппа $H' \subset H$, порождающая то же решение U но уже как решение ранга ρ' и дефекта δ'. В соответствии с теоремой 15 на странице 52 выполнено $\rho' \geq \rho$ и $\delta' \leq \delta$.

Определение 47. Говорят, что H-частично инвариантное решение ранга ρ и дефекта δ редуцируется к частично инвариантному решению относительно подгруппы $H' \subset H$ ранга ρ' и дефекта δ' если эти решения совпадают и выполнено $\rho' = \rho$, $\delta' < \delta$. В случае $\delta' = 0$ говорят о редукции к инвариантному решению.

Установление редукции решения полезно, поскольку построение частично инвариантного решения меньшего дефекта значительно проще технически. Ниже приведены примеры построения частично инвариантных решений для математических моделей механики сплошных сред.

Пример 29. Рассматриваются уравнения мелкой воды, описывающие пространственные движения тонкого слоя идеальной несжимаемой жидкости над ровным дном в поле силы тяжести

$$\begin{aligned}
&u_t + uu_x + vu_y + gh_x = 0,\\
&v_t + uv_x + vv_y + gh_y = 0,\\
&h_t + (uh)_x + (vh)_y = 0.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Здесь (u, v) — вектор скорости, h — глубина жидкости, g — ускорение свободного падения. Без ограничения общности полагаем $g = 1$. Базовым является пространство $\mathbb{R}^3(t, x, y) \times \mathbb{R}^3(u, v, h)$, поэтому $n = m = 3$. Рассмотрим частично инвариантное решение, порождаемое допускаемой уравнениями (5.22) группой G_3 с алгеброй Ли

$$L_3 = \{\partial_x,\ t\partial_x + \partial_u,\ (t^2+1)\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y + (x-tu)\partial_u + (y-tv)\partial_v - 2th\partial_h\}.$$

Инвариантами группы G_3 являются следующие функции

$$\lambda = \frac{y}{\sqrt{t^2+1}}, \quad V = v\sqrt{t^2+1} - t\lambda, \quad H = h(t^2+1).$$

Получаем следующие целочисленные характеристики группы H

$$r_* = 3, \quad r_*(\xi) = 2, \quad t = 3, \quad \sigma = 1, \quad \mu = 2.$$

По формуле (5.16) для ранга ρ решения находим следующие неравенства

$$1 \le \rho < 3.$$

Возможно построение регулярного частично инвариантного решения типа $(1,1)$ и нерегулярного решения типа $(2,1)$. Далее мы будем рассматривать первый вариант, т.е. решение типа $(1,1)$.

В соответствии с изложенным алгоритмом представление решения записывается в виде (5.18), (5.19)

$$V = V(\lambda), \quad H = H(\lambda), \quad u = U(t,x,y).$$

Имеется две инвариантные функции V и H, зависящие от $\rho = 1$ независимой переменной и $\delta = 1$ лишняя функция U, зависящая от всех независимых переменных. В это представление мы подставляем выражения для инвариантов V и H и разрешаем их относительно исходных искомых функций v и h. Без ограничения общности будем считать, что не инвариантная функция U зависит не от (t,x,y), а от (t,x,λ). Для решения получаем следующие формулы

$$u = U(t,x,\lambda), \quad v = \frac{V(\lambda)+t\lambda}{\sqrt{t^2+1}}, \quad h = \frac{H(\lambda)}{t^2+1}.$$

Подстановка в систему уравнений (5.22) дает

$$\begin{aligned} &U_t + UU_x + V(t^2+1)^{-1}U_\lambda = 0,\\ &VV' + H' = -\lambda,\\ &VH' + H\big(V' + (t^2+1)U_x - t\big) = 0. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Нижние индексы обозначают производные по соответствующим аргументам, штрих — производная по λ. Первое и третье уравнения системы (5.23) формируют переопределенную систему П для неинвариантной функции U; второе уравнение (5.23) связывает только инвариантные функции, поэтому задает инвариантную часть E/H.

Вначале займемся исследованием подсистемы П. В третьем уравнении (5.23) можно произвести разделение переменных. Вводится новая инвариантная функция $k(\lambda) = (t^2+1)U_x - t$. Для неинвариантной функции U имеем подсистему:

$$U_t + UU_x + \frac{V}{t^2+1}U_\lambda = 0, \quad (t^2+1)U_x - t = k. \tag{5.24}$$

Интегрируя второе уравнение (5.24), находим

$$U = x\frac{k(\lambda)+t}{t^2+1} + f(t,\lambda).$$

Подставляя в первое уравнение (5.24) получаем инвариантное уравнение на функцию k

$$Vk' + k^2 + 1 = 0$$

и уравнение на $f(t,\lambda)$

$$(t^2+1)f_t + Vf_\lambda + (k+t)f = 0. \tag{5.25}$$

Таким образом, факторсистема (5.23) распадается на инвариантную подсистему

$$E/H: \begin{cases} VV' + H' = -\lambda, \\ Vk' + k^2 + 1 = 0, \\ VH' + HV' = -kH. \end{cases} \tag{5.26}$$

и уравнение для лишней функции (5.25). Вводится новая независимая переменная μ:

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = V(\lambda), \quad \mu = \int \frac{d\lambda}{V(\lambda)}. \tag{5.27}$$

Тогда из второго уравнения (5.26) с точностью до несущественной константы получаем

$$k = -\mathrm{tg}\mu. \tag{5.28}$$

Используя (5.28), можно проинтегрировать уравнение (5.25):

$$f(t,\mu) = \frac{g(\mu - \operatorname{arctg} t)}{\cos\mu\sqrt{t^2+1}}, \tag{5.29}$$

(g — произвольная функция). Кроме того, система (5.26) имеет первый интеграл, который следует из третьего уравнения

$$HV\cos\mu = m. \tag{5.30}$$

Наконец, уравнения имеют интеграл Бернулли

$$V^2 + \lambda^2 + 2H = b_0^2.$$

Он должен рассматриваться как уравнение для зависимости $\lambda(\mu)$:

$$\left(\lambda'\right)^2 + \lambda^2 + \frac{2m}{\lambda'\cos\mu} = b_0^2. \tag{5.31}$$

Таким образом, H-частично инвариантное решение задается соотношениями (5.27)–(5.30). Зависимость $\lambda(\mu)$ находится из решения обыкновенного дифференциального уравнения (5.31). Заметим, что решение содержит произвольную функцию g в выражении (5.29).

Пример 30. Рассматривается уравнение околозвукового движения газа

$$-\varphi_x\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0. \tag{5.32}$$

Построим частично инвариантное решение этого уравнения относительно допускаемой группы переносов по всем независимым переменным

$$H = \{\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z\}.$$

Группа H имеет единственный инвариант — функцию φ. Неравенства (5.16) дают ограничения для ранга ρ решения в виде $0 \le \rho < 1$. Отсюда, единственным решением является решение ранга 0, т.е. постоянное. Для преодоления этого ограничения мы рассмотрим первое продолжение базового пространства. В уравнении (5.32) введем обозначения

$$u = \varphi_x, \quad v = \varphi_y, \quad w = \varphi_z, \tag{5.33}$$

Для новых функций $\mathbf{u} = (u, v, w)$ выполняется уравнение

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0. \tag{5.34}$$

В терминах функций $\mathbf{u}$ уравнение (5.32) имеет следующий вид:

$$-uu_x + v_y + w_z = 0. \tag{5.35}$$

Инвариантами группы H в пространстве $\mathbb{R}^3(x, y, z) \times \mathbb{R}^3(u, v, w)$ являются функции u, v, w. Таким образом, здесь $n = m = 3$, $r_* = r_*(\xi) = 3$, $t = 3$, $\sigma = 0$, $\mu = 3$. Для ранга решения ρ получаем неравенства (5.16)

$$0 \le \rho < 3.$$

Решение с $\rho = 0$ соответствует постоянному решению $\varphi = \mathrm{const}$. Нерегулярное частично инвариантное решение уравнения (5.32) или системы (5.35) типа $(\rho, \delta) = (1, 1)$ называется простой волной, типа $(2, 2)$ — двойной волной. Продемонстрируем построение простой волны. В качестве неинвариантной функции выберем функцию u. Имеем представление (5.6) в виде

$$v = v(u), \quad w = w(u). \tag{5.36}$$

При этом, неинвариантная функция u предполагается зависящей от всех независимых переменных:

$$u = u(x, y, z).$$

Подстановка полученного представления решения в уравнения (5.34) дает следующее. Из уравнений (5.34)

$$\begin{cases} v_z - w_y = 0, \\ w_x - u_z = 0, \\ u_y - v_x = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v' u_z - w' u_y = 0, \\ w' u_x - u_z = 0, \\ u_y - v' u_x = 0. \end{cases}$$

Здесь штрих обозначает производную по u. Определитель этой системы линейных уравнений относительно производных функции u равен нулю, поэтому среди них только два являются линейно независимыми. Выберем следующие два уравнения

$$u_y = v'(u) u_x, \quad u_z = w'(u) u_x. \tag{5.37}$$

Подставим представление решения в уравнение (5.35)

$$-uu_x + v'(u)u_y + w'(u)u_z = 0.$$

С учетом равенств (5.37) это дает уравнение для инвариантных функций $v(u)$ и $w(u)$ в виде

$$-u + v'^2(u) + w'^2(u) = 0. \tag{5.38}$$

Осталось проинтегрировать уравнения (5.37) и найти выражение для φ. Для решения первой задачи будем считать, что зависимость $u = u(x, y, z)$ определяется неявно уравнением $F(x, y, z, u) = 0$, $F_u \neq 0$. Тогда уравнения (5.37) эквивалентны равенству нулю действия линейных дифференциальных операторов на функцию F

$$\Omega_1 F = 0, \quad \Omega_2 F = 0, \quad \text{где} \quad \Omega_1 = v'(u)\partial_x - \partial_y, \quad \Omega_2 = w'(u)\partial_x - \partial_z.$$

Коммутатор операторов Ω_1 и Ω_2 равен нулю, поэтому эта система операторов полна. Ищем ее инварианты стандартным способом. Инвариантами оператора Ω_1 являются u, z и $j = x + v'(u)y$. В переменных j, z и u оператор Ω_2 имеет вид $\bar{\Omega}_2 = w'(u)\partial_j - \partial_z$. Его инварианты есть u и $j + w'(u)z$. Таким образом, общее решение системы (5.37) имеет вид

$$x + v'(u)y + w'(u)z = f'(u) \tag{5.39}$$

с произвольной гладкой функцией f. Функция φ находится интегрированием в виде

$$\varphi = xu + yv(u) + zw(u) - f(u). \tag{5.40}$$

Решение определено с произволом в две функции одного аргумента. Например, можно задать произвольно функции $v(u)$ и $f(u)$. Тогда функция $w(u)$ находится из соотношения (5.38). Зависимость $u(x, y, z)$ определяется неявно уравнением (5.39). Подставляя полученные функции в (5.40), получим выражение для функции $\varphi(x, y, z)$. Свойства простой волны описаны в [1]. В частности, ее поверхности уровня (поверхности, на которых функция φ имеет постоянные значения) являются плоскостями и совпадают с характеристиками уравнения (5.32). Следует отметить, что простая волна (5.38)–(5.40) существует лишь в области гиперболичности уравнения (5.32), определяемой соотношением $\varphi_x > 0$.

5.4 Задачи

1. Построить и по возможности проинтегрировать инвариантную подмодель системы уравнений E по допускаемой подалгебре H

   (a) $E:\ u_t + uu_x + vu_y = 0,\ v_t + uv_x + vv_y = 0;$
   $H = \{t\partial_x + \partial_u,\ t\partial_y + \partial_v\}.$

   (b) $E:\ u_t - u^4 u_{xx} = 0;\quad H = \{2t\partial_t + x\partial_x,\ 2x\partial_x + u\partial_u\}.$

   (c) $E:\ u_t = u_{zz} - p_x,\ T_t = T_{zz} - uT_x,\ p_z = T;$

      i. $H = \partial_x + \beta\partial_z;$

      ii. $H = \{\partial_t,\ x\partial_x + u\partial_u + 2p\partial_p + 2T\partial_T\}.$

   (d) $E:\ u_t + uu_x + gh_x = 0,\ h_t + (uh)_x = 0;$

      i. $H = \alpha t\partial_t + (\alpha+1)x\partial_x + u\partial_u + 2h\partial_h;$

      ii. $H = \partial_t + t\partial_x + \partial_u;$

      iii. $H = t\partial_t + (t+x)\partial_x + \partial_u;$

      iv. $H = \{t\partial_t + x\partial_x,\ x\partial_x + u\partial_u + 2h\partial_h\};$

      v. $H = \{\partial_t + t\partial_x + \partial_u,\ t\partial_t + 2x\partial_x + u\partial_u + 2h\partial_h\}.$

   (e) $E:\ u_t + uu_x + vu_y + gh_x = fv,$
   $v_t + uv_x + vv_y + gh_y = -fu,\ h_t + (uh)_x + (vh)_y = 0;$

      i. $H = \{\partial_t,\ \partial_y\};$

      ii. $H = \{\partial_x,\ \partial_y\};$

      iii. $H = \{\partial_y,\ \partial_t - f\partial_x\};$

      iv. $H = \{\partial_t,\ y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v\};$

      v. $H = \{y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v,\ x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v + 2h\partial_h\};$

      vi. $H = \{\partial_t + \alpha(y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v),\ x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u +$
      $+ v\partial_v + 2h\partial_h\};$

vii. $Y = \{\partial_y,\ (1-\cos(ft))\partial_x + \sin(ft)\partial_y +$
$+ f\sin(ft)\partial_u + f\cos(ft)\partial_v\}.$

2. Показать, что уравнения двумерного движения политропного газа с показателем адиабаты $\gamma = 2$

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x + vu_y + 2cc_x = 0,\\ &v_t + uv_x + vv_y + 2cc_y = 0,\\ &c_t + uc_x + vc_y + 2^{-1}c(u_x + v_y) = 0 \end{aligned} \tag{5.41}$$

имеет инвариантное относительно подалгебры $\{X, Y, Z\}$

$$\begin{aligned} &X = \partial_x + t\partial_y + \partial_v,\ Y = \partial_y - t\partial_x - \partial_u,\\ &Z = (t^2+1)\partial_t + (tx+y)\partial_x + (ty-x)\partial_y - tc\partial_c +\\ &+(x - tu + v)\partial_u + (y - tv - u)\partial_v \end{aligned}$$

решение нулевого ранга

$$u = \frac{tx - ay}{t^2+1},\ v = \frac{x + aty}{a(t^2+1)},\ c = \frac{c_0}{\sqrt{t^2+1}} \quad (a,\ c_0 = \mathrm{const}).$$

3. Показать, что уравнения подмодели, определяющей частично инвариантное решение системы (5.41) по подалгебре $H = \{\partial_y,\ t\partial_y + \partial_v\}$, имеют вид

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x + 2cc_x = 0,\ c_t + uc_x + 2^{-1}c(u_x + v_1) = 0,\\ &v_{1t} + uv_{1x} + v_1^2 = 0,\ v_{0t} + uv_{0x} + v_0 v_1 = 0, \end{aligned}$$

где $u = u(t,x)$, $c = c(t,x)$, $v = v_1(t,x)y + v_0(t,x)$. Указать ранг и дефект этого решения.

4. Выяснить, возможно ли построение частично инвариантных решений уравнений (5.41) по подалгебрам

(a) $H = \{\partial_t,\ -t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v + c\partial_c\}$;

(b) $H = \{\partial_t,\ t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y - tc\partial_c + (x - tu)\partial_u + (y - tv)\partial_v,$
$2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y - c\partial_c - u\partial_u - v\partial_v\}$.

6 Оптимальные системы подалгебр

В предыдущем параграфе показано, что каждая из подалгебр допускаемой алгебры порождает некоторое инвариантное или частично инвариантное решение рассматриваемого уравнения. Разные подалгебры могут, вообще говоря, порождать одно и то же решение. В связи с этим возникает вопрос о наиболее оптимальном использовании свойств симметрий уравнения для описания его точных решений. Другими словами, требуется указать «наименьший» набор подалгебр, с помощью которых можно получить все существенно различные (не сводящиеся одно к другому заменой переменных) инвариантно-групповые решения рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. «Уменьшение» бесконечного множества Ω подалгебр $H \in L_r$ возможно на основе важного понятия *подобия подалгебр*, которое объясняется ниже.

6.1 Автоморфизмы и дифференцирования алгебр Ли

Автоморфизмом алгебры Ли L называется невырожденное линейное преобразование $A : L \to L$, сохраняющее коммутатор, т.е. для любых $X, Y \in L$

$$A[X, Y] = [AX, AY]. \tag{6.1}$$

Предположим, что автоморфизмы непрерывным образом зависят от параметра и образуют локальную группу Ли. С каноническим параметром получим

$$A(t + s) = A(t)A(s), \quad A(0) = I. \tag{6.2}$$

Определение 48. Группа линейных преобразований, удовлетворяющая свойствам (6.1), (6.2) называется группой автоморфизмов алгебры Ли L и обозначается $\operatorname{Aut} L$.

Дифференцирование равенства (6.1) по параметру t при $t = 0$ дает соотношение, мотивирующее следующее определение.

Определение 49. Дифференцированием алгебры Ли L называется линейное отображение $d : L \to L$, удовлетворяющее для любых $X, Y \in L$ равенству

$$d[X, Y] = [dX, Y] + [X, dY]. \tag{6.3}$$

Множество всех дифференцирований данной алгебры Ли L само образует алгебру Ли с коммутатором $[d_1, d_2] = d_1 d_2 - d_2 d_1$, которая называется алгеброй дифференцирований алгебры Ли L и обозначается D_L.

Алгебра дифференцирований D_L играет роль алгебры Ли для группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} L$.

Теорема 23. *Для любой однопараметрической подгруппы группы автоморфизмов $A(t) \subset \operatorname{Aut} L$ отображение $a = \frac{dA}{dt}|_{t=0}$ является дифференцированием $a \in D_L$. Обратно, любое дифференцирование $a \in D_L$ позволяет восстановить однопараметрическую группу автоморфизмов $A(t) \subset \operatorname{Aut} L$ из решения уравнений Ли*

$$\frac{dA}{dt} = aA, \quad A(0) = I. \tag{6.4}$$

Решением уравнений (6.4) является экспоненциальное преобразование $A = \exp(ta)$. Удобно также записать уравнения (6.4) в терминах конечных преобразований элементов алгебры Ли L. А именно, пусть $\overline{X} = AX$, $X \in L$, $A \in \operatorname{Aut} L$. Тогда уравнения (6.4) принимают вид

$$\frac{d\overline{X}}{dt} = a\overline{X}, \quad \overline{X}|_{t=0} = X. \tag{6.5}$$

В алгебре дифференцирований D_L большую роль играет идеал, образованный так называемыми внутренними дифференцированиями алгебры L.

Определение 50. Для каждого $X \in L$ дифференцирование $\operatorname{ad} X \in D_L$, действующее по правилу

$$(\operatorname{ad} X)Y = [X, Y], \quad Y \in L \tag{6.6}$$

называется внутренним дифференцированием алгебры L. Множество всех внутренних дифференцирований $\operatorname{ad} L = \{\operatorname{ad} X | X \in L\}$ является идеалом в D_L и называется алгеброй внутренних дифференцирований L или присоединенной алгеброй. Автоморфизмы, порождаемые внутренними дифференцированиями $\operatorname{ad} L$ по формуле (6.4), называются внутренними автоморфизмами алгебры Ли L. Группа внутренних автоморфизмов обозначается $\operatorname{Int} L = \{\exp(t \operatorname{ad} X) \mid X \in L\}$.

Для определения действия группы внутренних автоморфизмов $\operatorname{Int} L$ на элементы алгебры $X \in L$ удобно пользоваться уравнениями (6.5), которые в данном случае имеют вид

$$\frac{d\overline{X}}{dt} = [Y, \overline{X}], \quad \overline{X}|_{t=0} = X, \quad Y \in L. \tag{6.7}$$

Пример 31. В качестве примера рассмотрим алгебру Ли, допускаемую уравнениями околозвукового движения газа

$$u_y = v_x, \quad v_y = -uu_x.$$

Базис допускаемой алгебры L_4 образуют следующие операторы

$$\begin{aligned} &X_1 = (-xv + yu^2)\partial_x - (xu + 2yv)\partial_y + 2uv\partial_u + (-\tfrac{2}{3}u^2 + \tfrac{3}{2}v^2)\partial_v, \\ &X_2 = x\partial_x + 2y\partial_y - 2u\partial_u - 3v\partial_v, \\ &X_3 = \partial_v, \quad X_4 = x\partial_x + y\partial_y. \end{aligned}$$

Таблица коммутаторов алгебры L_4 имеет вид

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	$3X_1$	X_2	0
X_2	$-3X_1$	0	$3X_3$	0
X_3	$-X_2$	$-3X_3$	0	0
X_4	0	0	0	0

Автоморфизмом алгебры L_4 является, например, преобразование

$$\overline{X_1} = X_1 + t_1X_4, \quad \overline{X_2} = X_2 + t_2X_4, \quad \overline{X_3} = X_3 + t_3X_4, \quad \overline{X_4} = X_4$$

с произвольными параметрами t_i. Однопараметрической подгруппе этой группы автоморфизмов, отвечающей изменению параметра t_1 соответствует дифференцирование алгебры L_4, действующее по правилу

$$d : \overline{X_1} = X_4, \quad \overline{X_2} = 0, \quad \overline{X_3} = 0, \quad \overline{X_4} = 0. \tag{6.8}$$

Аналогично выглядят дифференцирования, отвечающие однопараметрическим подгруппам, порожденным параметрами t_2 и t_3. Построим внутренние дифференцирования, отвечающие базисным операторам X_i. Их действие на произвольный элемент алгебры $X = x^i X_i \in L_4$ задается следующим образом

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{ad} X_1)X &= [X_1, X] = 3x^2 X_1 + x^3 X_2, \\
(\operatorname{ad} X_2)X &= [X_2, X] = -3x^1 X_1 + 3x^3 X_3, \\
(\operatorname{ad} X_3)X &= [X_3, X] = -x^1 X_2 - 3x^2 X_3, \\
(\operatorname{ad} X_4)X &= [X_4, X] = 0.
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

Видно, что дифференцирование (6.8) не является внутренним, так как не совпадает ни с каким из отображений (6.9).

Внутренние автоморфизмы, порождаемые внутренними дифференцированиями (6.9), вычисляются следующим образом. Достаточно вычислить внутренние автоморфизмы, порождаемые базисными элементами алгебры L_4. Предположим, что под действием внутреннего автоморфизма оператор $X = x^i X_i$ переходит в $\overline{X} = \overline{x}^i X_i$. Для автоморфизма, порождаемого X_1 в силу (6.9) из (6.7) имеем

$$
\frac{d\overline{X}}{dt_1} = [X_1, \overline{X}] = 3\,\overline{x}^2 X_1 + \overline{x}^3 X_2, \quad \overline{x}^i|_{t_1=0} = x^i, \quad i = 1, \ldots, 4. \tag{6.10}
$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных элементах X_i в обеих частях равенства (6.10), получаем систему уравнений на координаты преобразованного оператора $\overline{X}$:

$$
\frac{d\overline{x}^1}{dt_1} = 3\overline{x}^1, \quad \frac{d\overline{x}^2}{dt_1} = \overline{x}^3, \quad \frac{d\overline{x}^3}{dt_1} = 0, \quad \frac{d\overline{x}^4}{dt_1} = 0, \quad \overline{x}^i|_{t=0} = x^i, \quad i = 1, \ldots, 4.
$$

Отсюда, преобразования координат оператора X под действием внутреннего автоморфизма, соответствующего элементу X_1 имеет вид

$$
A_1(t_1): \quad \overline{x}^1 = x^1 + 3t_1 x^2 + \frac{3t_1^2}{2} x^3, \quad \overline{x}^2 = x^2 + t_1 x^3, \quad \overline{x}^3 = x^3, \quad \overline{x}^4 = x^4. \tag{6.11}
$$

К примеру, оператор X_2 под действием автоморфизма $\exp(t \operatorname{ad} X_1)$ переходит в $-3tX_1 + X_2$. Аналогичным образом вычисляются внутренние автоморфизмы, порождаемые остальными базисными элементами L_4. Результат вычислений таков

$$\begin{aligned}
&A_2(t_2): \quad \overline{x}^1 = e^{-3t_2}x^1, \quad \overline{x}^2 = x^2, \quad \overline{x}^3 = e^{3t_2}x^3, \quad \overline{x}^4 = x^4,\\
&A_3(t_3): \quad \overline{x}^1 = x^1,\ \overline{x}^2 = -t_3x^1 + x^2,\ \overline{x}^3 = \frac{3t_3^2}{2}x^1 - 3t_3x^2 + x^3,\ \overline{x}^4 = x^4,\\
&A_4(t_4): \quad \overline{x}^i = x^i, \quad i = 1, \ldots, 4.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Отметим, что оператор X_4 порождает центр в алгебре L_4. Из формул (6.12) видно, что элементы из центра алгебры Ли порождают только тривиальный внутренний автоморфизм. Произвольный автоморфизм группы $\operatorname{Int} L_4$ получается в виде композиции в произвольном порядке базисных автоморфизмов (6.11)–(6.12).

Пример 32. Часто оказывается, что допускаемая дифференциальными уравнениями группа бесконечномерна. Это означает, что групповые преобразования содержат не только групповые параметры — константы, но также и произвольные функции. Например, уравнения Эйлера или Навье-Стокса движения несжимаемой жидкости допускают преобразование перехода в систему координат, движущуюся прямолинейно с произвольным ускорением (обобщенное преобразование Галилея). Возникающие при этом силы инерции компенсируются за счет модификации давления. Допускаемая группа содержит четыре произвольные функции времени (обобщенные галилеевы переносы вдоль пространственных осей и добавление произвольной функции времени к давлению).

Аналогично бесконечномерным группам, можно рассматривать бесконечномерные алгебры Ли операторов. В них координаты операторов зависят от произвольных функций независимых переменных. При этом, конечно же, данные бесконечномерные векторные пространства должны быть замкнуты относительно операции коммутирования.

Для примера рассмотрим бесконечномерную алгебру Ли $L = L_2 \dot{\oplus} L_\infty$, порождаемую операторами

$$\begin{aligned}
&X_1 = \partial_t, \quad X_2 = t\partial_t - w\partial_w - 2p\partial_p,\\
&\langle\varphi\rangle_1 = \varphi(t)\partial_z + \dot{\varphi}(t)\partial_w - z\ddot{\varphi}(t)\partial_p, \quad \langle\psi\rangle_2 = \psi(t)\partial_p.
\end{aligned}$$

Операторы алгебры содержат две произвольные гладкие функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Коммутаторы в алгебре Ли L вычисляются следующим образом:

	X_1	X_2	$\langle\varphi_2\rangle_1$	$\langle\psi_2\rangle_2$
X_1	0	X_1	$\langle\dot\varphi_2\rangle_1$	$\langle\dot\psi_2\rangle_2$
X_2	$-X_1$	0	$\langle t\dot\varphi_2\rangle_1$	$\langle t\dot\psi_2\rangle_2$
$\langle\varphi_1\rangle_1$	$-\langle\dot\varphi_1\rangle_1$	$-\langle t\dot\varphi_1\rangle_1$	$\langle\varphi_2\ddot\varphi_1-\varphi_1\ddot\varphi_2\rangle_2$	0
$\langle\psi_1\rangle_2$	$-\langle\dot\psi_1\rangle_2$	$-\langle t\dot\psi_1\rangle_2$	0	0

Точка над φ или ψ обозначает дифференцирование по t. Для нахождения группы внутренних автоморфизмов алгебры L воспользуемся формулами (6.7). Запишем оператор $X\in L$ в виде

$$X=x^1X_1+x^2X_2+\langle\varphi\rangle_1+\langle\psi\rangle_2.$$

Преобразованные значения координат и функций будем обозначать теми же буквами с верхней чертой. Построим автоморфизмы, порождаемые базисными операторами алгебры L. Для оператора X_1 имеем

$$\begin{gathered}\frac{d\overline{X}}{dt_1}=[X_1,\overline{X}]=\overline{x}^2X_1+\langle\dot{\overline{\varphi}}\rangle_1+\langle\dot{\overline{\psi}}\rangle_2,\\ \overline{x}^i|_{t_1=0}=x^i,\quad i=1,2;\quad \overline{\varphi}|_{t_1=0}=\varphi(t),\quad \overline{\psi}|_{t_1=0}=\psi(t).\end{gathered}\tag{6.13}$$

Приравнивая коэффициенты при базисных операторах X_1 и X_2, а также функции времени в операторах $\langle\,\cdot\,\rangle_1$ и $\langle\,\cdot\,\rangle_2$ в обеих частях уравнения (6.13), получим для преобразованных координат $\overline{x}^1$ и $\overline{x}^2$ выражения

$$\overline{x}^1=x^1+t_1x^2,\quad \overline{x}_2=x^2.\tag{6.14}$$

Для функций $\overline{\varphi}$ и $\overline{\phi}$ имеем задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial t_1}=\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial t},\quad \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial t_1}=\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial t},\quad \overline{\varphi}|_{t_1=0}=\varphi(t),\quad \overline{\psi}|_{t_1=0}=\psi(t)$$

Из их решения получаем

$$\overline{\varphi}=\varphi(t+t_1),\quad \overline{\psi}=\psi(t+t_1).\tag{6.15}$$

Аналогично находится автоморфизм, порождаемый оператором X_2:

$$\overline{x}^1 = e^{-t_2} x^1, \quad \overline{x}_2 = x^2, \quad \overline{\varphi} = \varphi(e^{t_2} t), \quad \overline{\psi} = \psi(e^{t_2} t). \tag{6.16}$$

Далее, находим автоморфизм, порождаемый оператором $\langle \sigma \rangle_1$ с некоторой фиксированной функцией $\sigma(t)$:

$$\frac{d\overline{X}}{dt_3} = -\overline{x}^1 \langle \dot\sigma \rangle_1 - \overline{x}^2 \langle t\dot\sigma \rangle_1 + \langle \overline{\varphi}\ddot\sigma - \sigma\ddot{\overline{\varphi}} \rangle_2,$$
$$\overline{x}^i|_{t_3=0} = x^i, \quad i = 1, 2; \quad \overline{\varphi}|_{t_3=0} = \varphi(t), \quad \overline{\psi}|_{t_3=0} = \psi(t).$$

Имеем,

$$\overline{x}^1 = x^1, \quad \overline{x}^2 = x^2. \tag{6.17}$$

Далее в силу линейной зависимости операторов $\langle \varphi \rangle_1$ и $\langle \psi \rangle_2$ от функций φ и ψ получаем

$$\frac{d\overline{\varphi}}{dt_3} = -x^1\, \dot\sigma - x^2\, t\, \dot\sigma, \quad \frac{d\overline{\psi}}{dt_3} = \overline{\varphi}\ddot\sigma - \sigma\ddot{\overline{\varphi}}.$$

Интегрированием находим

$$\overline{\varphi} = \varphi - t_3(x^1 + x^2 t)\dot\sigma,$$
$$\overline{\psi} = \psi + t_3(\ddot\sigma\varphi - \sigma\ddot\varphi) - \tfrac{1}{2} t_3^2 (x^1 + t x^2)\big(\dot\sigma\ddot\sigma - \sigma\dddot\sigma\big) + t_3^2\, x^2 \sigma\ddot\sigma.$$

В силу произвольности функции σ можно сделать формальную замену $t_3\sigma \to \sigma$ для упрощения формул преобразования функций φ и ψ:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} &= \varphi - (x^1 + x^2 t)\dot\sigma, \\ \overline{\psi} &= \psi + (\ddot\sigma\varphi - \sigma\ddot\varphi) - \tfrac{1}{2}(x^1 + t x^2)\big(\dot\sigma\ddot\sigma - \sigma\dddot\sigma\big) + x^2 \sigma\ddot\sigma. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Наконец, для автоморфизма, порождаемого оператором $\langle \tau \rangle_2$ с некоторой фиксированной функцией τ получаем

$$\frac{d\overline{X}}{dt_4} = -\overline{x}^1 \langle \dot\tau \rangle_2 - \overline{x}^2 \langle t\dot\tau \rangle_2.$$

Отсюда для преобразованных значение координат находим

$$\overline{x}^1 = x^1, \quad \overline{x}^2 = x^2, \quad \overline{\varphi} = \varphi, \quad \overline{\psi} = \psi - (x^1 + tx^2)\dot{\tau}. \tag{6.19}$$

Для простоты комбинация $t_4\tau$ заменена на τ. Окончательно, таблица внутренних автоморфизмов алгебры L имеет вид

	$\overline{x}^1$	$\overline{x}^2$	$\overline{\varphi}(t)$	$\overline{\psi}(t)$
$A_1(t_1)$	$x^1 + t_1x^2$	x^2	$\varphi(t+t_1)$	$\psi(t+t_1)$
$A_2(t_2)$	$e^{-t_2}x^1$	x^2	$\varphi(e^{t_2}t)$	$\psi(e^{t_2}t)$
$A_3(\sigma(t))$	x^1	x^2	$\varphi - (x^1 + x^2t)\dot{\sigma}$	Ψ
$A_4(\tau(t))$	x^1	x^2	$\varphi(t)$	$\psi - (x^1 + tx^2)\dot{\tau}$

Здесь $\Psi = \psi + (\ddot{\sigma}\varphi - \sigma\ddot{\varphi}) - \frac{1}{2}(x^1 + tx^2)\big(\dot{\sigma}\ddot{\sigma} - \sigma\dddot{\sigma}\big) + x^2\sigma\ddot{\sigma}$.

Для конечномерных алгебр L_r также удобно использовать координатное представление. Выбирается фиксированный базис

$$L_r = \{X_1, \dots, X_r\}.$$

Каждому элементу алгебры Ли $X = x^iX_i$ сопоставляется вектор-столбец $x = (x^1, \dots, x^r)^T$ из его координат. На r-ках координат алгебра Ли L_r естественным образом порождает структуру алгебры Ли с коммутатором

$$[x, y]^k = C^k_{ij}x^iy^j.$$

Здесь C^k_{ij} — структурный тензор алгебры L_r. Каждому линейному отображению $A : L \to L$ в координатном представлении соответствует действие некоторой $r \times r$ матрицы $||a^k_i||$ на вектор из координат:

$$\overline{x}^k = x^ia^k_i, \quad a^k_i = (AX_i)^k.$$

Здесь верхний индекс есть номер строки, а нижний — номер столбца матрицы. В частности, внутренним дифференцированиям $\operatorname{ad} X$ алгебры Ли L_r соответствует матрица

$$(\operatorname{ad} x)^k_j = C^k_{ij}x^i. \tag{6.20}$$

Базисные автоморфизмы группы $\mathrm{Int}\, L_r$ можно получить путем вычисления матричных экспонент $A(t_i) = \exp(t_i \mathrm{ad}\, e_i)$, где e_i — вектор состоящий из нулей и единицы на i-м месте. Также их можно найти из решения следующей системы уравнений Ли

$$A_j(t_j): \quad \frac{d\overline{x}^k}{dt_j} = C^k_{ij}\overline{x}^i, \quad \overline{x}^k|_{t_j=0} = x^k. \tag{6.21}$$

Произвольный внутренний автоморфизм имеет вид композиции конечного числа базисных автоморфизмов.

Пример 33. Построим матрицу внутреннего дифференцирования $\mathrm{ad}\, x$ для алгебры Ли L_4 из примера 31. Основным инструментом для этого является таблица коммутаторов алгебры L_4. В соответствии с ней ненулевыми компонентами структурного тензора являются $C^1_{12} = -C^1_{21} = 3$, $C^2_{13} = -C^2_{31} = 1$, $C^3_{23} = -C^3_{32} = 3$. Матрица $\mathrm{ad}\, x$ для вектора координат $x = (x^1, \ldots, x^4)^T$ есть

$$\mathrm{ad}\, x = \begin{pmatrix} -3x^2 & 3x^1 & 0 & 0 \\ -x^3 & 0 & x^1 & 0 \\ 0 & -3x^3 & 3x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С каждым из векторов e_i вычисление матричной экспоненты дает матричное представление для базисных автоморфизмов (6.11)–(6.12)

$$A_1(t_1) = \exp(t_1 \mathrm{ad}\, e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 3t_1 & 3t_1^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2(t_2) = \exp(t_2 \mathrm{ad}\, e_2) = \begin{pmatrix} e^{-3t_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3(t_3) = \exp(t_3 \mathrm{ad}\, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -t_3 & 1 & 0 & 0 \\ 3t_3^2/2 & -3t_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4(t_4) = \exp(t_3 \mathrm{ad}\, e_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.2 Основные определения. Построение оптимальных систем подалгебр для алгебр Ли малой размерности

При изучении свойств факторсистемы E/H уже вводилось понятие подобия подгрупп допускаемой группы G и говорилось о том, что из подобия подгрупп следует подобие порождаемых ими подмоделей (теорема 22). Ниже это же свойство описывается в терминах алгебры Ли.

Определение 51. Подалгебры $H, K \subset L$ называются *подобными*, если существует внутренний автоморфизм $A \in \mathrm{Int}L$, с которым $K = AH$.

Формула $\overline{x} = f(x, a)$ для преобразований в пространстве $\mathbb{R}^n$, принадлежащих группе $G_1(X)$, может рассматриваться как переход от системы координат x к системе координат $\overline{x}$. Для любого оператора $X \in L_r$, записанного в координатах x формулой

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

символом X' будет обозначаться тот же оператор, преобразованный к координатам $\overline{x}$. Пусть A — внутренний автоморфизм и функция $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — инвариант оператора X.

Лемма. *Если функция $J(x)$ есть инвариант оператора X, то $J(\overline{x})$ есть инвариант оператора $\overline{AX}$.*

Таким образом, операторы X и AX имеют одни и те же инварианты, записанные в разных системах координат x и $\overline{x}$. То же верно и для подалгебр. Переход от координат x к координатам $\overline{x}$ возможен и в системе дифференциальных уравнений, допускающих L_r. При таком переходе эта система сохранится (поскольку $X \in L_r$) и будет допускать алгебру Ли L'_r. Из леммы следует, что любое H–решение данной системы, которое определяется набором инвариантов подалгебры $H \in L_r$, заменой переменных $\overline{x} = f(x, a)$ будет переводиться в H'–решение преобразованной системы относительно того же самого набора инвариантов. Следовательно, *подобные подалгебры производят подобные подмодели.*

По отношению подобия все подалгебры заданной алгебры Ли разбиваются на классы эквивалентности.

Определение 52. Совокупность представителей классов подобных подалгебр (по одному от каждого класса) называется оптимальной системой подалгебр и обозначается ΘL. Совокупность представителей классов не подобных подалгебр фиксированной размерности s будем обозначать $\Theta_s L$.

В соответствии с теоремой 21 факторсистема E/H допускает преборазования из нормализатора $\operatorname{Nor}_L H/H$. Поэтому при построении оптимальной системы желательно, чтобы вместе с любой подалгеброй H в ΘL содержался и ее нормализатор $\operatorname{Nor}_L H$. Такая оптимальная система подалгебр называется *нормализованной*. Для любой алгебры Ли L нормализованная оптимальная система ΘL существует.

Рассмотрим вначале случай конечномерной алгебры Ли L_r. Каждый элемент этой алгебры может быть разложен по базису в виде $X = x^i X_i$. Подалгебра $M \subset L$ размерности s описывается набором своих базисных элементов

$$M = \{H_\alpha = x^i_\alpha X_i; \alpha = 1, \ldots, s\}.$$

Введем в рассмотрение матрицу из коэффициентов операторов H_α:

$$\xi = \begin{pmatrix} x^1_1 & \ldots & x^n_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x^1_s & \ldots & x^n_s \end{pmatrix}$$

Для удобства мы расположили координаты каждого из векторов H_α в строках матрицы ξ. Матрица ξ определяет некоторую s-мерную подалгебру в L только если выполнены следующие два условия:

- $\operatorname{rank} \xi = s$;
- выполнены условия подалгебры $[H_\alpha, H_\beta] = K^\gamma_{\alpha\beta} H_\gamma$.

На множестве матриц ξ действуют преобразования строк (B-преобразования) $H'_\alpha = \omega_\alpha^\beta H_\beta$, $\det\omega \neq 0$ и преобразования столбцов, определяемые внутренними автоморфизмами $A \in \operatorname{Int} L$: $\xi' = \xi A$. Требуется использовать данные преобразования с целью максимального упрощения матрицы ξ.

В случае алгебр Ли небольшой размерности ($r \leq 4$) построение оптимальной системы подалгебр не встречает существенных затруднений и вполне обозримо.

Пример 34. Построим оптимальную систему подалгебр алгебры Ли L_3 операторов

$$X_1 = y\partial_x - x\partial_y, \quad X_2 = z\partial_x - x\partial_z, \quad X_3 = z\partial_y - y\partial_z,$$

задающих группу вращений в $\mathbb{R}^3$. Выпишем таблицу коммутаторов

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	X_3	$-X_2$
X_2	X_3	0	X_1
X_3	X_2	$-X_1$	0

и приведем ненулевые структурные постоянные C_{ij}^k (напомним, что $[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$): $C_{12}^3 = 1$, $C_{13}^2 = -1$, $C_{23}^1 = 1$, $C_{21}^3 = -1$, $C_{31}^2 = 1$, $C_{32}^1 = -1$. Для вычисления группы внутренних автоморфизмов нужно решить систему уравнений (6.21). В результате интегрирования находим автоморфизмы $A_i(t_i)$:

$$\begin{aligned}
A_1(t_1): &\quad \bar{x}^1 = x^1, \quad \bar{x}^2 = x^2\cos t_1 + x^3\sin t_1, \quad \bar{x}^3 = x^3\cos t_1 - x^2\sin t_1;\\
A_2(t_2): &\quad \bar{x}^1 = x^1\cos t_2 - x^3\sin t_2, \quad \bar{x}^2 = x^2, \quad \bar{x}^3 = x^2\sin t_2 + x^3\cos t_2;\\
A_3(t_3): &\quad \bar{x}^1 = x^1\cos t_3 + x^2\sin t_3, \quad \bar{x}^2 = -x^1\sin t_3 + x^2\cos, \quad \bar{x}^3 = x^3.
\end{aligned}$$

Представителем размерности 3 является сама рассматриваемая алгебра Ли: $N_1 = L_3$. Действительно, матрица трехмерной подалгебры имеет размеры 3×3 и невырождена, а значит при помощи B-преобразований всегда может быть приведена к единичной.

Представители размерности 2. Здесь матрица произвольной подалгебры имеет вид

$$\xi = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{pmatrix}.$$

Необходимо рассмотреть все возможности расположения рангового минора в ξ.

1) Ранговый минор находится в последних двух столбцах. B-преобразованиями всегда можно добиться следующего

$$\xi = \begin{pmatrix} x^1 & 1 & 0 \\ y^1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем $H_1 = x^1 X_1 + X_2$, $H_2 = y^1 X_1 + X_3$. Проверим выполнение условия подалгебры:

$$[H_1, H_2] = [x^1 X_1 + X_2, y^1 X_1 + X_3] = -x^1 H_1 - y^1 H_2 + ((x^1)^2 + (y^1)^2 + 1) X_1.$$

В данном случае при любых вещественных значениях x^1 и y^1 условие того, что операторы H_1 и H_2 образуют подалгебру невозможно, поскольку $(x^1)^2 + (y^1)^2 + 1 \neq 0$.

2) Ранговый минор находится в первом и третьем столбцах ξ:

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 1 \end{pmatrix}$$

(элемент $x^2 = 0$, иначе сводится к предыдущему). В этом случае $H_1 = X_1$, $H_2 = y^2 X_2 + X_3$. Условие подалгебры не выполняется, так как коммутатор

$$[H_1, H_2] = [X_1, y^2 X_2 + X_3] = y^2 H_2 - (1 + (y^2)^2) X_2$$

не выражается через H_1 и H_2.

3) Ранговый минор ξ находится в первых двух столбцах. Опять же, мы исключаем уже рассмотренные случаи.

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие подалгебры также не выполняется, поскольку

$$[H_1, H_2] = [X_1, X_2] = X_3$$

не выражается через линейную комбинацию H_i. Следовательно, представителей размерности 2 в оптимальной системе подалгебр в данном примере нет. Это означает, что рассматриваемая алгебра L_3, соответствующая группе вращений $SO(3)$ *не содержит двумерных подалгебр.*

Представители размерности 1. Очевидно, что действием автоморфизмов A_2, A_3 и нормировкой вектор $\xi = (x^1, x^2, 1)$ можно привести к виду $\xi' = (0, 0, 1)$. Поэтому в оптимальную систему подалгебр включаем одномерный представитель $N_2 = \{X_3\}$. Заметим, что выбор представителей оптимальной системы подалгебр не является однозначным. Действительно, в качестве элемента M_1 можно выбрать любую фиксированную линейную комбинацию операторов X_i.

Таким образом, оптимальная система подалггебр ΘL_3 рассматриваемой алгебры L_3 содержит следующие представители:

$$N_1 = L_3, \quad N_2 = \{X_3\}, \quad N_3 = \{0\}.$$

Представители N_1 и N_2 являются самонормализованными (подалгебры совпадают со своими нормализаторами); нормализатором нулевой алгебры N_3 является вся алгебра L_3.

6.3 Двухшаговый алгоритм

Для построения оптимальных систем подалгебр алгебры Ли размерности $r \geq 5$ целесообразно применять двухшаговый алгоритм, предложенный Л.В. Овсянниковым [4]. Реализация двухшагового алгоритма основана на композиционном ряде идеалов для L:

$$L \supset J_k \supset J_{k-1} \supset \ldots \supset J_1 \supset \{0\}. \tag{6.22}$$

Здесь каждая из подалгебр J_s является идеалом в L. Удобно выбрать базис в L так, чтобы каждый из идеалов порождался набором первых базисных векторов алгебры Ли L:

$$J_s = \{X_1, \ldots, X_{r_s}\}.$$

Необходимо проверить, на каких шагах ряда (6.22) возможно разложение алгебры L в полупрямую сумму идеала J и подалгебры N: $L = J \dot{\oplus} N$. Выбирается некоторое такое разложение. Группа внутренних автоморфизмов $\operatorname{Int} L$ разбивается соответственно:

$$\operatorname{Int} L = A_J A_N, \;\; A_J = \{\exp(t \operatorname{ad} X) | X \in J\}, \;\; A_N = \{\exp(t \operatorname{ad} X) | X \in N\}.$$

Автоморфизмы A_J действуют тривиально на подалгебре N (автоморфизмы действуют «справа-налево»). Матрица ξ координат элементов подалгебры также при помощи B-преобразований всегда может быть приведена к блочному виду:

$$\xi = \left(\begin{array}{c|c} T & N_k \\ \hline J_s & 0 \end{array} \right) \tag{6.23}$$

Здесь блок N_k отвечает части координат, относящихся к N, блоки T и J_s отвечают координатам идеала J.

Вначале нужно построить оптимальную систему подалгебр ΘN относительно группы внутренних автоморфизмов A_N. Другие внутренние автоморфизмы алгебры L на этом блоке действуют тривиально. Затем отдельно конструируется ΘJ относительно автоморфизмов A_J. После этого, для каждого $N_k \in \Theta N$ и $J_s \in \Theta J$ составляется матрица вида (6.23) с неопределенным блоком T. Она подвергается дополнительным упрощениям за счет преобразований из стабилизатора алгебры N_k:

$$\operatorname{St} N_k = \{A \in \operatorname{Int} L | AN_k = N_k\}.$$

Полученные при этом представители образуют оптимальную систему подалгебр ΘL.

На последнем этапе полученную оптимальную систему подалгебр необходимо привести к нормализованной. Т.е. воспользоваться произволом в выборе представителей оптимальной системы с тем, чтобы для каждой подалгебры $M \in \Theta L$ было выполнено $\operatorname{Nor}_L M \in \Theta L$. Этого можно добиться, действуя «сверху-вниз», т.е. начиная с представителей оптимальной системы старших размерностей и двигаясь к младшим размерностям модифицировать подалгебры оптимальной системы так, чтобы их нормализаторы попадали в ту же оптимальную систему.

Замечание 5. Приведенный двухшаговый алгоритм можно использовать несколько раз, на каждом шаге композиционного ряда (6.22), допускающем разложение алгебры L в полупрямую сумму идеала и подалгебры.

Пример 35. Уравнения мелкой воды

$$u_t + uu_x + h_x = 0, \quad h_t + (uh)_x = 0 \tag{6.24}$$

допускают алгебру Ли L_5 операторов

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_t,\ X_3 = t\partial_x + \partial_u, \\ &X_4 = t\partial_t + x\partial_x,\ X_5 = x\partial_x + u\partial_u + 2h\partial_h. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Требуется построить оптимальную систему подалгебр для данной алгебры Ли L_5.

Вычислим таблицу коммутаторов

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0	X_1	X_1
X_2	0	0	X_1	X_2	0
X_3	0	$-X_1$	0	0	X_3
X_4	$-X_1$	$-X_2$	0	0	0
X_5	$-X_1$	0	$-X_3$	0	0

Отметим, что данная алгебра Ли является разрешимой, поскольку $DL = \{X_1, X_2, X_3\}$, $D^2L = \{X_1\}$, $D^3L = \{0\}$. Композиционный ряд идеалов с максимальным числом разложений имеет вид

$$L_5 \supset \{X_1, X_2, X_3, X_4\} \supset \{X_1, X_2, X_3\} \supset \{X_1, X_2\} \supset \{X_1\} \supset \{0\}.$$

На каждом шаге этого композиционного ряда возможно разложение L_5 в полупрямую сумму идеала и подалгебры. Матрица присоединенного представления имеет вид

$$\operatorname{ad} x = \begin{pmatrix} -x^4 - x^5 & -x^3 & x^2 & x^1 & x^1 \\ 0 & -x^4 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -x^5 & 0 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решения уравнений (6.21) задают базисные преобразования группы внутренних автоморфизмов:

$$\begin{aligned}
&A_1(t_1): \ \bar{x}^1 = x^1 - t_1(x^4 + x^5); && \\
&A_2(t_2): \ \bar{x}^1 = x^1 - t_2 x^3, && \bar{x}^2 = x^2 - t_2 x^4, \\
&A_3(t_3): \ \bar{x}^1 = x^1 + t_3 x^2, && \bar{x}^3 = x^3 - t_3 x^5; \\
&A_4(t_4): \ \bar{x}^1 = x^1 \exp(t_4), && \bar{x}^2 = x^2 \exp(t_4); \\
&A_5(t_5): \ \bar{x}^1 = x^1 \exp(t_5), && \bar{x}^3 = x^3 \exp(t_5).
\end{aligned}$$

Отметим, что автоморфизмы действуют «справа-налево», т.е. преобразования координат x^i не зависят от величин координат x^j при $j < i$. Инвариантами группы $A = \operatorname{Int} L_5$ являются x^4, x^5. Заметим, что уравнения (6.24) не меняются при замене переменных

$$1)\ t \to -t,\ u \to -u; \quad 2)\ x \to -x,\ u \to -u; \quad 3)\ t \to -t,\ x \to -x.$$

Такие преобразования называются дискретными преобразованиями и являются инволюциями (повторное применение дает тождественное преобразование). При этом операторы преобразуются следующим образом

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 :\ (X_2, X_3) \to (-X_2, -X_3); \quad \varepsilon_2 :\ (X_1, X_3) \to (-X_1, -X_3); \\ &\varepsilon_3 :\ (X_1, X_2) \to (-X_1, -X_2). \end{aligned}$$

Далее выберем разложение алгебры Ли L_5 в полупрямую сумму идеала и подалгебры: $L_5 = J \dot{\oplus} N$. Общего правила выбора такого разложения нет, но обычно удобно выбирать идеал и подалгебру так, чтобы их размерности были близки. Выберем разложение $J = \{X_1, X_2\}$ — идеал, $N = \{X_3, X_4, X_5\}$ — подалгебра.

Первый этап алгоритма состоит в построении оптимальной системы подалгебр ΘN подалгебры N. Представителем размерности 3 является сама подалгебра $N = N_1$. Рассмотрим представители размерности 2:

$$\xi = \begin{pmatrix} x^3 & 1 & 0 \\ y^3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Автоморфизм A_3 позволяет обратить в нуль y^3. Проверка условия подалгебры $[x^3X_3+X_4, X_5] = x^3X_3$ влечет равенство нулю x^3. Поэтому $N_2 = \{X_4, X_5\} \in \Theta N$.

Далее,

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y^4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действие автоморфизмов тривиально, так как y^4 — инвариант группы внутренних автоморфизмов. Условие подалгебры в данном случае выполнено $[X_3, y^4X_4 + X_5] = X_3$. В оптимальную систему ΘN записываем представителя $N_3 = \{X_3, \alpha X_4 + X_5\}$, где α произвольный вещественный параметр (это бесконечная серия не подобных подалгебр!).

Последний вариант:

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Условие подалгебры выполнено, поэтому $N_4 = \{X_3, X_4\} \in \Theta N$.

Рассмотрим одномерные подалгебры. Пусть $\xi = (x^3, x^4, 1)$. Действием автоморфизма A_3 обращаем в нуль x^3. Подалгебра $N_5 = \{\alpha X_4 + X_5\} \in \Theta N$. Следующий случай $\xi = (x^3, 1, 0)$. Автоморфизмом A_5 и инволюцией ε_1 элемент x^3 можно обратить в нуль или единицу. Таким образом, подалгебры $N_6 = \{X_3 + X_4\}$ и $N_7 = \{X_4\}$ принадлежат ΘN. Заключительный вариант $\xi = (1, 0, 0)$ дает подалгебру $N_8 \in \Theta N$.

Результаты построения ΘN приведены в таблице. Отметим, что оптимальная система подалгебр ΘN сразу получилась нормализованной.

Подалгебра	Базис	$\mathrm{Nor}_N N_j$
N_1	X_3, X_4, X_5	N_1
N_2	X_4, X_5	N_2
N_3	$X_3, \alpha X_4 + X_5$	N_1
N_4	X_3, X_4	N_1
N_5	$\alpha X_4 + X_5$	N_2
N_6	$X_3 + X_4$	N_4
N_7	X_4	N_1
N_8	X_3	N_1
N_9	0	N_1

Оптимальная система подалгебр ΘJ строится элементарно. Внутренние автоморфизмы алгебры J действуют тривиально в силу абелевости J. Оптимальная система состоит из одного двумерного представителя $J_1 = J$, двух одномерных: $J_2 = \{\alpha X_1 + X_2\}$ и $J_3 = \{X_1\}$, и нулевой подалгебры $J_4 = \{0\}$. Эта оптимальная система также является нормализованной в J, поскольку нормализатор любого его представителя есть J_1.

На втором этапе строятся оптимальные системы $J \dot{\oplus} N_k$ $(k = 1, ..., 9)$.

Представителем размерности 5 является сама рассматриваемая алгебра Ли $L_5 = J \oplus N_1$.

Представители размерности 4 получаются в результате объединения либо трехмерного представителя ΘN с одномерным представителем ΘJ, либо двух двумерных представителей этих оптимальных систем.

Случай 1 (используются представители N_1 и J_2):

$$\xi = \left(\begin{array}{cc|ccc} x^1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ y^1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ z^1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline u^1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

В этой матрице использованы B-преобразования для того, чтобы занулить второй столбец блока T. Действиями автоморфизмов A_1, A_2 обратим в нуль x^1 и y^1. С помощью A_4 и инволюции ε_3 добиваемся того, что либо $z^1 = 1$, либо $z^1 = 0$. Проверим выполнение условия подалгебры. Очевидно, что коммутатор $[X_3, u^1 X_1 + X_2] = -X_1$ не выражается через операторы подалгебры. Следовательно, условие подалгебры не выполнено.

Выберем представители $N_1 \in \Theta N$ и $J_3 \in \Theta J$. Они дают

$$\xi = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & x^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Действием автоморфизма A_2 обращаем в нуль y^2. Условие подалгебры выполнено, если $x^2 = 0$, $z^2 = 0$. Таким образом, в ΘL_5 включаем представитель $\{X_1, X_3, X_4, X_5\}$.

Случай 2 (используются представители N_2 и J_1):

$$\xi = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Условие подалгебры выполнено, поэтому в ΘL_5 включаем представитель $\{X_1, X_2, X_4, X_5\}$.

Случай 3 (используются представители N_3 и J_1):

$$\xi = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Условие подалгебры выполнено при любом $\alpha \in \mathbb{R}$. Поэтому в ΘL_5 включается представитель $\{X_1, X_2, X_3, \alpha X_4 + X_5\}$.

Случай 4 (используются представители N_4 и J_1):

$$\xi = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Условие подалгебры выполнено, поэтому в ΘL_5 включаем представитель $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$.

Представители размерности 3 получаются сочетаниями 3+0, 2+1 и 1+2 размерностей представителей оптимальных систем ΘN и ΘJ.

Случай 1 (используются представители N_1 и J_4):

$$\xi = \left(\begin{array}{cc|ccc} x^1 & x^2 & 1 & 0 & 0 \\ y^1 & y^2 & 0 & 1 & 0 \\ z^1 & z^2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Действием автоморфизмов A_1 и A_2 добиваемся того, что $y^1 = y^2 = 0$. Проверим выполнение условия подалгебры ($H_1 = x^1X_1 + x^2X_2 + X_3,\ H_2 = X_4,\ H_3 = z^1X_1 + z^2X_2 + X_5$). Имеем, $[H_1, H_2] = x^1X_1 + x^2X_2$ и $[H_2, H_3] = -z^1X_1 - z^2X_2$. Очевидно, что при ненулевых x^i и z^i выразить эти коммутаторы через H_i невозможно, следовательно $x^1 = x^2 = z^1 = z^2 = 0$. С учетом этого $[H_1, H_3] = X_3 = H_1$ и в ΘL_5 включаем представитель $\{X_3, X_4, X_5\}$.

Случай 2 (используются представители N_2 и J_2):

$$\xi = \left(\begin{array}{cc|ccc} x^1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ y^1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline z^1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Действием автоморфизма A_1 зануляем x^1. Вычисление коммутаторов показывает, что условие подалгебры выполнено только при обращении в нуль y^1 и z^1. В ΘL_5 включаем представитель $\{X_2, X_4, X_5\}$.

Далее следует действовать по аналогии с предыдущим, аккуратно рассматривая все возможные случаи для представителей ранга 3, 2 и 1. Ввиду большого объема выкладок здесь они полностью не приводятся.

Оптимальная система ΘL_5 представлена в таблице 1. В первом столбце указывается ранг подалгебры r, во втором — порядковый номер i для каждого r. Тем самым каждый представитель индексируется парой чисел (r, i). В третьем столбце приведены N_k с помощью которых получены представители оптимальной системы подалгебр $J \oplus N_k$. В четвертом столбце приведены базисы подалгебр–представителей, записанные через операторы (6.25) в аббревиатурной форме: вместо оператора X_k указывается только его номер k. В последнем столбце указан нормализатор каждой подалгебры. В силу нормализованности подалгебры ΘL_5 нормализатор содержится в этой же таблице и поэтому указан только его индекс (r, i). В данном случае оптимальная система подалгебр ΘL_5 содержит 40 представителей.

Как видно из рассмотренных примеров, число представителей оптимальной системы подалгебр существенно увеличивается при возрастании размерности алгебры Ли. Уравнения газовой динамики для трехмерных неустановившихся движений допускают алгебру Ли операторов L_{11}. Оптимальная система подалгебр ΘL_{11} содержит 223 серии представителей [2]. В случае политропного газа оптимальные системы подалгебр ΘL_{13} и ΘL_{14} (политропный газ с $\gamma = 5/3$) содержат 1342 и 1826 представителей. Уравнения двумерных движений политропного газа с $\gamma = 2$ (5.41) допускают алгебру Ли L_9, оптимальная система подалгебр которой содержит 179 представителей.

r	i	N_k	Базис	Нормализатор
1	1	N_5	$\alpha 4 + 5$	2,1; $(\alpha = 0)$ 3,2; $(\alpha = -1)$ 3,3
	2		$1 - 4 + 5$	2,8 $(\alpha = -1)$
	3		2+5	2,6 $(\alpha = 0)$
	4	N_6	3+4	2,5
	5	N_7	4	3,1
	6	N_8	2+3	3,5
	7		3	4,1
	8	N_9	1	5,1
	9		2	4,2

Таблица 1: Оптимальная система подалгебр ΘL_5

r	i	N_k	Базис	Нормализатор
5	1	N_1	1,2,3,4,5	=5,1
4	1	N_1	2,3,4,5	=4,1
	2	N_2	1,2,4,5	=4,2
	3	N_3	$1, 2, 3, \alpha 4 + 5$	5,1
	4	N_4	1,2,3,4	5,1
3	1	N_1	3,4,5	=3,1
	2	N_2	2,4,5	=3,2
	3		1,4,5	=3,3
	4	N_3	$1, 3, \alpha 4 + 5$	=3,4 $(\alpha = 0)$; 5,1 $(\alpha = 0)$
	5		2+3,1,4+5	=3,5
	6		1,2+5,3	4,3 $(\alpha = 0)$
	7	N_4	1,3,4	4,1
	8	N_5	$1, 2, \alpha 4 + 5$	4,2
	9	N_6	1,2,3+4	4,4
	10	N_7	1,2,4	5,1
	11	N_8	1,2,3	5,1
2	1	N_2	4,5	=2,1
	2	N_3	$3, \alpha 4 + 5$	3,1
	3		2+3,4+5	=2,3
	4		$1 - 4 + 5, 3$	2,2 $(\alpha = -1)$
	5	N_4	3,4	3,1
	6	N_5	$2, \alpha 4 + 5$	3,2; $(\alpha = -1)$ 4,2
	7		$2, 1 - 4 + 5$	3,8 $(\alpha = -1)$
	8		$1, \alpha 4 + 5$	3,3; $(\alpha = 0)$ 4,2
	9		1,2+5	3,8 $(\alpha = 0)$
	10	N_6	1,3+4	3,7
	11	N_7	2,4	3,2
	12		1,4	4,1
	13	N_8	1,2+3	4,3 $(\alpha = 1)$
	14		1,3	5,1
	15	N_9	1,2	5,1

r	i	N_k	Базис	Нормализатор
1	1	N_5	$\alpha 4 + 5$	2,1; $(\alpha = 0)$ 3,2; $(\alpha = -1)$ 3,3
	2		$1 - 4 + 5$	2,8 $(\alpha = -1)$
	3		2+5	2,6 $(\alpha = 0)$
	4	N_6	3+4	2,5
	5	N_7	4	3,1
	6	N_8	2+3	3,5
	7		3	4,1
	8	N_9	1	5,1
	9		2	4,2

Отметим, что аналогичный двухшаговый подход может применяться и для бесконечномерных алгебр Ли $L = L_r \dot{\oplus} L_\infty$. Здесь существенную роль играет тот факт, что бесконечномерная часть L_∞ является идеалом в L. Т аким образом, в разложении идеал-подалгебра L_∞ играет роль идеала, а L_r — подалгебры. При этом обычно не ставится задача описания классов неподобных подалгебр *всех* размерностей, так как это практически сложно и пока не востребовано для приложений. В основном, ограничиваются построением оптимальных систем подалгебр малых размерностей.

Пример 36. Продемонстрируем построение оптимальных систем одно- и двумерных подалгебр для бесконечномерной алгебры Ли L из примера 32.

Подалгебры размерности 1. Базисный оператор одномерной подалгебры $L_1 \in L$ запишем в виде

$$X = x^1 X_1 + x^2 X_2 + \langle\varphi\rangle_1 + \langle\psi\rangle_2. \tag{6.26}$$

Заметим, что координата x^2 является инвариантом группы внутренних автоморфизмов. Предположим, что $x^2 \neq 0$. Без ограничения общности будем считать $x^2 = 1$. Тогда автоморфизмом A_1 с параметром $t_1 = -x^1$ можно сделать $x^1 = 0$. При этом изменяются функции ϕ и ψ, будем их измененные значения обозначать теми же буквами. Применение автоморфизма $A_3(\sigma)$ позволяет занулить функцию φ. Для этого σ выбирается так, что $\varphi - t\dot{\sigma} = 0$. Отметим, что для определения конкретного вида автоморфизма в данном случае нужно решать дифференциальное уравнение для функции $\sigma(t)$. Его решение, по крайней мере локально, существует. Наконец, применение автоморфизма $A_4(\tau)$ с надлежащей функцией $\tau(t)$ делает $\psi = 0$. Таким образом, любой одномерный оператор с ненулевой координатой x^2 эквивалентен оператору X_2.

Пусть $x^2 = 0$, но $x^1 \neq 0$. Последовательное применение автоморфизмов $A_3(\sigma)$ и $A_4(\tau)$ с подходящими функциями σ и τ делают $\varphi = \psi = 0$. Таким образом, базисный оператор эквивалентен оператору X_1.

Пусть $x^1 = x^2 = 0$, но $\varphi \neq 0$. Применение автоморфизма $A_3(\sigma)$ с функцией $\sigma(t)$, удовлетворяющей уравнению $\psi + \ddot{\sigma}\varphi - \ddot{\varphi}\sigma = 0$ позволяет занулить функцию ψ. Таким образом, базисный оператор сводится к $\langle\varphi\rangle_1$. В силу автоморфизмов A_1 и A_2 функции $\varphi(t)$, отличающиеся сдвигом или растяжением аргумента t являются эквивалентными. Ниже мы будем обозначать это записью $\langle\varphi\rangle_1 \mod A_1 A_2$. Важно, что данный оператор порождает *одномерную* подалгебру $\{\langle\varphi\rangle_1\}$ с произвольной, но *фиксированной* функцией φ.

Пусть $x^1 = x^2 = \varphi = 0$. Тогда базисным оператором является $\langle\psi\rangle_1 \mod A_1 A_2$. На этом классификация неподобных одномерных подалгебр алгебры L завершена. Оптимальная система одномерных подалгебр $\Theta_1 L$ такова:

$$\Theta_1 L: \quad \{X_1\}, \quad \{X_2\}, \quad \{\langle\varphi\rangle_1 \mod A_1 A_2\}, \quad \{\langle\psi\rangle_2 \mod A_1 A_2\}. \tag{6.27}$$

Подалгебры размерности 2. Рассматриваемая алгебра L имеет следующую структуру: $L = L_2 \dot{\oplus} L_\infty$. Причем, бесконечномерная часть L_∞ является идеалом в L, а L_2 — подалгеброй. Это естественное разложение в полупрямую сумму идеала и подалгебры можно использовать как основу применения двухшагового алгоритма. Оптимальная система подалгебр для подалгебры L_2 в силу предыдущего построения состоит из двух одномерных подалгебр $\{X_1\}$ и $\{X_2\}$, а также самой двумерной алгебры $L_2 = \{X_1, X_2\}$. Таким образом, двумерные подалгебры алгебры L получаются либо дополнением двумерной подалгебры, либо расширением одномерных и нульмерной подалгебр.

В первом случае запишем общий вид двумерной подалгебры следующим образом:

$$\{X_1 + \langle\varphi_1\rangle_1 + \langle\psi_1\rangle_2, \quad X_2 + \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2\}.$$

Здесь функции φ_i и ψ_i, $i = 1, 2$ являются пока неопределенными. Проверим условие подалгебры:

$$\begin{aligned}
&[X_1 + \langle\varphi_1\rangle_1 + \langle\psi_1\rangle_2, \quad X_2 + \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2] = \\
&\qquad = X_1 + \langle\dot\varphi_2\rangle_1 + \langle\dot\psi_2\rangle_2 - \langle t\dot\varphi_1\rangle_1 + \langle\varphi_2\ddot\varphi_1 - \varphi_1\ddot\varphi_2\rangle_2 - \langle t\dot\psi_1\rangle_2 = \\
&\qquad\qquad = X_1 + \langle\dot\varphi_2 - t\dot\varphi_1\rangle_1 + \langle\dot\psi_2 - t\dot\psi_1 + \varphi_2\ddot\varphi_1 - \varphi_1\ddot\varphi_2\rangle_2.
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Получившийся оператор должен линейно выражаться через базисные оператор подалгебры. Отсюда

$$\dot\varphi_2 - t\dot\varphi_1 = \varphi_1, \quad \dot\psi_2 - t\dot\psi_1 + \varphi_2\ddot\varphi_1 - \varphi_1\ddot\varphi_2 = \psi_1.$$

Из первого соотношения получаем $\varphi_2 = \alpha + t\varphi_1$ с произвольной константой α. Далее применяем автоморфизм $A_3(\varphi_1)$. Он приводит рассматриваемую подалгебру к следующему эквивалентному виду

$$\{X_1 + \langle\psi_1\rangle_2, \quad X_2 + \langle\alpha\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2\}$$

с некоторыми новыми функциями ψ_i. Вновь проверяем условие подалгебры:

$$[X_1 + \langle\psi_1\rangle_2, \; X_2 + \langle\alpha\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2] = X_1 + \langle\dot\psi_2\rangle_2 - \langle t\dot\psi_1\rangle_1.$$

Условие подалгебры выполнено только если

$$\dot\psi_2 - t\dot\psi_1 = \psi_1 \quad\Rightarrow\quad \psi_2 = \beta + t\psi_1.$$

Применяя автоморфизм $A_4(\psi_1)$, получаем эквивалентную серию подалгебр, зависящую от произвольных констант:

$$\{X_1, X_2 + \langle\alpha\rangle_1 + \langle\beta\rangle_2\}.$$

Она и заносится в оптимальную систему подалгебр.

Расширение одномерной подалгебры $\{X_1\}$ за счет идеала L_∞ дает

$$\{X_1 + \langle\varphi_1\rangle_1 + \langle\psi_1\rangle_2, \quad \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2\}.$$

Действие автоморфизмов $A_3(\sigma)$ и $A_4(\tau)$ с подходящими функциями σ и τ позволяет занулить функции φ_1 и ψ_1. Проверяем условие подалгебры:

$$[X_1, \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2] = \langle\dot\varphi_2\rangle_1 + \langle\dot\psi\rangle_2.$$

Из условия подалгебры получаем уравнения

$$\dot\varphi_2 = \alpha\varphi_2, \quad \dot\psi = \alpha\psi.$$

Следовательно, $\varphi = a\exp(\alpha t)$ и $\psi = b\exp(\alpha t)$. Использование автоморфизма A_2 позволяет сделать $\alpha = \pm 1$ или $\alpha = 0$. Таким образом, в оптимальную систему двумерных подалгебр заносятся следующие представители:

$$\{X_1, a\langle e^{\pm t}\rangle_1 + b\langle e^{\pm t}\rangle_2;\ a^2+b^2=1\}, \quad \{X_1, a\langle 1\rangle_1 + b\langle 1\rangle_2;\ a^2+b^2=1\}.$$

При расширении одномерной подалгебры $\{X_2\}$ аналогичным образом получаем следующую серию представителей классов эквивалентных подалгебр:

$$\{X_2, a\langle |t|^k\rangle_1 + b\langle |t|^k\rangle_2;\ a^2+b^2=1\}.$$

Здесь k, a и b — произвольные вещественные константы.

Осталось выполнить расширение нульмерной подалгебры L_2, т.е. рассмотреть двумерные подалгебры L вида

$$\{\langle\varphi_1\rangle_1 + \langle\psi_1\rangle_2, \quad \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2\}.$$

Будем считать, что $\varphi_1 \neq 0$. Действием автоморфизма A_3 можно занулить функцию ψ_1. Кроме того, оператор φ_1 будем рассматривать по модулю автоморфизмов A_1A_2. Проверяем условие подалгебры:

$$[\langle\varphi_1\rangle_1, \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2] = \langle\varphi_2\ddot{\varphi}_1 - \varphi_1\ddot{\varphi}_2\rangle_2.$$

Этот оператор должен линейно выражаться через базисные операторы рассматриваемой подалгебры. Различаются два случая: $\varphi_2 \neq 0$ и $\varphi_2 = 0$. В первом случае получившийся в результате коммутирования оператор должен занулиться, т.е. $\varphi_2\ddot{\varphi}_1 - \varphi_1\ddot{\varphi}_2 = 0$. Во втором условие подалгебры выполнено автоматически для любой функции ψ_2. Таким образом, в оптимальная система подалгебр пополняется следующими представителями:

$$\{\langle\varphi_1\rangle_1 \bmod A_1A_2, \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi\rangle_2; \varphi_2\ddot{\varphi}_1 - \varphi_1\ddot{\varphi}_2 = 0\},\ \{\langle\varphi\rangle_1 \bmod A_1A_2, \langle\psi\rangle_2\}.$$

Наконец, в случае $\varphi_i = 0$ единственным вариантом является представитель

$$\{\langle\psi_1\rangle_2 \mod A_1A_2, \langle\psi_2\rangle_2\}.$$

Таким образом, оптимальная система двумерных подалгебр состоит из следующих представителей:

$$\Theta_2 L: \quad \begin{aligned}
&\{X_1, X_2 + a\langle 1\rangle_1 + b\langle 1\rangle_2;\ a^2+b^2=1\},\\
&\{X_1, a\langle e^{\pm t}\rangle_1 + b\langle e^{\pm t}\rangle_2;\ a^2+b^2=1\},\\
&\{X_1, a\langle 1\rangle_1 + b\langle 1\rangle_2;\ a^2+b^2=1\},\\
&\{X_2, a\langle |t|^k\rangle_1 + b\langle |t|^k\rangle_2;\ a^2+b^2=1\}\\
&\{\langle\varphi_1\rangle_1 \mod A_1A_2, \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi\rangle_2;\ \ \varphi_2\ddot{\varphi}_1 - \varphi_1\ddot{\varphi}_2 = 0\},\\
&\{\langle\varphi\rangle_1 \mod A_1A_2, \langle\psi\rangle_2\},\\
&\{\langle\psi_1\rangle_2 \mod A_1A_2, \langle\psi_2\rangle_2\}.
\end{aligned}$$

Здесь k, a, b — вещественные константы, подчиненные указанным ограничениям; φ_i, ψ_i — произвольные, но фиксированные в каждой двумерной подалгебре функции. Аналогичным способом можно строить оптимальные системы подалгебр размерности 3 и выше.

Как и в случае конечномерных алгебр Ли, бывает полезно вычислить нормализаторы получившихся представителей оптимальной системы. При этом возможны специализации входящих в подалгебры функций и констант. Продемонстрируем вычисление нормализатора на примере одномерной подалгебры $\{\langle\varphi\rangle_1 \mod A_1A_2\}$. Вычисляем коммутатор базисного оператора алгебры с произвольным оператором из L:

$$[\langle\varphi\rangle_1, x^1X_1 + x^2X_2 + \langle\theta\rangle_1 + \langle\psi\rangle_2] = -x^1\langle\dot\varphi\rangle_1 - x^2\langle t\dot\varphi\rangle_1 + \langle\theta\ddot\varphi - \varphi\ddot\theta\rangle_2$$

Различаются следующие случаи. При произвольной *фиксированной* функции φ нормализатором является бесконечномерная подалгебра:

$$\mathrm{Nor}\,_L\{\langle\varphi\rangle_1\} = \{\langle\theta\rangle_1, \langle\psi\rangle_2;\ \theta\ddot\varphi = \varphi\ddot\theta\}$$

с произвольной функцией ψ и функцией θ, удовлетворяющей указанному равенству.

Далее, предположим, что функция φ удовлетворяет уравнению $(x^1 + tx^2)\dot\varphi = \alpha\varphi$. Различаются два случая: $x^2 \neq 0$ и $x^2 = 0$. В первом случае

$$\varphi = C|x^1 + x^2t|^{\alpha/x^2} \simeq |t|^k.$$

При выводе формулы использовано то, что функция φ задана по модулю автоморфизмов A_1A_2, действие которых позволило упростить вид функции. Общее решение уравнения $\theta\,\ddot\varphi = \varphi\,\ddot\theta$ при $\varphi = |t|^k$ есть $\theta = a|t|^k + b|t|^{1-k}$. Таким образом,

$$\mathrm{Nor}\,_L\{\langle|t|^k\rangle_1\} = \{X_2,\ \langle|t|^k\rangle_1,\ \langle|t|^{1-k}\rangle_1,\ \langle\psi\rangle_2\}.$$

При $x^2 = 0$

$$\varphi = Ce^{\alpha t} \simeq \begin{cases} e^{\pm t}, & \alpha \neq 0, \\ 1, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Имеем,

$$\mathrm{Nor}\,_L\{\langle e^{\pm t}\rangle_1\} = \{X_1,\ \langle e^t\rangle_1,\ \langle e^{-t}\rangle_1,\ \langle\psi\rangle_2\}.$$

Наконец, при $\varphi = \mathrm{const}$ нормализатор наиболее широкий:

$$\mathrm{Nor}\,_L\{\langle 1\rangle_1\} = \{X_1, X_2, \langle\theta\rangle_1, \langle\psi\rangle_2\} = L.$$

Таким образом, нормализатор подалгебры $\{\langle\varphi\rangle_1 \mod A_1A_2\}$ меняется в зависимости от вида функции φ.

6.4 Задачи

1. Построить оптимальные системы подалгебр для алгебр Ли L

   (a) L_3: $X_1 = \partial_x,\ \ X_2 = \partial_y,\ \ X_3 = x\partial_x + (x+y)\partial_y;$

   (b) L_3: $X_1 = \partial_x + \partial_p,\ \ X_2 = \partial_y + \partial_q,\ \ X_3 = y\partial_x - x\partial_y + q\partial_p - p\partial_q;$

   (c) L_3: $X_1 = \partial_t,\ \ X_2 = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y,\ \ X_3 = 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y;$

   (d) L_4: $X_1 = \partial_t,\ \ X_2 = \partial_x,\ \ X_3 = 2t\partial_t + x\partial_x,\ \ X_4 = 4t\partial_t - u\partial_u;$

   (e) L_4: $X_1 = \partial_t,\ \ X_2 = \partial_x,\ \ X_3 = t\partial_x + \partial_u,\ \ X_4 = 3t\partial_t + x\partial_x - 2u\partial_u.$

2. Построить оптимальные системы подалгебр для алгебр Ли L используя двухэтапный алгоритм

   (a) L_5: $X_1 = \partial_t,\ \ X_2 = \partial_x,\ \ X_3 = 2t\partial_t + x\partial_x,\ \ X_4 = 4t\partial_t - u\partial_u,\ \ X_5 = x^2\partial_x + xu\partial_u;$

   (b) L_6: $X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = t\partial_x + \partial_u,\ X_4 = t\partial_y + \partial_v,\ X_5 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v,\ X_6 = x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v;$

   (c) L_6: $X_1 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v,\ \ X_2 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w,\ \ X_3 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u,\ \ X_4 = \partial_t,$ $X_5 = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z,\ \ X_6 = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w.$

7 Методы интегрирования ОДУ

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) k-го порядка вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}) = 0. \tag{7.1}$$

Предположим, что уравнение (7.1) допускает непрерывную группу преобразований G_r пространства $\mathbb{R}^2(x, y)$. Нашей задачей является использование допускаемой группы преобразований с целью интегрирования в квадратурах или понижения порядка уравнения (7.1). Начнем со случая однопараметрической допускаемой группы симметрий.

7.1 Метод интегрирующего множителя

Этот метод годится в том случае, если исходное уравнение (7.1) первого порядка. Запишем его в эквивалентном виде дифференциальной 1-формы:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{7.2}$$

Предположим, что уравнение (7.2) допускает однопараметрическую группу симметрий G_1 с инфинитезимальным оператором

$$X = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y. \tag{7.3}$$

Напомним, что интегрирующим множителем для уравнения (7.2) является такая функция $\mu(x, y)$, при умножении на которую 1-форма, стоящая в левой части равенства (7.2) становится замкнутой, т.е. является полным дифференциалом некоторой функции.

Теорема 24. *Интегрирующим множителем для уравнения* (7.2)*, допускающего группу с инфинитезимальным оператором* (7.3) *является функция*

$$\mu = \frac{1}{\xi M + \eta N}.$$

Указанный метод не работает, когда $\xi M+\eta N = 0$. Этот случай соответствует тривиальной симметрии ОДУ первого порядка, задаваемой формулой (2.13).

7.2 Метод «выпрямления» допускаемого оператора

Этот метод работает для уравнений произвольного порядка. Итак, пусть уравнение (7.1) допускает группу преобразований с инфинитезимальным оператором (7.3). Сделаем замену переменных $(x, y) \to (t, u)$, приводящую оператор X к оператору переноса по u: $\widetilde{X} = \partial_t$. Для этого необходимо выбрать функции $t(x, y)$ и $u(x, y)$ так, чтобы

$$Xt(x, y) = 1, \quad Xu(x, y) = 0. \tag{7.4}$$

Функция u является инвариантом оператора X. Решение второго уравнения (7.4) дает функционально независимую с u функцию t. В новых переменных уравнение (7.1) имеет вид

$$\widetilde{F}(u, u', u'', \ldots, u^{(k)}) = 0.$$

Оно допускает оператор $\widetilde{X} = \partial_t$, а значит является автономным. Порядок этого уравнения понижается стандартной заменой $u' = p(u)$, $u'' = pp'$ и т.д.

Отыскание нужных функций $t(x, y)$, $u(x, y)$ требует интегрирование ОДУ. Это может быть сложной задачей. В частности, попытка применения данного метода для уравнения первого порядка и тривиальной симметрии (2.13) приводит к уравнению для нахождения инварианта t, в точности совпадающего с исходным уравнением. Таким образом, тривиальная симметрия никакой полезной информации об интегрировании уравнения не дает. Однако, для симметрий уравнений старших порядков или нетривиальных симметрий уравнений первого порядка данные методы являются очень действенными.

Пример 37. Уравнение

$$y'' = \frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy} \tag{7.5}$$

допускает двумерную группу преобразований, порождаемую операторами

$$X_1 = x\partial_x + (1/2)y\partial_y, \quad X_2 = x^2\partial_x + xy\partial_y.$$

Для понижения порядка уравнения воспользуемся оператором X_1. В качестве новой независимой переменной можно выбрать функцию $t = \ln x$. Инвариантом X_1 является функция $u = y/\sqrt{x}$. В терминах зависимости $u = u(t)$ производные переписываются следующим образом.

$$y = \sqrt{x}u(t) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{du}{dt} + \frac{u}{2}\right), \quad y'' = \frac{1}{x^{3/2}}\left(\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{u}{4}\right).$$

Уравнение в новых переменных становится автономным:

$$4u^2\frac{d^2u}{dt^2} - 4\frac{du}{dt} - u^3 + 2u = 0. \tag{7.6}$$

Замена переменных $u' = p(u)$ приводит к уравнению первого порядка

$$4u^2p\,p' - 4p - u^3 + 2u = 0.$$

Аналогичным образом можно понизить порядок уравнения, воспользовавшись оператором X_2. Для его «выпрямления» вводятся переменные $t = 1/x$, $u = y/x$. Пересчет производных дает

$$y = xu \quad \Rightarrow \quad y' = -t\,\frac{du}{dt} + u, \quad y'' = t^3\,\frac{d^2u}{dt^2}.$$

Уравнение переписывается в виде

$$u^2\,\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = 0. \tag{7.7}$$

Его порядок понижается тем же способом.

Отметим, что данный метод интегрирования уравнений обладает тем недостатком, что понижение порядка происходит в два этапа: вначале уравнение приводится к автономному, а затем стандартной заменой сводится к уравнению меньшего порядка. Следующий метод интегрирования, основанный на дифференциальных инвариантах допускаемой группы, позволяет проделать то же понижение порядка за один шаг.

7.3 Метод дифференциальных инвариантов

Рассмотрим действие группы G_1 в продолженном пространстве $\underset{k}{Z} = \mathbb{R}^{k+2}(x, y, y', \ldots, y^{(k)})$. Продолжение оператора X имеет вид $\underset{k}{X} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta_1\partial_{y'} + \ldots + \zeta_k\partial_{y^{(k)}}$, где коэффициенты ζ_i вычисляются по формулам (2.2), (2.3):

$$\zeta_1 = D\,\eta - y'D\,\xi, \quad \zeta_i = D\,\zeta_{i-1} - y^{(i)}D\,\xi. \tag{7.8}$$

Здесь D — оператор полного дифференцирования по x:

$$D = \partial_x + y'\partial_y + y''\partial_{y'} + \ldots. + y^{(i+1)}\partial_{y^{(i)}} + \ldots$$

Продолженный оператор $\underset{k}{X}$ имеет $k+1$ функционально независимых дифференциальных инвариантов. Таким образом, имеется один конечный инвариант (зависящий только от x и y), один инвариант первого порядка, и т.д. Связь между инвариантами разных порядков показывает следующее утверждение.

Теорема 25. *Для любых двух дифференциальных инвариантов группы G_1 $u(x,y,y',\dots,y^{(l)})$ и $v(x,y,y',\dots,y^{(k)})$ производная*
$$\frac{dv}{du} \equiv \frac{Dv}{Du}$$
также является дифференциальным инвариантом группы G_1.

Данная теорема дает возможность единообразно описать дифференциальные инварианты группы G_1 произвольного порядка в терминах ее инвариантов нулевого и первого порядков.

Следствие 1. *Если $t(x,y)$ и $u(x,y,y')$ — дифференциальные инвариантны группы G_1, то ее дифференциальным инвариантом порядка $k+1$ является функция $d^k u/dt^k$.*

Отсюда и из теоремы о представлении неособого инвариантного многообразия получается алгоритм понижения порядка.

Теорема 26. *Пусть G_1 — локальная группа преобразований, действующая в $Z = \mathbb{R}^2(x,y)$. Пусть $t = t(x,y)$ и $u = u(x,y,y')$ — дифференциальные инварианты группы G_1. Тогда любое уравнение*
$$F(x,y,y',\dots,y^{(k)}) = 0$$
эквивалентно уравнению $k-1$-го порядка
$$\widetilde{F}\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1}u}{dt^{k-1}}\right) = 0.$$

Пример 38. В качестве примера вновь рассмотрим уравнение (7.5). Начнем его интегрирование с оператора X_1. Продолжение оператора имеет вид
$$\underset{1}{X_1} = x\partial_x + \frac{1}{2}\,y\partial_y - \frac{1}{2}\,y'\partial_{y'}.$$
Продолженный оператор имеет инварианты $t = y/\sqrt{x}$ и $u = y'\sqrt{x}$. Для того, чтобы перейти в уравнении к переменным (t,u) необходимо получить выражение для производной y''. Оно находится дифференцированием
$$\frac{du}{dt} = \frac{Du}{Dt} = \frac{y''\sqrt{x} + y'/(2\sqrt{x})}{y'/\sqrt{x} - y/(2x^{3/2})} \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{u'(u-0.5t) - 0.5u}{x^{3/2}}.$$

Подстановка полученных выражений для производных в уравнение (7.5) приводит к уравнению первого порядка для функции $u(x)$:

$$u'(u - t/2) = \frac{u}{2} + \frac{u-1}{t}. \tag{7.9}$$

Заметим, что мы по сути дела свели исходное уравнение второго порядка (7.5) к системе двух уравнений первого порядка. Действительно, после нахождения зависимости $u = u(t)$ из решения уравнения (7.5) ее необходимо подставить в уравнение

$$y'\sqrt{x} = u(y/\sqrt{x}). \tag{7.10}$$

Его решение определит искомую зависимость $y = y(x)$. Смысл этих действий состоит в том, что уравнение (7.10) по построению допускает оператор X_1, а значит может быть решено методом интегрирующего множителя.

Оператор X_2 также может быть использован для понижения порядка уравнения (7.5). Продолжение оператора имеет вид

$$\underset{1}{X} = x^2\partial_x + xy\partial_y + (y - xy')\partial_{y'}$$

Инвариантны выбираются в виде $t = y/x$, $u = xy' - y$. Вычисление производной y'' и подстановка в уравнение (7.5) приводят к уравнению первого порядка

$$t^2 u\, u' = u. \tag{7.11}$$

Его решения позволяют определить зависимость $y = y(x)$ из уравнения $xy' - y = u(y/x)$, для которого оператор X_2 дает интегрирующий множитель.

Возникает вопрос, с какой из допускаемых симметрий уравнения лучше начинать понижение порядка? В рассмотренном примере ответ почти очевиден: автономное уравнение (7.7) выглядит значительно проще уравнения (7.6). Общее правило формулируется следующим образом: нужно выбирать операторы в таком порядке, чтобы получающееся редуцированное уравнение наследовало симметрии исходного. Алгоритм такого выбора напрямую связан со структурными свойствами допускаемой алгебры Ли операторов.

7.4 Интегрирование ОДУ, допускающего многопараметрическую группу симметрий

Пусть уравнение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0 \tag{7.12}$$

допускает r-параметрическую группу преобразований G_r, которой соответствует алгебра Ли операторов L_r. Выберем некоторую подгруппу $G_s \subset G_r$, $s < r$. Пусть $t(x, y, y', \dots, y^{(s-1)})$ и $u(x, y, y', \dots, y^{(s)})$ являются дифференциальные инвариантны группы G_s в пространстве $\mathbb{R}^{s+2}(x, y, y', \dots, y^{(s)})$. По теореме 25 функции

$$\frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \dots, \frac{d^{k-s}u}{dt^{k-s}}$$

также будут являться дифференциальными инвариантами группы G_s. По теореме о представлении неособого инвариантного многообразия исходное уравнение (7.12) можно представить в эквивалентном виде

$$\widetilde{F}\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{k-s}u}{dt^{k-s}}\right) = 0. \tag{7.13}$$

Это уравнение порядка $k - s$, т.е. в терминах новых переменных (t, u) нам удалось понизить порядок уравнения на s производных. Предположим, что общее решение уравнения (7.13) задано в виде $u = U(t)$. Тогда решение исходного уравнения находится интегрированием ОДУ

$$u(x, y, y', \dots, y^{(s)}) = U\big(t(x, y, y', \dots, y^{(s-1)})\big). \tag{7.14}$$

Уравнение (7.14) по построению допускает группу G_s, а значит к нему можно применить ту же процедуру понижения порядка. Возникает вопрос, какую часть исходной группы наследует уравнение (7.13)? Ответ на него удобно дать в терминах соответствующей алгебры Ли L_s.

Теорема 27. *Редуцированное уравнение* (7.13) *допускает преобразования, определяемые факторалгеброй* $(\operatorname{Nor}_{L_r} L_s)/L_s$.

В том случае, когда L_s является идеалом в L_r редуцированное уравнение полностью наследует всю оставшуюся часть группы G_r. Таким образом, редукцию уравнения следует осуществлять по идеалам допускаемой алгебры Ли. В силу теоремы Ли для разрешимой допускаемой алгебры Ли L_r порядок уравнения можно понизить на r производных, т.е. свести ОДУ k-го порядка к ОДУ $k-r$-го порядка и r уравнениям первого порядка с известными интегрирующими множителями.

Итак, пусть уравнение (7.12) допускает разрешимую алгебру Ли L_r. Алгоритм понижения порядка этого уравнения состоит в следующем.

1. Построить композиционный ряд идеалов в L_r:

   $$L_r \supset M_{r-1} \supset M_{r-2} \supset \ldots \supset M_1 \supset \{0\}.$$

   Здесь M_i — идеалы в L; $\dim M_i = i$. Существенным фактом здесь является разрешимость алгебры L_r.

2. Переобозначить базисные элементы в L_r так, чтобы

   $$M_i = \{X_1, \ldots, X_i\}.$$

3. Редуцировать уравнение при помощи одномерного идеала $M_1 = \{X_1\}$. Для этого необходимо вычислить инварианты $t(x, y)$ и $u(x, y, y')$ продолженного оператора $\underset{1}{X_1}$ и переписать исходное уравнение в виде уравнения $k-1$-го порядка виде (7.13) с $s = 1$ для зависимости $u = u(t)$. С любым решением $u = U(t)$ уравнения (7.13) решение исходного уравнения находится интегрированием ОДУ $u(x, y, y') = U\big(t(x, y)\big)$, для которого известен интегрирующий множитель.

4. Вычислить инфинитезимальные операторы группы Ли, индуцированной операторами $\{X_2, \ldots, X_r\}$ пространстве $\mathbb{R}^2(t, u)$. По теореме 27 редуцированное уравнение (7.13) допускает $r-1$-ю алгебру этих операторов.

5. С полученным уравнением $k-1$-го порядка, допускающего $r-1$-мерную разрешимую алгебру Ли вернуться к шагу 1.

Данный алгоритм обеспечивает наиболее полное использование свойств симметрии ОДУ для его интегрирования.

Пример 39. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$y'' + \frac{1}{x}y' + e^y = 0. \tag{7.15}$$

Оно допускает двухпараметрическую (следовательно, разрешимую) алгебру Ли, порожденную операторами

$$X_1 = x \ln x \, \partial_x - 2(1 + \ln x)\partial_y, \quad X_2 = x\partial_x - 2\partial_y.$$

Приступаем к реализации алгоритма. Вначале вычислим коммутатор

$$[X_1, X_2] = -X_2.$$

Отсюда следует, что одномерная подалгебра $\{X_2\}$ является идеалом, значит начинать интегрирование нужно с оператора X_2. Его инвариантами являются функции $t = y + 2 \ln x$ и $u = xy'$. В терминах функции $u(t)$ производная y'' пересчитывается в виде

$$y'' = \frac{1}{x^2} \left(\frac{du}{dt}(u + 2) - u \right).$$

Исходное уравнение (7.15) после упрощения записывается в новых переменных следующим образом:

$$\frac{du}{dt}(u + 2) + e^t = 0. \tag{7.16}$$

Это уравнение несложно проинтегрировать и без привлечения методов группового анализа дифференциальных уравнений, однако для демонстрации изложенного выше алгоритма мы продолжим действовать предписанным способом. Далее необходимо вычислить действие оператора X_1 в пространстве $\mathbb{R}^2(t, u)$. Его продолжение имеет вид

$$\underset{1}{X_1} = x \ln x \, \partial_x - 2(1 + \ln x)\partial_y - \left(\frac{2}{x} + y'(1 + \ln x) \right) \partial_{y'}$$

Делаем замену переменных $(x, y, y') \to (x, t, u)$ по формуле (1.3):

$$\underset{1}{\widetilde{X}_1} = x \ln x \partial_x - 2\partial_t - (2 + u)\partial_u.$$

Таким образом, индуцированный оператор, допускаемый уравнением (7.16) и унаследованный из исходной группы симметрий уравнения (7.15) есть

$$Y = 2\partial_t + (2 + u)\partial_u.$$

Мы используем оператор Y для интегрирования уравнения (7.16). Перепишем его в виде 1-формы:

$$e^t dt + (u+2)du = 0.$$

В соответствии с теоремой 24 интегрирующим множителем для этого уравнения является функция $\mu = (2\,e^t + (u+2)^2)^{-1}$. Прямой проверкой несложно убедится, что 1-форма $(2\,e^t+(u+2)^2)^{-1}(e^t dt+(u+2)du)$ действительно замкнута и является дифференциалом функции $0.5\ln\bigl(2\,e^t + (u+2)^2\bigr)$. Общее решение уравнения (7.16) имеет вид

$$2\,e^t + (u+2)^2 = C_1^2.$$

с произвольной константой C_1. Возвращаемся к исходным переменным подставляя в это уравнение выражения для u и t в терминах x и y:

$$2x^2 e^y + (xy' + 2)^2 = C_1^2.$$

Это уравнение по построению допускает оператор X_2. Можно, опять же, выписать интегрирующий множитель этого уравнения, однако вместо этого мы сведем его к уравнению с разделяющимися переменными, введя новую искомую функцию, являющуюся инвариантом X_2: $z = y + 2\ln x$. Отсюда $y' = z' - 2/x$. Подстановка в предыдущее уравнение дает

$$(xz')^2 = C_1^2 - 2e^z.$$

Разделение переменных сводит решение ОДУ к вычислению интегралов

$$\int \frac{dz}{\sqrt{C_1^2 - 2e^z}} = \pm \int \frac{dx}{x}.$$

Подстановка выражения для z и разрешение полученной зависимости относительно y приводит к общему решению уравнения (7.15) в виде

$$y = -\ln\left(C_1^{-2} x^2 (1 + \mathrm{ch}(C_1 \ln(C_2 x)))\right).$$

7.5 Задачи

1. Проинтегрировать ОДУ методом интегрирующего множителя

(a) $y' + y^2 - 2x^{-2} = 0 \quad (X = x\partial_x - y\partial_y)$;

(b) $y' - \sin(x^{-1}y) = 0 \quad (X = x\partial_x + y\partial_y)$;

(c) $y' - (x+y)^2 = 0 \quad (X = \partial_x - \partial_y)$;

(d) $y' - (x + \exp(y))^{-1}y = 0 \quad (X = y\partial_x)$;

(e) $xy' - \frac{y}{\ln(x)+\exp(y)} = 0 \quad (X = xy\partial_x)$;

(f) $y' - x^{-1}y + x^{-1}\ln(x^{-1}y) = 0 \quad (X = x^2\partial_x + xy\partial_y)$.

2. Применить метод «выпрямления» допускаемого оператора для интегрирования ОДУ

(a) $(y')^2 - y - x^2 = 0 \quad (X = x\partial_x + 2y\partial_y)$;

(b) $xy' - y + \exp(y/x) = 0 \quad (X = x^2\partial_x + xy\partial_y)$;

(c) $y' - x^{-1}y + x\exp(x^{-1}y) = 0 \quad (X = \partial_x + x^{-1}y\partial_y)$;

(d) $xy' - y\ln(y) + y\exp(x) = 0 \quad (X = xy\partial_y)$;

(e) $y' - \frac{y+x\sqrt{x^2+y^2}}{x-y\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad (X = y\partial_x - x\partial_y)$;

(f) $y' + x^2\sin(x^{-3}y) = 0 \quad (X = x\partial_x + 3y\partial_y)$.

3. Показать, что ОДУ второго порядка допускает оператор X и с его помощью понизить порядок уравнения (F — произвольная гладкая функция)

(a) $xy'' = F(x^{-1}y, y') \quad (X = x\partial_x + y\partial_y)$;

(b) $y'' = (1 + y'^2)^{3/2}F(\sqrt{x^2+y^2}, \frac{y-xy'}{x+yy'}) \quad (X = y\partial_x - x\partial_y)$;

(c) $x^2y'' = F(y, yy'), \quad (X = x\partial_x)$;

(d) $xy'' + y' = x^2(y')^3F(y, \frac{y}{xy'} - \ln(x)), \quad (X = xy\partial_x)$;

(e) $yy'' = y^2 + y^2F(x, \frac{xy'}{y} - \ln(y)), \quad (X = xy\partial_y)$;

(f) $x^3y'' = F(x^{-1}y, xy' - y), \quad (X = x^2\partial_x + xy\partial_y).$

4. Проинтегрировать (понизить порядок) ОДУ второго порядка из задачи 4 параграфа 2.5 используя метод дифференциальных инвариантов.

Список литературы

[1] Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений* М.: Наука, 1978.

[2] Овсянников Л.В. *Лекции по основам газовой динамики* Москва-Ижевск, 2003.

[3] Овсянников Л.В. *Групповые свойства дифференциальных уравнений.* Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962.

[4] Овсянников Л.В. *Об оптимальных системах подалгебр* // ДАН РАН. 1993. Т. 333, 6. С. 702–704.

[5] Овсянников Л.В. *Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика* // ПММ. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.

[6] Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике* М.: Наука, 1983.

[7] Ибрагимов Н.Х. *Азбука группового анализа* М.: Знание, 1989.

[8] Ибрагимов Н.Х. *Опыт группового анализа* М.: Знание, 1991.

[9] Ibragimov N.H. (ed.) *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1–3.* CRC Press, Boca Raton, 1994.

[10] Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* М.: Мир, 1989.