Математический анализ

Курс лекций

Новосибирский государственный университет

Механико–математический факультет

Лектор — профессор В. Н. Старовойтов

Глава 1. Множества и отображения.

§ 1.1. *Множество и его элементы.*

При абсолютно строгом подходе множество определяется как некоторый объект, удовлетворяющий набору аксиом. Мы не будем этого делать, а ограничимся так называемой "наивной теорией множеств", которая опирается на наш повседневный опыт. Определим *множество* как совокупность различимых объектов произвольной природы, рассматриваемую как единое целое. Сами объекты называются *элементами множества*. Вообще говоря, это определение неприемлемо, так как опирается на понятие "совокупность", которое, фактически, является синонимом понятия "множество". В оправдание скажем, что слово "множество" будет использоваться, как зафиксированный математический термин, а "совокупность" — слово, призванное объяснить этот термин. Как бы то ни было, будем считать, что нам известны понятия "множество" и "элемент множества". В качестве синонимов термина "множество" мы также будем использовать термины "класс", "семейство", "набор" и другие. Употребление этих терминов с одной стороны является данью традиции, с другой — призвано избежать парадоксов наивной теории множеств.

Для обозначения множеств мы будем использовать в этой главе прописные буквы латинского алфавита (A, B, C, ...), а для элементов — строчные (a, b, c, ...). Тот факт, что некоторый объект x является элементом некоторого множества A, на математическом языке записывается следующим образом: $x \in A$. Если же x не является элементом A, то пишут $x \notin A$ или $x \overline{\in} A$. Мы будем использовать первое из этих обозначений. Два множества A и B равны ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов.

Если каждый элемент множества A является также элементом множества B, то говорят, что A является *подмножеством* множества B ($A \subset B$). A является *собственным подмножеством* B ($A \Subset B$), если $A \subset B$ и $A \neq B$.

Свойства:
1) $A \subset A$;
2) если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$;
3) если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

Операции над множествами A и B:
1) *пересечение* $A \cap B$ есть множество тех элементов множества A, которые принадлежат B;
2) *объединение* $A \cup B$ есть множество объектов, которые содержатся хотя бы в одном из множеств A и B;
3) *разность* $A \setminus B$ есть множество элементов A, не входящих в B;
4) *симметрическая разность* $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Свойства:
1) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ (*симметричность*);
2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (*ассоциативность*);
3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (*дистрибутивность*);
4) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Пусть M — множество, A и B — его подмножества. Множество $C_M A = M \setminus A$ называется дополнением A в M.
Законы де Моргана: $C_M(A \cap B) = C_M A \cup C_M B$, $C_M(A \cup B) = C_M A \cap C_M B$.

Способы задания множеств:
1) перечисление ($A = \{$м, а, т, е, и, к$\}$ — множество букв в слове «математика»);

2) пусть $\mathcal{P}$ — какое-то свойство, $\mathcal{P}(x)$ означает, что x обладает свойством $\mathcal{P}$. Тогда $A = \{x \,|\, \mathcal{P}(x)\}$ — множество объектов, обладающих свойством $\mathcal{P}$, $B = \{x \in M \,|\, \mathcal{P}(x)\}$ — множество элементов множества M, обладающих свойством $\mathcal{P}$.

Пустое множество $\varnothing$ — множество, не содержащее элементов. Свойства пустого множества:
1) $\varnothing \subset A$ для любого множества A;
2) $C_M\varnothing = M$, $C_M M = \varnothing$.

Для записи математических утверждений часто бывает удобно пользоваться логической символикой. *Утверждение* (*высказывание*) есть повествовательное предложение, которое может быть или истинным, или ложным.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — утверждения, тогда
утверждение $\neg\mathcal{A}$ (*не* $\mathcal{A}$) истинно, тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ ложно;
утверждение $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$) истинно, тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ истинны;
утверждение $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ *или* $\mathcal{B}$) истинно, тогда и только тогда, когда хотя бы одно из утверждений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ истинно;
утверждение $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ *влечет* $\mathcal{B}$, *из* $\mathcal{A}$ *следует* $\mathcal{B}$) истинно, тогда и только тогда, когда истинно $\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$;
утверждение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ *равносильно* $\mathcal{B}$) истинно, тогда и только тогда, когда истинно $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$.

Кванторы:
$\forall$ — «для любого», «для всех» (квантор всеобщности),
$\exists$ — «существует» (квантор существования),
$\exists!$ — «существует единственный».

Примеры.
1) $A \cap B = \{x \,|\, (x \in A) \wedge (x \in B)\}$;
2)$A \subset B$ есть утверждение $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$;
3) $A \cap B \neq \varnothing$ есть утверждение $(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$. •

Отрицание утверждения: пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — утверждения, тогда
$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = (\neg\mathcal{A}) \vee (\neg\mathcal{B})$,
$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = (\neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B})$,
$\neg((\forall x)\mathcal{A}(x)) = (\exists x)(\neg\mathcal{A}(x))$,
$\neg((\exists x)\mathcal{A}(x)) = (\forall x)(\neg\mathcal{A}(x))$,
$\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) = \mathcal{A} \wedge (\neg\mathcal{B})$.

§ 1.2. *Отображения.*

Пусть X и Y — множества. Нестрого говоря, *отображение* множества X в множество Y есть правило (или закон), согласно которому каждому элементу множества X ставится в соответствие один элемент множества Y. При этом X называется *областью определения* отображения. В качестве синонимов термина «отображение» мы, в зависимости от ситуации, будем использовать термины «функция», «преобразование», «оператор» и другие.

Декартовым произведением $X \times Y$ множеств X и Y называется множество упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$. Если дано n множеств $X_1, \ldots, X_n$, то определим $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, как множество всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$.

Определение. *Отображением* множества X в множество Y называется подмножество G декартова произведения $X \times Y$, такое, что $\forall x \in X \; \exists! y \in Y \,|\, (x, y) \in G$. •

Отображение F обозначается $F : X \to Y$ или $X \xrightarrow{F} Y$. Область определения отображения F мы будем обозначать через $\operatorname{dom} F$. Если $x \in \operatorname{dom} F$, то $F(x) \in Y$ есть *образ элемента* x при отображении F. Если $A \subset \operatorname{dom} F$, то $F(A) = \{y \in Y \mid (\exists x \in A)(y = F(x))\}$ есть *образ множества* A при отображении F. Множество $\operatorname{im} F = F(\operatorname{dom} F)$ называется *множеством значений* отображения F. Если $B \subset Y$, то множество $F^{-1}(B) = \{x \in \operatorname{dom} F \mid F(x) \in B\}$ называется *прообразом множества* B при отображении F. Очевидно, что $F^{-1}(\operatorname{im} F) = \operatorname{dom} F$.

Определение. *Отображение* $F : X \to Y$ называется *сюръективным* (или *накрывающим*), если $\operatorname{im} F = Y$, т.е. $\forall y \in Y \ \exists x \in X \mid F(x) = y$.
Отображение $F : X \to Y$ называется *инъективным* (или *взаимно-однозначным*), если $(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \ F(x_1) \neq F(x_2))$.
Отображение $F : X \to Y$ называется *биективным*, если оно сюръективно и инъективно. •

Два отображения F_1 и F_2 называются *равными* (пишется $F_1 = F_2$), если $\operatorname{dom} F_1 = \operatorname{dom} F_2$ и $F_1(x) = F_2(x)$ для всех x из области определения этих отображений.

Пусть даны два отображения $G : X \to Y$ и $F : Y \to Z$. *Суперпозицией* (или *композицией*) отображений G и F называется отображение $F \circ G : X \to Z$, такое, что $(\forall x \in X)\,(F \circ G)(x) = F(G(x)) \in Z$.

Отображение $I_X : X \to X$, такое, что $I_X(x) = x$ для всех $x \in X$, называется *тождественным.* Другие обозначения: id_X, e_X.

Отображение $F : X \to Y$ называется *постоянным*, если существует $y \in Y$, такое, что $F(x) = y$ для всех $x \in X$.

Определение. Отображение $G : Y \to X$ называется *обратным* к отображению $F : X \to Y$, если $F \circ G = I_Y$ и $G \circ F = I_X$. Обратное к F отображение обозначается F^{-1}. •

Лемма. Пусть даны отображения $F : X \to Y$ и $G : Y \to X$. Если $F \circ G = I_Y$, то F — сюръекция, а G — инъекция. •

Теорема. Для того, чтобы отображение имело обратное, необходимо и достаточно, чтобы оно было биективным. •

Утверждение. Если обратное отображение существует, то оно единственно. •

Пусть заданы отображения $F_1 : X_1 \to Y$ и $F_2 : X_2 \to Y$. Если $X_1 \subset X_2$ и $F_1(x) = F_2(x)$ для всех $x \in X_1$, то F_1 называется *сужением* отображения F_2, а F_2 — *продолжением* отображения F_1.

Глава 2. Числовые системы.

§ 2.1. *Вещественные числа.*

Если X — непустое множество, то любое отображение множества $X \times X$ в X называется *бинарной операцией на* X. Введём две бинарные операции, называемые *сложением* и *умножением.* Если x и y — элементы некоторого множества, то результат применения к ним этих операций традиционно обозначается через $x + y$ и xy (или $x \cdot y$) соответственно. При этом $x + y$ называется *суммой*, а xy — *произведением* элементов x и y.

Определение. Непустое множество X называется *полем*, если на нём определены две бинарные операции, называемые сложением и умножением, которые обладают следующими свойствами:

S1. (*закон ассоциативности для сложения*)
если $x, y, z \in X$, то $x + (y + z) = (x + y) + z$;

S2. (*существование нуля*)
существует элемент $0 \in X$, такой, что $x + 0 = 0 + x = x$ для всех $x \in X$;

S3. (*существование противоположного элемента*)
для каждого $x \in X$ существует элемент $(-x) \in X$, такой, что $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

S4. (*закон коммутативности для сложения*)
если $x, y \in X$, то $x + y = y + x$.

M1. (*закон ассоциативности для умножения*)
если $x, y, z \in X$, то $x(yz) = (xy)z$;

M2. (*существование единицы*)
существует элемент $1 \in X$, такой, что $1 \neq 0$ и $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ для всех $x \in X$;

M3. (*существование обратного элемента*) для каждого $x \in X \setminus \{0\}$ существует элемент $\dfrac{1}{x} \in X$, такой, что $x \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x} \cdot x = 0$;

M4. (*закон коммутативности для умножения*) если $x, y \in X$, то $xy = yx$.

D. (*закон дистрибутивности*) если $x, y, z \in X$, то $x(y + z) = xy + xz$. •

Бинарная операция $x + (-y)$ называется *вычитанием*, а её результат, называемый *разностью элементов x и y*, обычно записывают короче: $x - y$. Обратный элемент, введённый в свойстве M3, обозначается также через x^{-1} или $1/x$. Бинарная операция $x \cdot (1/y) = xy^{-1}$ называется делением. Её результат, как правило, обозначают выражением $\dfrac{x}{y}$ (или x/y), которое называется *дробью* (или *частным* элементов x и y). При этом x называется *числителем* дроби, а y — *знаменателем.*

Определение. Поле X называется *упорядоченным*, если оно содержит подмножество X_+, такое, что

P1. если $x, y \in X_+$, то $x + y \in X_+$ и $xy \in X_+$;

P2. для каждого $x \in X$ реализуется одна и только одна из следующих трёх возможностей: $x \in X_+$, $x = 0$, $(-x) \in X_+$. •

Элемент x поля X называется *положительным*, если $x \in X_+$, и *отрицательным*, если $(-x) \in X_+$.

Пусть x и y — элементы упорядоченного поля X. Введём следующие обозначения:
$x > y$ (элемент x больше элемента y) $\Leftrightarrow$ $(x - y) \in X_+$;
$x \geqslant y$ (элемент x больше или равен элементу y) $\Leftrightarrow$ $((x - y) \in X_+$ или $x = y)$;
$x < y$ (элемент x меньше элемента y) $\Leftrightarrow$ $(y - x) \in X_+$;
$x \leqslant y$ (элемент x меньше или равен элементу y) $\Leftrightarrow$ $((y - x) \in X_+$ или $x = y)$.

Мы будем использовать короткую запись вида $a < x < b$, равносильную двум неравенствам: $a < x$ и $x < b$. Заметим также, что включение $x \in \mathbb{R}_+$ равносильно неравенству $x > 0$.

Выражения, содержащие знаки $<$, $>$, $\leqslant$ и $\geqslant$ называются *неравенствами.* Неравенства, содержащие знаки $<$ и $>$ называются *строгими*, а неравенства со знаками $\leqslant$ и $\geqslant$ — *нестрогими.*

Определение. Упорядоченное поле X называется *полным*, если оно обладает следующим свойством: для любых непустых подмножеств A и B поля X, таких, что $a \leqslant b$ для всех $a \in A$ и $b \in B$, существует элемент $c \in X$, такой, что $a \leqslant c \leqslant b$ для всех $a \in A$ и $b \in B$. •

Можно показать, что любые два полных упорядоченных поля X и X' *изоморфны.* Это означает, что существует биективное отображение $F : X \to X'$, такое, что $F(x + y) = F(x) + F(y)$, $F(xy) = F(x)F(y)$ и $x < y \Leftrightarrow F(x) < F(y)$ для всех $x, y \in X$. Таким образом, с точностью до изоморфизма полное упорядоченное поле определено единственным образом. Полное упорядоченное поле называется *полем вещественных чисел* и обозначается $\mathbb{R}$. Элементы множества $\mathbb{R}$ мы будем называть вещественными числами. Элементы множества $\mathbb{R}_+$ назовём положительными вещественными числами, а противоположные к ним — отрицательными.

Теорема. (*Следствия из аксиом поля*)

1°. В $\mathbb{R}$ существуют только один нуль и только одна единица.

2°. У каждого $x \in \mathbb{R}$ существует только один противоположный элемент.

3°. (*Закон сокращения для сложения*) Если $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a + c = b + c$, то $a = b$.

4°. У каждого $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ существует только один обратный элемент.

5°. (*Закон сокращения для умножения*) Если $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ и $ac = bc$, то $a = b$.

6°. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $x \cdot 0 = 0$.

7°. Если $xy = 0$, то либо $x = 0$, либо $y = 0$.

8°. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $(-1) \cdot x = -x$. •

Теорема. (*Следствия из аксиом порядка*) Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$. Тогда

1°. (*Транзитивность*) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$;

2°. если $a \geqslant b$ и $b > c$, то $a > c$;

3°. если $a > b$, то $a + c > b + c$;

4°. (*сложение неравенств*) если $x > y$ и $a > b$, то $x + a > y + b$;

5°. если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.

6°. если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.

7°. Для любого $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ выполняется неравенство $xx > 0$.

8°. $1 > 0$. $\bullet$

Модулем (или *абсолютной величиной*) вещественного числа $x \in \mathbb{R}$ называется неотрицательное число $|x|$, такое, что

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Также, поставим в соответствие каждому $x \in \mathbb{R}$ его *знак* $\operatorname{sgn} x$ (читается «сигнум» или «знак»):

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $|x| \geqslant 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$ и из $|x| = 0$ следует $x = 0$. Кроме того, $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$ и $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$.

Теорема. Пусть $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда

1°. $|xy| = |x| \cdot |y|$;

2°. если $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, то $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$ и $|x| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$;

3°. (*неравенство треугольника*) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$;

4°. $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$. $\bullet$

Скажем, что множество $A \subset \mathbb{R}$ *ограничено сверху*, если существует $a \in \mathbb{R}$, такое, что $x \leqslant a$ для всех $x \in A$. Аналогично, множество $A \subset \mathbb{R}$ *ограничено снизу*, если существует $b \in \mathbb{R}$, такое, что $x \geqslant b$ для всех $x \in A$. При этом a называется *верхней гранью* или *мажорантой* множества A, а b — его *нижней гранью* или *минорантой*. Если множество ограничено и сверху, и снизу, то оно называется *ограниченным*. Если a есть верхняя (нижняя) грань множества A и $a \in A$, то a называется *максимумом* (*минимумом*) множества A. Записывается это так: $a = \max A$ ($a = \min A$).

Определение. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *точной верхней гранью* или *супремумом* непустого множества A (записывается $a = \sup A$), если
а) a является верхней гранью A;
б) для любого $y < a$ существует $x \in A$, такой, что $x > y$.

Число $b \in \mathbb{R}$ называется *точной нижней гранью* или *инфимумом* непустого множества A (записывается $b = \inf A$), если
а) b является нижней гранью A;
б) для любого $y > b$ существует $x \in A$, такой, что $x < y$. $\bullet$

Эти определения можно сформулировать по-другому: для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $x, y \in A$, такие, что $x > \sup A - \varepsilon$ и $y < \inf A + \varepsilon$.

Супремум ограниченного сверху множества $A \subset \mathbb{R}$ обладает следующими очевидными свойствами:

1. если $\sup A \in A$, то $\sup A = \max A$;

2. $\sup A$ есть наименьшая верхняя грань множества A;

3. $\sup A$ определён единственным образом;

4. множество $-A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$ ограничено снизу и $\inf(-A) = -\sup A$.

Аналогичными свойствами обладает $\inf A$.

Теорема. Если непустое множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, то существует число $c \in \mathbb{R}$, такое, что $c = \sup A$. •

Теорема. Пусть A и B — непустые ограниченные сверху (снизу) множества в $\mathbb{R}$. Если $A \subset B$, то $\sup A \leqslant \sup B$ ($\inf A \geqslant \inf B$). •

В некоторых ситуациях удобно использовать множество вещественных чисел, дополненное двумя элементами $-\infty$ и $+\infty$, которые называются *минус бесконечность* и *плюс бесконечность* соответственно. Множество вещественных чисел с этими двумя элементами называется *расширенной числовой прямой* и обозначается $\overline{\mathbb{R}}$. Бесконечные элементы наделяются следующими свойствами:

1. $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$, $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$, $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$, $(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$, $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$;

2. $x + (+\infty) = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$ и $x/(+\infty) = x/(-\infty) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$;

3. $x \cdot (+\infty) = +\infty$ и $x \cdot (-\infty) = -\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}_+$;

4. $-\infty < x < +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$;

5. выражения $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty)/(\pm\infty)$ не имеют смысла и называются *неопределённостями.*

Натуральные числа. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *индуктивным*, если $1 \in A$ и для любого $x \in A$ число $(x + 1)$ также принадлежит A. Очевидно, что множества $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_+$ являются индуктивными. Пересечение любой совокупности индуктивных множеств является индуктивным множеством. Множество *натуральных чисел* $\mathbb{N}$ есть пересечение всех индуктивных множеств, содержащих единицу. Множество натуральных чисел само является индуктивным.

Утверждение. (*Принцип математической индукции*) Если $A \subset \mathbb{N}$ и A — индуктивное множество, то $A = \mathbb{N}$. •

Часто принцип математической индукции используется в другой формулировке: пусть $P(n)$ — какое-либо утверждение, касающееся натурального числа n. Если $P(1)$ истинно, а из истинности $P(n)$ следует истинность $P(n + 1)$, то $P(n)$ истинно для всех $n \in \mathbb{N}$. Эта формулировка, очевидно, эквивалентна предыдущей. Для доказательства того, что из первой формулировки следует вторая, достаточно взять $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$. Для доказательства обратного утверждения определим $P(n)$, как утверждение $(n \in A)$.

Теорема. (*О структуре множества* $\mathbb{N}$)

1°. $n \geqslant 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

2°. если k и m — натуральные числа, то $(k + m) \in \mathbb{N}$ и $km \in \mathbb{N}$;

3°. если $k \in \mathbb{N}$ и $k \neq 1$, то $(k-1) \in \mathbb{N}$;

4°. если k и m — натуральные числа и $k < m$, то $(m-k) \in \mathbb{N}$;

5°. для любого $k \in \mathbb{N}$ не существует натурального числа n, такого, что $k < n < k+1$. •

Отметим ещё два свойства натуральных чисел: если $n \in \mathbb{N}$, то $(-n) \notin \mathbb{N}$ и $1/n \notin \mathbb{N}$.

Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$ определим вещественное число x^n как произведение $x \cdot x \ldots x$, в котором n раз стоит число x. Число x^n называется *n-й степенью числа x* и читается «*x в степени n*». Исторически принято выделять два специальных случая: x^2 называется «*x в квадрате*», а x^3 — «*x в кубе*». Очевидно, что $x^1 = x$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Кроме того, по определению положим, что $x^0 = 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Теорема. (*Неравенство Бернулли*) Для любого вещественного числа $x \geqslant -1$ и любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$. •

Теорема. (*Принцип Архимеда*) Множество натуральных чисел не является ограниченным сверху. Другими словами, для любого $x \in \mathbb{R}$ существует $n \in \mathbb{N}$, такое, что $n > x$. •

Следствие. Для любых $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}_+$ существует $n \in \mathbb{N}$, такое, что $a < nb$. •

Следствие. Пусть вещественные числа x, y и z таковы, что $y \leqslant x \leqslant y + z/n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $x = y$. •

Заметим, что в формулировке этого следствия мы могли бы потребовать выполнения другого неравенства: $y - z/n \leqslant x \leqslant y$. Утверждение при этом не изменилось бы. Кроме того, утверждение останется бы в силе, если эти неравенства будут выполняться лишь для всех натуральных чисел n, больших некоторого фиксированного числа.

Целые числа. Множеством *целых чисел* $\mathbb{Z}$ называется множество вещественных чисел x, таких, что либо $x \in \mathbb{N}$, либо $(-x) \in \mathbb{N}$, либо $x = 0$.

Утверждение. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ существует $n \in \mathbb{Z}$, такое, что $n \leqslant x < n+1$. •

Для каждого вещественного числа x целое число n, такое, что $n \leqslant x < n+1$, называется *целой частью числа* x. Целая часть числа x обозначается через $[x]$. *Дробная часть числа* x обозначается через $\{x\}$ и определяется как $x - [x]$. Не следует путать дробную часть числа x с множеством, состоящим из одного элемента x.

Отметим ещё, что множество $\mathbb{Z}$ делится на два непересекающихся подмножества — чётных и нечётных чисел. Число $n \in \mathbb{Z}$ называется *чётным*, если существует $k \in \mathbb{Z}$, такое, что $n = 2k$. Число $n \in \mathbb{Z}$ называется *нечётным*, если существует $k \in \mathbb{Z}$, такое, что $n = 2k+1$.

Рациональные и иррациональные числа. Вещественные числа вида k/n, где $k \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$, называются *рациональными*. Множество всех рациональных чисел обозначается через $\mathbb{Q}$. Вещественные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*. При определении рационального числа k/n возникает проблема, связанная с тем, что дробь $km/(nm)$ задаёт то же самое число для каждого $m \in \mathbb{Z}$. То есть, рациональные числа задаются неоднозначно. Мы обойдём эту проблему следующим образом. Натуральное число $\ell \neq 1$ называется *делителем* целого числа k, если $k = m\ell$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Скажем, что дробь k/n является *несократимой*, если числа k и n не имеют общих делителей (такие числа называются *взаимно простыми*). Теперь мы можем рассматривать рациональные числа, как несократимые дроби. При этом для каждого $p \in \mathbb{Q}$ существуют однозначно определённые $k \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$, такие, что $p = k/n$.

Нетрудно проверить, что $\mathbb{Q}$ есть упорядоченное поле. В то же время, как мы увидим далее, поле $\mathbb{Q}$ не является полным. Для начала мы покажем, что иррациональные числа существуют, то есть, что $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$. Исторически, иррациональные числа возникли при попытке решить квадратное уравнение $x^2 = a$, где $a \in \mathbb{R}_+$. Положительное решение этого уравнения называется *квадратным корнем* из числа a и обозначается $\sqrt{a}$ или $a^{1/2}$. Для некоторых a, например, для $a = 2$, не удалось найти рациональное число x, удовлетворяющее этому уравнению. С другой стороны, из геометрических соображений становится ясно, что решение должно существовать. В самом деле, исходя из теоремы Пифагора, x является длиной гипотенузы прямоугольного треугольника с длиной катетов, равной единице. Мы сейчас покажем, что в $\mathbb{R}_+$ существует единственное решение квадратного уравнения.

Утверждение. (*О квадратном корне*) Для каждого $a \in \mathbb{R}_+$ существует единственное число $x \in \mathbb{R}_+$, такое, что $x^2 = a$. •

По аналогии с квадратным корнем для произвольных $a \in \mathbb{R}_+$ и $n \in \mathbb{N}$ можно определить $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ — *корень степени* n — как единственное в $\mathbb{R}_+$ решение уравнения $x^n = a$. Корень степени 3 называется *кубическим*.

Утверждение. Вещественное число $\sqrt{2}$ является иррациональным. •

Итак, $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$. Множество иррациональных чисел полем не является, так как разность двух иррациональных чисел может быть числом рациональным.

Ещё один вывод, который позволяет сделать последнее утверждение, состоит в том, что поле $\mathbb{Q}$ не является полным. В самом деле, рассмотрим множества $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ и } x^2 < 2\}$ и $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ и } x^2 > 2\}$. Очевидно, что $a < b$ для всех $a \in A$ и $b \in B$. Однако, единственным числом, разделяющим эти множества, является $\sqrt{2}$, которое не принадлежит $\mathbb{Q}$.

Утверждение. Если a и b — вещественные числа и $a < b$, то существует рациональное число p, такое, что $a < p < b$. •

Вещественное число называется *алгебраическим*, если оно является решением какого-либо уравнения вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ с $n \in \mathbb{N}$ и с рациональными или, что эквивалентно, целыми коэффициентами a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. В противном случае число называется *трансцендентным*.

§ 2.2. *Геометрическое представление вещественных чисел.*

Числовая прямая. Между множеством точек на прямой и множеством вещественных чисел можно установить взаимно-однозначное соответствие. По этой причине мы часто будем называть $\mathbb{R}$ вещественной *числовой прямой*, а вещественные числа — точками на этой прямой. Множество точек, лежащих на прямой правее точки 0, назовём *положительной полуосью*, а левее — *отрицательной полуосью*.

Введём следующие обозначения:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ — *отрезок* (замкнутый интервал, замкнутый промежуток),
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ — *интервал* (открытый интервал, открытый промежуток),
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ — *полуинтервалы*.

Интервалы, отрезки и полуинтервалы будем называть *промежутками* и обозначать $\langle a, b\rangle$. Часто, по аналогии, числовую прямую $\mathbb{R}$ обозначают через $(-\infty, +\infty)$.

Окрестностью точки $x \in \mathbb{R}$ называется любой интервал, содержащий эту точку. Для каждого $\varepsilon > 0$ интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ называется *ε-окрестностью* точки x. *Длиной* промежутка $< a, b >$ называется величина $(b-a)$. Если I — промежуток, то его длину будем обозначать через $|I|$. *Расстоянием* между точками a и b называется длина промежутка с концами a и b, которая, очевидно, равна $|a-b|$.

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *открытым*, если для каждой точки $a \in A$ существует интервал (открытый) U, такой что $a \in U \subset A$. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если множество $\mathbb{R} \setminus A$ открыто. Пустое множество $\varnothing$ и вся числовая прямая $\mathbb{R}$ считаются и открытыми, и замкнутыми.

Пусть M — множество. *Последовательностью* элементов множества M называется отображение $a : \mathbb{N} \to M$. Для последовательностей используют следующие обозначения: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ или просто $\{a_n\}$. В частности, если в качестве M взять $\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств какого-либо множества X, то получим последовательность подмножеств множества X. В следующей теореме в качестве M взято множество всех отрезков на числовой прямой.

Теорема. (*О вложенных отрезках*) Если $\{I_k\}$ — последовательность отрезков числовой прямой, таких, что $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots$ (т.е., $I_k \supset I_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$), то существует точка $c \in \mathbb{R}$, которая принадлежит всем этим отрезкам (т.е., $c \in \cap_{k\in\mathbb{N}} I_k$).

Более того, если для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ существует $k \in \mathbb{N}$, такое, что $|I_k| < \varepsilon$, то c — единственная точка в $\cap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. •

Система множеств S называется *покрытием множества* A, если $A \subset \cup_{U\in S} U$, то есть, A является подмножеством объединения всех множеств системы S. Если $S' \subset S$ и $A \subset \cup_{U\in S'} U$, то S' называется *подпокрытием* покрытия S. Сразу заметим, что любое подпокрытие является также и покрытием множества. Если система S состоит из конечного числа множеств, то она называется *конечным покрытием.*

Теорема. (*О конечном подпокрытии*) Любое покрытие отрезка числовой прямой системой интервалов содержит его конечное подпокрытие. •

Точка $p \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой множества* $A \subset \mathbb{R}$, если в любой окрестности $U(p)$ точки p содержится бесконечное число точек из A.

Упражнение. Точка $p \in \mathbb{R}$ является предельной точкой множества $A \subset \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда в любой окрестности $U(p)$ точки p содержится хотя бы одна точка из $A \setminus \{p\}$. •

Теорема. (*Теорема Больцано — Вейерштрасса*) Если $A \subset \mathbb{R}$ — ограниченное множество, содержащее бесконечное число точек, то A имеет предельную точку (не обязательно принадлежащую A). •

Числовая окружность. Рассмотрим декартово произведение $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ двух числовых прямых. Элементы множества $\mathbb{R}^2$ мы тоже будем называть точками. Каждая точка $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ есть упорядоченная пара (x_1, x_2) вещественных чисел x_1 и x_2, называемых *координатами точки $\boldsymbol{x}$*. По этой причины множество $\mathbb{R}^2$ называют *координатной плоскостью.* Точка $\mathbf{0} = (0, 0)$ называется *началом координат.* Каждой точке $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ можно поставить в соответствие вектор с началом в $\mathbf{0}$ и концом $\boldsymbol{x}$. Поэтому точки в $\mathbb{R}^2$

мы будем также называть *векторами*. Векторы можно складывать и умножать на вещественное число: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2)$ и $t\boldsymbol{x}=(tx_1,tx_2)$ для любого $t\in\mathbb{R}$. Величину $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|:=\big((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\big)^{1/2}$ называют *евклидовым расстоянием* между точками $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ координатной плоскости. В этом пункте у нас не встретится других расстояний, поэтому слово «евклидово» мы будем опускать. Расстояние от точки $\boldsymbol{x}$ до начала координат $\mathbf{0}$ называется *величиной* или *модулем вектора* $\boldsymbol{x}$ и обозначается $|\boldsymbol{x}|$.

Введём обозначение, которое будет постоянно использоваться в дальнейшем. Если нам задан набор $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ чисел или других объектов, которые можно складывать, то их сумму обозначают так: $\sum_{i=1}^n a_i$. Таким образом, если $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$, то $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\big(\sum_{i=1}^2(x_i-y_i)^2\big)^{1/2}$.

Пусть $\boldsymbol{a}$ — какая-либо точка координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ и $r\in\mathbb{R}_+$. Множество $S_r(\boldsymbol{a})=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2\mid|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|=r\}$ называется *окружностью радиуса r с центром в точке $\boldsymbol{a}$*. В этом пункте мы будем обозначать через S окружность $S_1(\mathbf{0})$.

Наша дальнейшая цель — ввести понятие длины дуги окружности. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — точки на S, причём для того, чтобы перейти из $\boldsymbol{a}$ в $\boldsymbol{b}$ мы должны двигаться против часовой стрелки. Множество точек окружности S, заключённых между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, назовём *дугой* $\overset{\frown}{\boldsymbol{ab}}$. Точка $\boldsymbol{a}$ — начало, а $\boldsymbol{b}$ — конец дуги. Рассмотрим произвольный набор $\{\boldsymbol{\xi}_0,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\dots,\boldsymbol{\xi}_n\}$ несовпадающих точек на $\overset{\frown}{\boldsymbol{ab}}$, таких, что $\boldsymbol{\xi}_0=\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\xi}_n=\boldsymbol{b}$. *Вписанной в дугу $\overset{\frown}{\boldsymbol{ab}}$ ломаной* с вершинами в точках $\boldsymbol{\xi}_k$ называется набор отрезков $[\boldsymbol{\xi}_{k-1},\boldsymbol{\xi}_k]$, $k=1,2,\dots,n$, где отрезок $[\boldsymbol{\xi}_{k-1},\boldsymbol{\xi}_k]$ есть множество точек $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$, таких, что $\boldsymbol{x}=(1-t)\,\boldsymbol{\xi}_{k-1}+t\,\boldsymbol{\xi}_k$ для некоторого $t\in[0,1]$. Если мы обозначим эту ломаную через $\bar{\boldsymbol{\xi}}$, то её длину определим как положительное вещественное число $\ell(\bar{\boldsymbol{\xi}})=\sum_{i=1}^n|\boldsymbol{\xi}_i-\boldsymbol{\xi}_{i-1}|$. Множество всех вписанных в дугу $\overset{\frown}{\boldsymbol{ab}}$ ломаных обозначим через $L(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

Назовём *длиной дуги* $\overset{\frown}{\boldsymbol{ab}}$ окружности S вещественное число

$$s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sup_{\bar{\boldsymbol{\xi}}\in L(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}\ell(\bar{\boldsymbol{\xi}})=\sup\{\ell(\bar{\boldsymbol{\xi}})\in\mathbb{R}_+\mid\bar{\boldsymbol{\xi}}\in L(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\}.$$

Упражнение. Доказать существование супремума множества $A=\{\ell(\bar{\boldsymbol{\xi}})\in\mathbb{R}_+\mid\bar{\boldsymbol{\xi}}\in L(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\}$. *Подсказка:* установить, что множество A ограничено сверху, например, числом 8 (периметром наименьшего квадрата, содержащего окружность S). •

Утверждение. (*Аддитивность длины дуги*) Если $\boldsymbol{c}$ — произвольная точка на дуге $\overset{\frown}{\boldsymbol{ab}}$, то $s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+s(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$. •

Теперь мы можем определить понятие *угла*: $\widehat{\boldsymbol{a0b}}:=s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$. Обозначим через $\boldsymbol{e}$ точку $(1,0)\in S$ и определим функцию $\varphi:S\to\mathbb{R}$ следующим образом: $\varphi(\boldsymbol{a})=s(\boldsymbol{e},\boldsymbol{a})$ (от $\boldsymbol{e}$ к $\boldsymbol{a}$ движемся против часовой стрелки). Для величины $\varphi(-\boldsymbol{e})$, где $-\boldsymbol{e}=(-1,0)$, со времён Архимеда принято специальное обозначение: π. Число π является длиной половины единичной окружности S. Соответственно, длина всей окружности равна 2π. Итак, каждой точке окружности S мы поставили в соответствие число из промежутка $[0,2\pi)$ числовой прямой. Утверждение о том, что для каждого вещественного числа $\varphi\in[0,2\pi)$ существует точка $\boldsymbol{a}\in S$, такая, что $\varphi=s(\boldsymbol{e},\boldsymbol{a})$, мы доказывать не будем и примем его в качестве аксиомы. Фактически, это предположение означает отсутствие разрывов на окружности, что вполне соответствует нашим геометрическим представлениям.

Чтобы определить точку $\boldsymbol{a}(\varphi) \in S$ при $\varphi \notin [0, 2\pi)$, мы положим $\boldsymbol{a}(\varphi + 2\pi k) = \boldsymbol{a}(\varphi)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, для каждого $\psi \in \mathbb{R}$ мы однозначно определим $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $k \in \mathbb{Z}$, такие, что $\psi = \varphi + 2\pi k$, и положим $\boldsymbol{a}(\psi) = \boldsymbol{a}(\varphi)$.

Определим *тригонометрические функции*. Для каждого $\psi \in \mathbb{R}$

$$\cos\psi = a_1(\psi), \quad \sin\psi = a_2(\psi),$$

где $(a_1(\psi), a_2(\psi)) = \boldsymbol{a}(\psi)$. Эти величины называются *косинусом* и *синусом* угла ψ соответственно. Если $\cos\psi \neq 0$, то величину $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{\sin\psi}{\cos\psi}$ называют *тангенсом* угла ψ. Если $\sin\psi \neq 0$, то величину $\operatorname{ctg}\psi = \dfrac{\cos\psi}{\sin\psi}$ называют *котангенсом* угла ψ. Так как $\boldsymbol{a}(\psi) = \boldsymbol{a}(\psi + 2\pi k)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, справедливы следующие соотношения:

$$\sin\psi = \sin(\psi + 2\pi k), \quad \cos\psi = \cos(\psi + 2\pi k), \quad \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}(\psi + 2\pi k), \quad \operatorname{ctg}\psi = \operatorname{ctg}(\psi + 2\pi k)$$

для всех $k \in \mathbb{Z}$.

Пусть $T \in \mathbb{R}_+$. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *T-периодической*, если $f(x + T) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. При этом число T называется *периодом* функции f. Таким образом, тригонометрические функции cos, sin, tg и ctg являются 2π-периодическими.

Упражнение. Доказать следующие соотношения:

$$\cos^2\psi + \sin^2\psi = 1,$$
$$\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi,$$
$$\sin(\varphi + \psi) = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi.$$

•

§ 2.3. *Комплексные числа.*

Добавим к множеству $\mathbb{R}$ один дополнительный символ i и будем выполнять с ним арифметические операции как с обычными вещественными числами. Символ i называется *мнимой единицей* и характеризуется следующим свойством: $i^2 = -1$. Объекты вида $x + iy$, где x и y — вещественные числа, называются *комплексными числами*. Множество всех комплексных чисел обозначается через $\mathbb{C}$. Чаще всего комплексные числа мы будем обозначать буквой z. Таким образом, если $z \in \mathbb{C}$, то существуют вещественные числа x и y, такие, что $z = x + iy$. Число x называется *вещественной частью* комплексного числа z (обозначается $x = \operatorname{Re} z$), а y — *мнимой частью* (обозначается $y = \operatorname{Im} z$). Два комплексных числа совпадают, если совпадают их вещественные и мнимые части. Определим сложение и умножение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ следующим образом:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$
$$z_1 z_2 = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

То есть, арифметические операции с комплексными числами выполняются точно так же, как с вещественными, но при этом учитывается, что $i^2 = -1$.

Несложно проверить, что $\mathbb{C}$ является полем. Нулём этого поля служит число $0 = 0 + i \cdot 0$, а единицей — число $1 = 1 + i \cdot 0$. Поясним, как находится обратный элемент. Пусть $z = x + iy$

— ненулевое комплексное число. *Сопряжённым* к z называется число $\overline{z} = x - iy$. Так как $z\overline{z} = x^2 + y^2 \neq 0$, обратным элементом для z будет число $\overline{z}/(x^2 + y^2)$.

Если мы отождествим вещественное число x с комплексным числом $x + i \cdot 0$, то получим, что $\mathbb{R}$ является подполем поля $\mathbb{C}$ (т.е., поле $\mathbb{C}$ является расширением поля $\mathbb{R}$).

Комплексные числа допускают естественную геометрическую интерпретацию. Каждому комплексному числу $z = x + iy$ поставим в соответствие упорядоченную пару вещественных чисел (x, y), которая задаёт некоторую точку на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$. Таким образом, комплексные числа могут быть изображены точками на плоскости, которая по этой причине называется *комплексной плоскостью.*

Легко видеть, что сложение комплексных чисел производится как сложение соответствующих им векторов. С умножением дело обстоит немного сложнее. *Модулем комплексного числа* $z = x+iy$ называется неотрицательное вещественное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Аргументом комплексного числа* $z = x+iy \neq 0$ называется угол между векторами с координатами $(1, 0)$ и (x, y). Если мы обозначим модуль числа z через ρ, а аргумент — через φ, то получим для числа z следующее представление:

$$z = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Поскольку функции cos и sin являются 2π-периодическими, правая часть этого равенства не изменится, если мы вместо φ напишем $\varphi + 2\pi k$, где k — произвольное целое число. То есть, каждому комплексному числу соответствует много значений угла φ. Множество всех этих значений обозначают через $\operatorname{Arg} z$. Чтобы определить аргумент числа однозначно, специально оговаривают, в каком промежутке его следует выбирать. Обычно это бывает один из полуинтервалов $[0, 2\pi)$ и $(-\pi, \pi]$. Значение аргумента в пределах выбранного промежутка обозначают через $\arg z$ и называют *главным значением аргумента.*

С помощью описанного выше представления, нетрудно понять, что представляет собой произведение двух комплексных чисел. Возьмём два произвольных ненулевых комплексных числа:

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{и} \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Используя тригонометрические формулы, мы получим:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Таким образом, чтобы найти на координатной плоскости вектор, соответствующий комплексному числу z_1z_2, мы должны удлинить вектор (x_1, y_1) в ρ_2 раз и повернуть на угол φ_2 (напомним, что положительное направление поворота — против часовой стрелки). Можно, конечно, удлинить вектор (x_2, y_2) в ρ_1 раз и повернуть на угол φ_1. Результат от этого не изменится.

Упражнение. Воспользовавшись полученным представлением для произведения комплексных чисел и принципом математической индукции, доказать *формулу Муавра*:

$$z^k = \rho^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi),$$

где $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$, $k \in \mathbb{N}$. •

§ 2.4. *Кардинальные числа.*

Скажем, что множество A *равномощно* множеству B, если существует биективное отображение $F : A \to B$, такое, что $F(A) = B$. Отношение равномощности множеств является

отношением эквивалентности, так как оно обладает следующими очевидными свойствами:
1) любое множество равномощно самому себе (рефлексивность);
2) если A равномощно B, то B равномощно A (симметричность);
3) если A равномощно B и B равномощно C, то A равномощно C (транзитивность).
Тот факт, что множества A и B равномощны, мы будем обозначать $A \sim B$.

Все множества можно разбить на непересекающиеся классы равномощных множеств. *Мощностью* (или *кардинальным числом*) множества назовём класс эквивалентности, которому это множество принадлежит. Мощность какого-либо множества A мы будем обозначать через $\operatorname{card} A$. Выражение $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$ означает, что множества A и B равномощны, то есть что $A \sim B$.

Если A — конечное множество, то принято определять $\operatorname{card} A$ как количество элементов множества A. В частности, $\operatorname{card} \varnothing = 0$. Однако, основная причина введения кардинальных чисел связана с попыткой сравнения бесконечных множеств. Мы называли множество бесконечным, если оно не являлось конечным. Дедекинд предложил называть множество бесконечным, если оно равномощно некоторому своему собственному подмножеству.

Мощности множеств можно сравнивать. Скажем, что мощность множества A не превосходит мощности множества B ($\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$), если A равномощно некоторому подмножеству множества B (т.е., $A \sim B_1$ и $B_1 \subset B$).

Упражнение. Доказать, что если $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$ и $\operatorname{card} B \leqslant \operatorname{card} C$, то $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} C$. •

Теорема. (*Теорема Шрёдера — Бернштейна*) Пусть A и B — произвольные множества. Если $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$ и $\operatorname{card} B \leqslant \operatorname{card} A$, то $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$. •

Скажем, что мощность множества A меньше мощности множества B ($\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$), если $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$ и $\operatorname{card} A \neq \operatorname{card} B$.

Теорема. (*Первая теорема Кантора*) Пусть A — произвольное множество. Тогда $\operatorname{card} A < \operatorname{card} \mathscr{P}(A)$, $\mathscr{P}(A)$ — множество всех подмножеств множества A. •

Как следует из этой теоремы, не существует наибольшего кардинального числа. Какое бы множество A мы ни взяли, всегда можно построить множество B, мощность которого больше мощности множества A.

Счётные множества. Множество называется *счётным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$. Множество называется *не более, чем счётным*, если оно конечно или счётно.

Упражнение. Доказать, что объединение двух не более чем счётных множеств (не обязательно непересекающихся) есть не более чем счётное множество. •

Как показывает следующая теорема, счётные множества являются в некотором смысле наименьшими из бесконечных множеств.

Теорема. Любое бесконечное множество содержит счётное подмножество. •

Следствие. Любое бесконечное подмножество счётного множества является счётным. •

Следствие. Если A — бесконечное, а B — не более чем счётное множества, то $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A$. •

Теорема. $\operatorname{card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \operatorname{card} \mathbb{N}$. •

Следствие. Объединение счётного числа счётных множеств является счётным множеством. •

Следствие. $\operatorname{card}\mathbb{Q} = \operatorname{card}\mathbb{N}$. •

Упражнение. Доказать, что множество алгебраических вещественных чисел счётно. •

Множества мощности континуума. Скажем, что множество имеет *мощность континуума*, если оно равномощно отрезку $[0,1]$. Для обозначения мощности континуума мы будем использовать латинскую букву c. Любой промежуток вещественной прямой (как и вся прямая) имеет мощность c.

Теорема. (*Вторая теорема Кантора*) $\operatorname{card}\mathbb{N} < c$. •

Следствие. Иррациональные числа существуют. Множество иррациональных чисел отрезка $[0,1]$ имеет мощность континуума. •

Упражнение. Пусть A — множество мощности континуума, а B — его счётное подмножество. Доказать, что множество $A \setminus B$ имеет мощность континуума. •

Утверждение. Если A и B — непересекающиеся множества мощности континуума, то $\operatorname{card}(A \cup B) = c$. •

Аналогично можно доказать, что если $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность непересекающихся множеств мощности континуума, то их объединение тоже имеет мощность c. Достаточно рассмотреть биекции $F_k : X_k \to (1/(k+1), 1/k]$, $k \in \mathbb{N}$ и определить биекцию $F : \cup_{k=1}^{\infty} X_k \to (0,1] = \cup_{k=1}^{\infty}(1/(k+1), 1/k]$, которая совпадает с F_k на X_k. Отсюда, в частности, следует уже установленный нами ранее факт: множество $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{Z}}(n, n+1]$ имеет мощность c.

Теорема. $\operatorname{card}\big([0,1] \times [0,1]\big) = c$. •

Следствие. Если для каждого $\alpha \in [0,1]$ множество X_α имеет мощность континуума, то множество $X = \cup_{\alpha\in[0,1]} X_\alpha$ тоже имеет мощность континуума. •

Глава 3. Числовые последовательности и ряды.

§ 3.1. *Числовые последовательности.*

Числовой последовательностью называется отображение из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$).

Определение. Число α называется *пределом последовательности* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ для всех $n > N$. •

В символьном виде это определение записывается следующим образом:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\big((n > N) \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon\big).$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*. Если предел последовательности существует и равен какому-либо числу α, то говорят также, что последовательность *сходится к* α. Этот факт обозначается так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ или «$a_n \to \alpha$ при $n \to \infty$». Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется *расходящейся*.

Теорема. Последовательность может иметь только один предел. •

Теорема. Сходящаяся последовательность ограничена. •

Теорема. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — сходящиеся последовательности и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$. Тогда
а) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$;
б) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$;
в) если $\beta \neq 0$ и $b_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$. •

Далее мы будем рассматривать последовательности вещественных чисел.

Теорема. (*О сравнении последовательностей*) Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — сходящиеся последовательности и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$. Если $\alpha < \beta$, то существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $a_n < b_n$ для всех $n > N$. •

Следствие. Пусть $N \in \mathbb{N}$, $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — сходящиеся последовательности и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$.
а) Если $a_n < b_n$ для всех $n > N$, то $\alpha \leqslant \beta$.
б) Если $a_n \leqslant b_n$ для всех $n > N$, то $\alpha \leqslant \beta$. •

Теорема. (*Принцип двух полицейских*) Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — числовые последовательности, сходящиеся к одному и тому же пределу p. Если $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то последовательность $\{c_n\}$ также сходится к p. •

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|a_k - a_m| < \varepsilon$ для всех $k > N$ и $m > N$. •

Теорема. (*Критерий Коши*) Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной. •

Пусть $\{a_n\}$ — числовая последовательность. Если для всех $n \in \mathbb{N}$
$a_n < a_{n+1}$, то последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей*;
$a_n \leqslant a_{n+1}$ — *неубывающей*;
$a_n > a_{n+1}$ — *убывающей*;
$a_n \geqslant a_{n+1}$ — *невозрастающей*.

Неубывающая или невозрастающая последовательность называется *монотонной*. Убывающая или возрастающая последовательность называется *строго монотонной*.

Теорема. (*Вейерштрасс*) Любая ограниченная сверху неубывающая последовательность имеет предел. •

Скажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$), если для любого $A \in \mathbb{R}_+$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $a_n > A$ ($a_n < -A$) для всех $n > N$.

Примеры.

1. Если $q \in [0, 1)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

2. Если $q > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

3. Если $k \in \mathbb{N}$ и $q > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{q^n} = 0$.

4. Если $a > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0$ для любого $q \in \mathbb{R}$.

7. (*Определение числа e*) Существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

•

Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — какая-либо последовательность. Если $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, то последовательность $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Упражнение. Если последовательность сходится к a, то любая её подпоследовательность тоже сходится к a. •

Теорема. (*Теорема Больцано — Вейерштрасса для последовательностей*) Любая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность. •

Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность. Определим последовательности:

$$i_n = \inf\{x_k \mid k \geqslant n\}, \quad s_n = \sup\{x_k \mid k \geqslant n\}.$$

Если последовательность $\{i_n\}$ (последовательность $\{s_n\}$) сходится к a, то говорят, что a есть *нижний предел* (*верхний предел*) последовательности $\{x_n\}$. Обозначения:

$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ или $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ — нижний предел последовательности $\{x_n\}$,
$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ или $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ — верхний предел последовательности $\{x_n\}$.

Если последовательность ограничена, то её верхний и нижний пределы существуют.

Число a называется *частичным пределом* последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к a.

Теорема. Нижний и верхний пределы ограниченной последовательности являются её наименьшим и наибольшим частичными пределами соответственно. •

Теорема. Для того, чтобы ограниченная последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы её верхний и нижний пределы совпадали. •

§ 3.2. *Числовые ряды.*

Рядом называется отображение, которое каждой последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ставит в соответствие последовательность $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, такую, что $s_1 = a_1$ и $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется *последовательностью частичных сумм* ряда. Говорят, что *ряд сходится*, если сходится его последовательность частичных сумм, предел которой называется *суммой ряда*. Если ряд не является сходящимся, то говорят, что он *расходится.* Для самого ряда и для его суммы используется одно и то же обозначение: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Теорема. (*Критерий Коши для рядов*) Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $N \in \mathbb{N}$, что $|\sum_{n=k}^{m} a_n| < \varepsilon$ для всех $m > k > N$. •

Упражнение. Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходящиеся ряды и $\lambda \in \mathbb{R}$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ сходятся и $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. •

Пример. (*Гармонический ряд*) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится. •

Теорема. (*Необходимый признак сходимости ряда*) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. •

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость. Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что он *сходится условно.*

Перестановкой назовём любое взаимно-однозначное отображение σ множества $\mathbb{N}$ на себя.

Теорема. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$, полученный перестановкой членов исходного ряда, тоже сходится абсолютно и суммы обоих рядов совпадают. •

Теорема. (*Признак сравнения*) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — ряды с положительными членами и $a_n \leqslant b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда
а) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
б) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. •

Следствие. (*Мажорантный признак Вейерштрасса*) Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таковы, что $|a_n| \leqslant b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. •

Теорема. (*Признак Коши*) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — произвольный ряд и $\alpha = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда
а) если $\alpha < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится;
б) если $\alpha > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. •

Теорема. (*Признак Даламбера*) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — произвольный ряд и существует

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha.$$

Тогда
а) если $\alpha < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится;
б) если $\alpha > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. •

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — произвольный ряд и $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Определим $b_k = \sum_{m=n_{k-1}+1}^{n_k} a_m$. Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ получен группировкой членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ является подпоследовательностью последовательности частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Поэтому из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с положительными членами, то его сходимость следует из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Теорема. (*Прореживающий признак Коши*) Пусть $\{a_n\}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел: $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant 0$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$. •

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$. •

Пусть $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел. Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ называется *знакопеременным* (или *знакочередующимся*).

Теорема. (*Лейбниц*) Если последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_n \geqslant a_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ сходится. •

Пусть даны наборы чисел: $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ и $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$. Обозначим: $B_0 = 0$, $B_1 = \beta_1$, $B_2 = \beta_1 + \beta_2$, ..., $B_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$. Тогда $\beta_k = B_k - B_{k-1}$ для $k = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма. (*Преобразование Абеля*)

$$\sum_{m=1}^{n} \alpha_m \beta_m = \alpha_n B_n - \sum_{m=1}^{n-1} (\alpha_{m+1} - \alpha_m) B_m.$$

•

Лемма. Пусть $L = \max\{|B_1|, |B_2|, \ldots, |B_n|\}$ и последовательность $\{\alpha_m\}$ монотонна. Тогда $|\sum_{m=1}^{n} \alpha_m \beta_m| \leqslant L(|\alpha_1| + 2|\alpha_n|)$. •

Теорема. (*Признак Абеля*) Предположим, что
1) $\{a_n\}$ — монотонная последовательность;
2) существует число $K \in \mathbb{R}_+$, такое, что $|a_n| \leqslant K$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.
Тогда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. •

Теорема. (*Признак Дирихле*) Предположим, что
1) $\{a_n\}$ — монотонная последовательность;
2) существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;
3) существует $K \in \mathbb{R}_+$, такое, что $|\sum_{n=1}^{m} b_n| \leqslant K$ для всех $m \in \mathbb{N}$.
Тогда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. •

Теорема. (*О произведении рядов*) Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно к A и B соответственно. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, где $c_k = \sum_{n=1}^{k} a_n b_{k-n+1}$, сходится абсолютно к AB. •

Глава 4. Функции вещественной переменной.

В этой главе мы будем изучать функции (отображения), действующие из некоторого множества $E \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

§ 4.1. *Предел функции в точке.*

Определение. Скажем, что вещественное число A является пределом функции f в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех $x \in \operatorname{dom} f$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$. •

Заметим, что точка a может и не принадлежать $\operatorname{dom} f$, однако она должна быть предельной точкой этого множества. Тот факт, что A является пределом функции f в точке a, записывают следующим образом: $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. •

Теорема. (*Гейне*) Для того, чтобы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности точек $\{x_n\}$, сходящейся к точке a при $n \to \infty$, выполнялось соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. •

Определим сумму и произведение функций f и g, имеющих одну и ту же область определения:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Следствие. Если функции f и g имеют одну и ту же область определения, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то
1) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = A + B$,
2) $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = AB$,
3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ при условии, что $B \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a. •

Следствие. Пусть функции f и g имеют одну и ту же область определения, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Если $A < B$, то существует $\delta > 0$, такое, что $f(x) < g(x)$ для всех $x \in \operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$. •

Следствие. Пусть функции f, g и h имеют одну и ту же область определения, и $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ в некоторой окрестности точки a. Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, то существует предел $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$. •

Можно рассмотреть случай $a = \pm\infty$. Скажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A\right)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $K \in \mathbb{R}_+$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при всех $x \in \operatorname{dom} f$, удовлетворяющих неравенству $x > K$ $(x < -K)$.

§ 4.2. *Показательная, логарифмическая и степенная функции.*

Показательная функция (a^x).

Наша цель определить a^x для всех $a \in \mathbb{R}_+$ и $x \in \mathbb{R}$. Мы уже определили a^n, $a^{1/n}$ для $n \in \mathbb{N}$ и a^{-1} для $a \neq 0$, причем $a^n a^m = a^{n+m}$ для $n, m \in \mathbb{N}$, а a^{-1} и $a^{1/n}$ пока что являются символами, обозначающими такие вещественные числа, что $aa^{-1} = 1$ и $\left(a^{1/n}\right)^n = a$.

Сначала рассмотрим случай $a > 1$. Положим по определению $a^0 = 1$.

Лемма. $(a^m)^{1/n} = (a^{1/n})^m$ для $m, n \in \mathbb{N}$. •

Из этой леммы следует, что мы можем рассматривать выражения вида $a^{m/n}$ для $m, n \in \mathbb{N}$.

Лемма. $(a^{m/n})^{-1} = (a^{-1})^{m/n}$ для $m, n \in \mathbb{N}$. •

Лемма. $a^{m/n} = a^{mk/nk}$ для $m, n, k \in \mathbb{N}$. •

Таким образом, мы придали смысл выражениям вида a^r для $r \in \mathbb{Q}$.

Лемма. Если $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, то $a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$. $\bullet$

Таким образом, мы можем обращаться с выражениями вида a^r для $r \in \mathbb{Q}$ точно так же, как с натуральными степенями числа a.

Лемма. Если $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ и $r_1 > r_2$, то $a^{r_1} > a^{r_2}$. $\bullet$

Лемма. $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni r\to r_0} a^r = a^{r_0}$. $\bullet$

Мы определили показательную функцию на $\mathbb{Q}$. Доопределим её на $\mathbb{R}$.

Лемма. $\sup\{a^r \mid r < x,\ r \in \mathbb{Q}\} = \inf\{a^r \mid r > x,\ r \in \mathbb{Q}\}$ для любого $x \in \mathbb{R}$. $\bullet$

Положим по определению $a^x = \sup\{a^r \mid r < x,\ r \in \mathbb{Q}\} = \inf\{a^r \mid r > x,\ r \in \mathbb{Q}\}$. Таким образом, функция a^x полностью определена на $\mathbb{R}$. Эта функция называется *показательной* и обозначается $\exp_a$ (т.е., $a^x = \exp_a x$). Число a называется *основанием* показательной функции. Если $a = e$, то индекс a опускают и пишут просто exp. Функцию $\exp x = e^x$ называют *экспонентой* или *экспоненциальной функцией*. Изучим свойства функции $\exp_a$.

Лемма. $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni r\to x} a^r = a^x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. $\bullet$

Лемма. $a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$ для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. $\bullet$

Утверждение. Если $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1 > x_2$, то $a^{x_1} > a^{x_2}$. $\bullet$

Утверждение. $\lim\limits_{\mathbb{R}\ni x\to x_0} a^x = a^{x_0}$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}$. $\bullet$

Утверждение. Показательная функция $\exp_a$ является биекцией $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}_+$. $\bullet$

Теперь рассмотрим случай $a \in (0, 1)$. Число $b = 1/a > 1$, поэтому функция $\exp_b$ уже определена на всей числовой прямой $\mathbb{R}$. Положим по определению $\exp_a x = \exp_b(-x)$, т.е., $a^x = b^{-x}$. Все доказанные выше свойства функции $\exp_a$ сохранятся и для случая $a \in (0, 1)$, только из возрастающей функция превратится в убывающую.

Утверждение. Если $a \in (0, 1)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1 > x_2$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$. $\bullet$

Если $a = 1$, то $a^x = 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Логарифмическая функция.

Поскольку отображение $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ является биекцией при $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, можно определить обратное к нему отображение, которое называется *логарифмической функцией* при основании a и обозначается $\log_a$. Если $a = e$, эта функция называется *натуральным логарифмом* и обозначается ln или log.

Утверждение. Логарифмическая функция обладает следующими свойствами:
1) $\log_a(a^x) = x$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и $a^{\log_a y} = y$ для всех $y \in \mathbb{R}_+$.
2) $\log_a(y_1y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$ для всех $y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+$.
3) $\lim\limits_{\mathbb{R}_+\ni y\to y_0} \log_a y = \log_a y_0$ для любого $y_0 > 0$.
4) $\log_a y^p = p\log_a y$ для любого $y > 0$ и любого $p \in \mathbb{R}$. $\bullet$

Утверждение. Если $a > 1$, то $\log_a$ — возрастающая функция, а если $0 < a < 1$, то — убывающая. $\bullet$

Утверждение. $(x^p)^q = x^{pq}$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$ и $p, q \in \mathbb{R}$. $\bullet$

Степенная функция.

Мы уже определили a^p для всех $a > 0$ и $p \in \mathbb{R}$. Таким образом, мы можем рассмотреть функцию x^p, где переменная x пробегает множество $\mathbb{R}_+$, а p — фиксированное число, называемое *показателем степени* (или просто *степенью*). Функция $x \mapsto x^p$ называется *степенной*. Её можно представить в виде композиции показательной и логарифмической функций:

$$x^p = a^{\log_a(x^p)} = a^{p \log_a x}.$$

Гиперболические функции.

Определим ещё некоторые тесно связанные с показательной функции.

$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ — *гиперболический синус* (другое обозначение $\sinh x$).

$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ — *гиперболический косинус* (другое обозначение $\cosh x$).

$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ — *гиперболический тангенс* (другое обозначение $\tanh x$).

$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ — *гиперболический котангенс* (другое обозначение $\coth x$).

Отметим одно свойство этих функций: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

Теорема. $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{1/x} = e$. •

§ 4.3. ***Асимптотическое поведение функций.***

Пусть f и g — функции, определенные в некоторой окрестности точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Скажем, что *функция f бесконечно мала по сравнению с функцией g при $x \to x_0$*, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Этот факт записывается следующим образом: $f(x) = o\big(g(x)\big)$ при $x \to x_0$ (читается: f есть о малое от g при x, стремящемся к x_0).

Скажем, что $f(x) = O\big(g(x)\big)$ при $x \to x_0$ (читается: f есть о большое от g при x, стремящемся к x_0), если существует $K \in \mathbb{R}_+$ и $\delta > 0$, такие, что $|f(x)| \leqslant K|g(x)|$ при всех $x \in U_\delta(x_0)$, где

$$U_\delta(x_0) = \begin{cases} (x_0 - \delta, x_0 + \delta), & x_0 \in \mathbb{R}, \\ (\delta, +\infty), & x_0 = +\infty, \\ (-\infty, -\delta), & x_0 = -\infty. \end{cases}$$

Примеры.

1) Пусть $a > 1$ и $p \geqslant 0$. Тогда $a^{-x} = o(x^{-p})$ при $x \to +\infty$. То есть, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$.

2) Пусть $p > 0$. Тогда $x^{-p} = o((\ln x)^{-1})$ при $x \to +\infty$. То есть, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$.

3) Пусть $p > 0$. Тогда $|x|^p = o\big((\ln|x|)^{-1}\big)$ при $x \to 0$. То есть, $\lim\limits_{x \to 0} |x|^p \ln|x| = 0$.

4) $\sin x = O(x)$ при $x \to 0$.

5) $\sin x = O(1)$ при $x \to x_0$ для любого $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. •

Справедливы следующие соотношения:
1) $o(f) + o(f) = o(f)$;
2) $o(f) \cdot O(f) = o(f)$;

3) $O(f) + O(f) = O(f)$;
4) $o(f) + O(f) = O(f)$.

§ 4.4. *Непрерывные функции.*

Определение. Скажем, что функция f *непрерывна в точке* $a \in \operatorname{dom} f$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ для всех $x \in \operatorname{dom} f$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$. •

Сравнив это определение с определением предела функции в точке, мы заметим, что функция f *непрерывна в точке* $a \in \operatorname{dom} f$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Говорят, что функция *разрывна* (или *имеет разрыв*) в точке a, если она не является непрерывной в этой точке.

Скажем, что функция непрерывна на множестве E, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Примеры.

1) Функции e^x и a^x $(a > 0)$ непрерывны на $\mathbb{R}$.

2) Функции $\ln x$ и $\log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ непрерывны на $\mathbb{R}_+$.

3) Функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны на $\mathbb{R}$. •

Число A называется *пределом слева* функции f в точке a если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех $x \in (a - \delta, a) \cap \operatorname{dom} f$. •

Предел слева в точке a обозначается $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или просто $f(a - 0)$.

Число A называется *пределом справа* функции f в точке a если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех $x \in (a, a + \delta) \cap \operatorname{dom} f$. •

Предел слева в точке a обозначается $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или просто $f(a + 0)$.

Упражнение. Для того, чтобы функция f была непрерывна в точке $a \in \operatorname{dom} f$, необходимо и достаточно, чтобы $f(a - 0) = f(a + 0) = f(a)$. •

Скажем, что функция f имеет в точке a *устранимый разрыв*, если $f(a - 0) = f(a + 0) \neq f(a)$. Например, функция $f(x) = (\operatorname{sgn} x)^2$ имеет в точке $x = 0$ устранимый разрыв.

Скажем, что функция f имеет в точке a *разрыв первого рода*, если $f(a - 0)$ и $f(a + 0)$ существуют, но не совпадают. Например, функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода.

Скажем, что функция f имеет в точке a *разрыв второго рода*, если хотя бы один из пределов $f(a - 0)$ или $f(a + 0)$ не существует. Например, функция $f(x) = \sin(1/x)$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода (оба предела не существуют). Функция $f(x) = 1/x$ также имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода (оба предела не существуют).

§ 4.5. *Свойства непрерывных функций.*

Теорема. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in \mathbb{R}$. Тогда существуют $\delta > 0$ и $K \in \mathbb{R}_+$, такие, что $|f(x)| \leqslant K$ для всех $x \in (a - \delta, a + \delta)$. •

Теорема. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in \mathbb{R}$ и $f(a) > 0$. Тогда существует $\delta > 0$, такое, что $f(x) > 0$ для всех $x \in (a - \delta, a + \delta)$. •

Теорема. Пусть функции f и g непрерывны в точке $a \in \mathbb{R}$. Тогда
1) функции $(f+g)$ и fg непрерывны в точке a;
2) если $g(a) \neq 0$, то функция f/g непрерывна в точке a. $\bullet$

Теорема. Пусть функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in \mathbb{R}$, а функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $g(a)$. Тогда функция $f \circ g$ непрерывна в точке a. $\bullet$

Из этой теоремы следует, что $\lim\limits_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\big(\lim\limits_{x\to a} g(x)\big)$, если функция f непрерывна и существует $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Теорема. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная на $[a,b]$ функция. Если $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$, то существует точка $c \in (a,b)$, такая, что $f(c) = 0$. $\bullet$

С помощью этой теоремы можно приближенно находить решения уравнения $f(x) = 0$ (методом деления отрезка пополам).

Теорема. (*Вейерштрасс*) Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная на $[a,b]$ функция. Тогда f ограничена на $[a,b]$ и существуют точки $\alpha, \beta \in [a,b]$, такие, что $f(\alpha) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $f(\beta) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. $\bullet$

Пусть $E \subset \operatorname{dom} f$. Скажем, что функция f *равномерно непрерывна на* E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для всех $x', x'' \in \operatorname{dom} f$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| < \delta$.

Если функция равномерно непрерывна на E, то она непрерывна в каждой точке множества E.

Теорема. (*Кантор — Гейне*) Если функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a,b]$, то она равномерно непрерывна на $[a,b]$. $\bullet$

§ 4.6. *Монотонные функции.*

Функция f называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если $f(x') \leqslant f(x'')$ $\big(f(x') \geqslant f(x'')\big)$ для всех $x', x'' \in \operatorname{dom} f$, удовлетворяющих неравенству $x' \leqslant x''$.

Функция f называется *убывающей* (*возрастающей*), если $f(x') > f(x'')$ $\big(f(x') < f(x'')\big)$ для всех $x', x'' \in \operatorname{dom} f$, удовлетворяющих неравенству $x' < x''$.

Функция f называется *монотонной*, если она неубывающая или невозрастающая. Функция f называется *строго монотонной*, если она убывающая или возрастающая.

Теорема. Если $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ монотонная функция, то она может иметь разрывы только первого рода. $\bullet$

Теорема. Монотонная функция может иметь не более, чем счетное число разрывов. $\bullet$

Теорема. Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция. Для того, чтобы f была непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы $f\big([a,b]\big) = [f(a), f(b)]$. $\bullet$

Аналогичное утверждение справедливо и для невозрастающих функций.

Теорема. Если f — строго монотонная функция, то она имеет обратную f^{-1}. $\bullet$

Теорема. Если f — строго монотонная непрерывная функция, то обратная функция f^{-1} также строго монотонна и непрерывна. $\bullet$

Глава 5. Дифференцирование.

§ 5.1. *Дифференцируемые функции.*

Определение. Функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой в точке* $x_0 \in (a, b)$, если существует $A \in \mathbb{R}$, такое, что $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$. •

Иногда это определение удобно сформулировать в такой форме: функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемой в точке $x_0 \in (a, b)$, если существует $A \in \mathbb{R}$, такое, что $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h)$ при $h \to 0$.

Число A называется *производной* функции f в точке x_0. Обычно производная функции f в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ или $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Нетрудно видеть, что если f дифференцируема в точке x_0, то

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Обратное утверждение тоже верно: если существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha,$$

то функция f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = \alpha$.

Если функция дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Теорема. Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x_0. Тогда
1) функции $f + g$ и fg дифференцируемы в точке x_0 и

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

2) если $g(x_0) \neq 0$, то функция f/g дифференцируема в точке x_0 и

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$ •

Теорема. Если функция g дифференцируема в точке x_0, а функция f дифференцируема в точке $g(x_0)$, то функция $f \circ g$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(f \circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)\, g'(x_0).$$ •

Теорема. Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ строго монотонна, дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$, непрерывна в некоторой окрестности этой точки и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда функция f^{-1} дифференцируема в точке $f(x_0)$ и

$$(f^{-1})'\big(f(x_0)\big) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$ •

Скажем, что функция *дифференцируема на множестве* E, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Пусть функция f дифференцируема на (a,b). Тогда мы можем определить функцию, которая каждой точке x интервала (a,b) ставит в соответствие $f'(x)$. Если полученная функция f' дифференцируема, мы можем её продифференцировать и получить функцию $(f')'$, называемую второй производной функции f. Действуя далее по такой же схеме, мы можем определить производную функции f любого порядка. Производные порядка k обозначаются $f^{(k)}$ или $\frac{d^k f}{dx^k}$. Для производных второго и третьего порядка используются ещё обозначения f'' и f''' соответственно. Кроме того, под $f^{(0)}$ (производная нулевого порядка) понимают саму функцию f.

Пусть E — интервал. Через $C^k(E)$ обозначается множество функций, имеющих на E непрерывные производные порядка k. Множество $C^0(E)$, обозначаемое обычно через $C(E)$, есть множество непрерывных на E функций. Через $C^\infty(E)$ обозначается множество функций, имеющих на E непрерывные производные любого порядка $k \in \mathbb{N}$.

Упражнение. Доказать формулы:

$$\big(f_1 f_2 \cdots f_n\big)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_n',$$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m f^{(n-m)} g^{(m)}.$$ •

§ 5.2. ***Классические теоремы дифференциального исчисления.***

Пусть $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Точка $x_0 \in (a,b)$ называется точкой *локального максимума* (*локального минимума*) функции f, если существует такая окрестность U этой точки, что $f(x_0) \geqslant f(x)$ $\big(f(x_0) \leqslant f(x)\big)$ для всех $x \in U$.

Если x_0 — точка локального минимума или максимума, она называется точкой локального экстремума.

Пусть $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Точка $x_0 \in (a,b)$ называется точкой *строго локального максимума* (*строго локального минимума*) функции f, если существует такая окрестность U этой точки, что $f(x_0) > f(x)$ $\big(f(x_0) < f(x)\big)$ для всех $x \in U \setminus \{x_0\}$.

Теорема. (*Ферма*) Пусть $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. Если $x_0 \in (a,b)$ есть точка локального экстремума функции f, то $f'(x_0) = 0$. •

Теорема. (*Ролль*) Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, дифференцируемая на (a,b). Если $f(a) = f(b)$, то существует такая точка $x_0 \in (a,b)$, что $f'(x_0) = 0$. •

Теорема. (*Теорема Лагранжа о конечных приращениях*) Пусть $f : (A,B) \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. Тогда для любой интервал $(a,b) \subset (A,B)$ содержит такую точку ξ, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$. •

Следствие. Пусть $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. Если $f'(x) > 0$ $\big(f'(x) \geqslant 0\big)$ для всех $x \in (a,b)$, то f — возрастающая (неубывающая) на (a,b) функция. •

Следствие. Пусть $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. Для того, чтобы f была постоянной на (a,b), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a,b)$. •

Теорема. (*Теорема Коши о конечных приращениях*) Пусть $f : (A,B) \to \mathbb{R}$ и $g : (A,B) \to \mathbb{R}$ — дифференцируемые функции. Тогда для любой интервал $(a,b) \subset (A,B)$ содержит такую точку ξ, что $g'(\xi)\big(f(b) - f(a)\big) = f'(\xi)\big(g(b) - g(a)\big)$. •

Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, т.е. она имеет производные любого порядка, какой нам потребуется. Зафиксируем какую-либо точку x_0 и составим полином

$$P_n(f,x,x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k.$$

Для того, чтобы ответить на вопрос, насколько близки значения $f(x)$ и $P_n(f,x,x_0)$, мы должны оценить $r_n(f,x,x_0) = f(x) - P_n(f,x,x_0)$. Если $r_n(f,x,x_0)$ получится малым в каком-то смысле, то мы сможем пользоваться *формулой Тейлора*:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + r_n(f,x,x_0).$$

При $x_0 = 0$ формула Тейлора часто называется *формулой Маклорена*. Функция $r_n(f,x,x_0)$ называется *остаточным членом* в формуле Тейлора. Таким образом, $P_n(f,x,x_0) \to f(x)$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $r_n(f,x,x_0) \to 0$ при $n \to \infty$.

Введем обозначения:

$$I_{a,x} = \begin{cases} (a,x), & x > a, \\ (x,a), & x < a, \end{cases} \qquad \overline{I}_{a,x} = \begin{cases} [a,x], & x > a, \\ [x,a], & x < a, \end{cases}$$

Теорема. Пусть $f : (A,B) \to \mathbb{R}$ — $(n+1)$ раз дифференцируемая функция и $x_0 \in (A,B)$. Тогда для любого $x \in (A,B)$ и любой функции φ, непрерывной на $\overline{I}_{x_0,x}$, дифференцируемой на $I_{x_0,x}$ и такой, что $\varphi' \neq 0$ на $I_{x_0,x}$, существует такая точка $\xi \in I_{x_0,x}$, что

$$r_n(f,x,x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{n!\, \varphi'(\xi)}\, f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n. \qquad \bullet$$

Возьмем $\varphi(t) = x - t$. Тогда

$$r_n(f,x,x_0) = \frac{(x-x_0)}{n!}\, f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n \quad \text{— \textit{остаточный член в форме Коши.}}$$

Возьмем $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$. Тогда

$$r_n(f,x,x_0) = \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} \quad \text{— \textit{остаточный член в форме Лагранжа.}}$$

Лемма. Если $\varphi : (A,B) \to \mathbb{R}$ — n раз дифференцируемая функция, $0 \in (A,B)$ и $\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(n)} = 0$, то $\varphi(x) = o(|x|^n)$ при $x \to 0$. $\bullet$

Теорема. (*Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*) Пусть $f : (A,B) \to \mathbb{R}$ — n раз дифференцируемая функция и $a \in (A,B)$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + o(|x-x_0|^n) \quad \text{при } x \to x_0. \qquad \bullet$$

Пример. Разложение функции e^x по формуле Тейлора в точке $x_0 = 0$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $\xi \in I_{0,x}$. Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, мы получим разложение функции e^x в *ряд Тейлора* в точке 0:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

В частности, при $x = 1$ получим представление для числа e: $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. •

Теорема. Число e иррационально. •

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — бесконечно дифференцируемая функция. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

называется *рядом Тейлора функции f в точке x_0*.

Пример.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Этот ряд сходится абсолютно для любого $x \in \mathbb{R}$. •

Пример.

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

Этот ряд сходится абсолютно для любого $x \in \mathbb{R}$. •

Пример. Существуют бесконечно дифференцируемые функции, ряд Тейлора которых к ним не сходится. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \exp\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Кроме того, $f^{(k)}(0) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Поэтому $P_n(f, x, 0) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Но $f \not\equiv 0$ на $\mathbb{R}$ (эта функция обращается в нуль только в точке $x = 0$), поэтому $P_n(f, x, 0) \not\to f(x)$ при $n \to \infty$, если $x \neq 0$. •

Пример. (*Неравенство Бернулли*) Если $\alpha \in [1, \infty)$, то $(1 + x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$ для всех $x \in [-1, \infty)$. •

Пример. (*Подстановка разложений*)

$$\sin(\sin x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5) \qquad \text{при } x \to 0.$$ •

§ 5.3. *Степенные ряды.*

Мы будем рассматривать ряды с комплексными членами. Их сходимость определяется так же, как для вещественных рядов (через сходимость последовательности частичных сумм). Скажем, что последовательность комплексных чисел $\{z_k\}$ сходится к $z_0 \in \mathbb{C}$ ($z_k \to z_0$), если

$|z_k - z_0| \to 0$ при $k \to \infty$. Если $z_k = x_k + iy_k$ и $z_0 = x_0 + iy_0$, где $x_k, y_k, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, то $z_k \to z_0$ тогда и только тогда, когда $x_k \to x_0$ и $y_k \to y_0$.

Пусть $\{a_k\}$ — последовательность комплексных чисел и $z_0 \in \mathbb{C}$. Ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, (z - z_0)^k$$

называется степенны́м.

Теорема. Если степенной ряд сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он сходится абсолютно в каждой точке открытого круга $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < |z_1 - z_0|\}$.
Если степенной ряд расходится в некоторой точке z_1, то он расходится в каждой точке $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющей неравенству $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$. •

Таким образом, множество точек, в которых степенной ряд сходится, представляет собой круг с центром в точке z_0. Радиус этого круга называется *радиусом сходимости степенного ряда.*

Другими словами, *радиусом сходимости* степенного ряда называется такое вещественное число R, что ряд сходится в круге $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ и расходится в некоторой точке вне него.

Как следует из последней теоремы, $R = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \mid$ ряд сходится в круге $|z - z_0| < \alpha\}$.

Теорема. (*Коши — Адамар*) $\quad R = \alpha^{-1}, \quad$ где $\alpha = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}$. •

Пример. Радиус сходимости равен 1 для следующих рядов:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (z-3)^k. \qquad \bullet$$

По аналогии с функциями вещественной переменной определим следующие функции комплексной переменной:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \, z^{2k+1}, \qquad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \, z^{2k}.$$

Радиус сходимости этих рядов равен $+\infty$, т.е., они сходятся абсолютно во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Утверждение. $\quad e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \, e^{z_2}$ для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. •

Это свойство оправдывает обозначение ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ в виде показательной функции. Заметим, что

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

В частности, если $z = \varphi \in \mathbb{R}$, то мы получаем *формулу Эйлера*:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

Другое важное свойство показательной функции состоит в том, что $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$ и, как следствие, $|e^{i\varphi}| = 1$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$.

§ 5.4. *Исследование поведения функций.*

Теорема. Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема в каждой точке $x \in (a, b)$. Для того, чтобы f была неубывающей на (a, b), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in (a, b)$. •

Если f — возрастающая функция, то $f' \geqslant 0$. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Однако, если $f' > 0$, то f — возрастающая.

Теорема. Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема и $\xi \in (a, b)$. Если $f'(x) < 0$ при $x \in (a, \xi)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (\xi, b)$, то ξ — точка минимума функции f. •

Теорема. (*Достаточное условие минимума*) Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема, $x_0 \in (a, b)$ и $f'(x_0) = 0$.
Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума функции f.
Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума функции f. •

Теорема. Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ — n раз непрерывно дифференцируемая функция, $x_0 \in (a, b)$, $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
Если n — нечётное, то x_0 не является точкой локального экстремума функции f.
Если n — чётное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума функции f.
Если n — чётное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума функции f. •

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если

$$f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

для всех $x_1, x_2 \in [a, b]$ и любого $\lambda \in (0, 1)$. Если это неравенство является строгим при $x_1 \neq x_2$, то функция f называется *строго выпуклой.*

Функция f называется *вогнутой*, если выпукла функция $(-f)$.

Можно дать эквивалентное определение выпуклости функции: для того, чтобы функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы для любых $x_1, x, x_2 \in [a, b]$, таких, что $x_1 < x < x_2$, выполнялось неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Для строго выпуклых функций это неравенство является строгим.

Теорема. Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема и выпукла (строго выпукла), то f' — неубывающая (возрастающая) функция. •

Теорема. Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема и f' — неубывающая (возрастающая) функция, то f выпукла (строго выпукла). •

Теорема. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — дважды дифференцируемая функция. Для того, чтобы f была выпуклой (строго выпуклой), необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \geqslant 0$ ($f''(x) > 0$) для всех $x \in (a, b)$. •

Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция и $x_0 \in (a, b)$. Если существует $\delta > 0$, такое, что функция f выпукла на $(x_0 - \delta, x_0)$ и вогнута на $(x_0, x_0 + \delta)$ или вогнута на $(x_0 - \delta, x_0)$ и выпукла на $(x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 называется *точкой перегиба* функции f. Очевидно, что если f дважды дифференцируема, то её вторая производная в точке перегиба обращается в нуль.

Теорема. Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема. Для того, чтобы f была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы для любых $x, x_0 \in (a, b)$ выполнялось неравенство: $f(x) \geqslant g_{x_0}(x)$, где $g_{x_0}(x)$ — касательная (прямая) к f в точке x_0. •

Следствие. Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема. Для того, чтобы f была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы для любых $x, y \in (a, b)$ выполнялось неравенство: $f(x) - f(y) \geqslant f'(y)(x - y)$. •

Скажем, что график функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет в точке *a вертикальную асимптоту* при $x \to a+$ (при $x \to a-$), если $f(x) \to +\infty$ или $f(x) \to -\infty$ при $x \to a+$ (при $x \to a-$).

Прямая $x \mapsto g(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, называется *наклонной асимптотой* графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), если $\big(f(x) - g(x)\big) \to 0$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$). Коэффициенты α и β, например, для случая $x \to +\infty$ вычисляются по следующим формулам:

$$\alpha = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad \beta = \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - \alpha x\big).$$

Теорема. (*Правило Лопиталя*) Пусть функции $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ дифференцируемы на интервале (a, b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$, причём $g(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$. Если существует предел

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

и выполняется одно из следующих условий:

1. $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$,
2. $g(x) \to \infty$ при $x \to a+$,

то

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A \quad \text{при } x \to a+. \qquad \bullet$$

§ 5.5. *Классические неравенства анализа.*

Теорема. (*Неравенство Йенсена*) Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция и числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in [0, 1]$ таковы, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Тогда

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)$$

для любых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$. •

Если функция f строго выпукла, то равенство в неравенстве Йенсена достигается лишь тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Взяв в неравенстве Йенсена функцию $f(x) = -\ln x$, которая является строго выпуклой на $\mathbb{R}_+$, мы получим следующее неравенство:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k,$$

которое справедливо, если $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0,1]$ и $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$. В частности, если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1/n$, то

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

То есть, среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического. Если мы положим $n = 2$, $\alpha_1 = 1/p$ и $\alpha_2 = 1/q$, где $p, q \in (1, \infty)$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то получим *неравенство Юнга*:

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

справедливое для всех $a, b \in [0, +\infty)$.

Теорема. (*Неравенство Гёльдера*) Если $p, q \in (1, \infty)$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то

$$\Big|\sum_{k=1}^n x_k y_k\Big| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\Big)^{1/q}$$

для любых наборов вещественных (и даже комплексных) чисел $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\{y_1, \ldots, y_n\}$. •

Теорема. (*Неравенство Минковского*) Если $p \geqslant 1$, то

$$\Big(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\Big)^{1/p}$$

для любых наборов вещественных (и даже комплексных) чисел $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\{y_1, \ldots, y_n\}$. •

Глава 6. Интегрирование.

§ 6.1. *Неопределённый интеграл.*

Дифференцируемая функция $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется *первообразной* функции $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, если $F'(x) = f(x)$ при $x \in (a, b)$.

Очевидно, что первообразная определена не однозначно. Если F — первообразная функции f, то, например, $F + C$ тоже является первообразной этой функции для любой константы C.

Утверждение. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные функции $f(x)$, то существует постоянная C, такая, что $F_1(x) = F_2(x) + C$ для всех x. •

Нахождение первообразной некоторой функции f является операцией, обратной дифференцированию. Эта операция называется неопределённым интегрированием, а её результат — *непределённым интегралом* от функции f, который обозначается через $\int f(x)\,dx$. Таким образом, если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a, b)$, то $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ при $x \in (a, b)$, где $C = const$. Неопределённый интеграл от функции есть совокупность её первообразных, отличающихся на аддитивную постоянную.

Дифференцируемость первообразной является довольно ограничительным условием. Рассмотрим пример.

Пример. Пусть $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на интервале $(-1,1)$, т.е.,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1,0), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0,1). \end{cases}$$

Первообразными этой функции на интервалах $(-1,0)$ и $(0,1)$ являются функции $-x+C_1$ и $x+C_2$ соответственно. «Склеивая» эти функции по непрерывности в точке $x=0$, мы получим функцию $F(x) = |x|+C$. Нетрудно видеть, что $F'(x) = f(x)$ во всех точках интервала $(-1,1)$ за исключением точки $x=0$. В этой точке функция F не дифференцируема. Таким образом, функция $\operatorname{sgn} x$ не имеет первообразной на интервале $(-1,1)$. •

Учитывая этот пример, имеет смысл расширить понятие первообразной (и, как следствие, неопределённого интеграла). Непрерывная функция $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ называется *первообразной* функции $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, если $F'(x) = f(x)$ при $x \in (a,b) \setminus E$, где E — какое-либо счётное подмножество интервала (a,b).

Согласно новому определению, неопределённым интегралом от функции $\operatorname{sgn} x$ на интервале $(-1,1)$ является функция $|x|+C$, где C — произвольная постоянная.

Лемма. (*Линейность неопределённого интеграла*) Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если определены неопределённые интегралы от функций f и g, то определён неопределённый интеграл от функции $\alpha f + \beta g$ и

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx + C,$$

где C — произвольная постоянная. •

Лемма. (*Формула интегрирования по частям*) Если функции f и g дифференцируемы, то

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx + C,$$

где C — произвольная постоянная. •

Лемма. (*Формула замены переменной*) Если φ — непрерывно дифференцируемая функция и

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad C = const,$$

то

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt = F\big(\varphi(t)\big) + C,$$

где C — произвольная постоянная. •

Каждая из этих формул рассматривается на тех промежутках вещественной оси $\mathbb{R}$, на которых определена соответствующая подынтегральная функция. Если таких промежутков несколько, то постоянная C может меняться от промежутка к промежутку.

§ 6.2. *Определённый интеграл.*

Разбиением отрезка $[a,b] \subset \mathbb{R}$ назовём произвольное множество точек $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, таких, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Далее будут приняты следующие обозначения: $A_k = [x_{k-1}, x_k]$, $\alpha_k = x_k - x_{k-1}$, $\lambda(P) = \max_{k=1,\ldots,n} \alpha_k$.

Разбиением с выделенными точками называется пара $(P, \boldsymbol{\xi})$, где P — разбиение и $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — набор точек, таких, что $\xi_k \in A_k$.

Пусть заданы функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и разбиение с выделенными точками $(P, \boldsymbol{\xi})$ отрезка $[a, b]$. Величина

$$\sigma(f, P, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \alpha_k$$

называется *интегральной суммой* функции f, соответствующей разбиению $(P, \boldsymbol{\xi})$.

Определение. Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$, если существует $I \in \mathbb{R}$, такое, что

$$\text{для любого } \varepsilon > 0 \text{ найдётся } \delta > 0, \text{ такое, что } \big|\sigma(f, P, \boldsymbol{\xi}) - I\big| < \varepsilon \text{ при } \lambda(P) < \delta.$$

Число I называется *интегралом Римана* (или *определённым интегралом Римана*) от функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)\, dx$. •

Используя теорему Гейне о пределе функции, это определение можно переформулировать следующим образом: число I называется интегралом Римана функции f по отрезку $[a, b]$, если

$$\lim_{m \to \infty} \sigma(f, P^m, \boldsymbol{\xi}^m) = I$$

для любой последовательности разбиений $(P^m, \boldsymbol{\xi}^m)$, такой, что $\lambda(P^m) \to 0$ при $m \to \infty$.

Заметим, что предел интегральных сумм должен быть одним и тем же для любой последовательности разбиений. Если мы установили, что функция интегрируема по Риману, то для вычисления интеграла достаточно посчитать предел по какой-либо одной последовательности разбиений.

Множество функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, будем обозначать через $\mathrm{Rim}[a, b]$.

Пример. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и $f \equiv \alpha$ на $[a, b]$ (т.е, $f(x) = \alpha$ для всех $x \in [a, b]$). Тогда

$$\int_a^b f(x)\, dx = \alpha\, (b - a).$$

•

Пример. Существуют функции, по Риману не интегрируемые. Например, функция Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

•

Определим числа

$$m_k(f) = \inf_{x \in A_k} f(x), \qquad M_k(f) = \sup_{x \in A_k} f(x).$$

Величины

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\, \alpha_k \quad \text{и} \quad S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\, \alpha_k$$

называются *нижней и верхней интегральной суммой Дарбу* соответственно.

Число $\underline{I}$ называется *нижним интегралом* функции f, если $\underline{I} = \lim_{m\to\infty} s(f, P^m)$ для любой последовательности разбиений $\{P^m\}$, такой, что $\lambda(P^m) \to 0$.

Число $\overline{I}$ называется *верхним интегралом* функции f, если $\overline{I} = \lim_{m\to\infty} S(f, P^m)$ для любой последовательности разбиений $\{P^m\}$, такой, что $\lambda(P^m) \to 0$.

Для функции Дирихле $\underline{I}(f) = 0$, $\overline{I}(f) = 1$.

Теорема. Для того, чтобы ограниченная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ была интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. В этом случае $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. •

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. *Колебанием* функции f на множестве E называется число

$$\omega(f, E) = \sup_{x_1, x_2 \in E} |f(x_1) - f(x_2)|\,.$$

Иногда колебание обозначают $\operatorname{osc}(f, E)$ (от слова “oscillation”). Заметим, что

$$\omega(f, E) = \sup_{x\in E} f(x) - \inf_{x\in E} f(x).$$

Теорема. (*Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции по Риману*)
Для того, чтобы функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ была интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $\delta > 0$, такое, что $\sum_{k=1}^n \omega(f, A_k)\,\alpha_k < \varepsilon$ для любого разбиения P, удовлетворяющего условию $\lambda(P) < \delta$. •

Следствие. Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, то $f \in \operatorname{Rim}[a, b]$. •

Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Функция f называется ограниченной, если существует число $K \in \mathbb{R}_+$, такое, что $|f(x)| \leqslant K$ для всех $x \in E$.

Теорема. (*Необходимое условие интегрируемости функции по Риману*)
Если $f \in \operatorname{Rim}[a, b]$, то f — ограниченная функция на $[a, b]$. •

Теорема. Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена и имеет конечное число точек разрыва, то $f \in \operatorname{Rim}[a, b]$. •

Существуют интегрируемы по Риману функции, имеющие бесконечное число точек разрыва. Например, функция $f(x) = \operatorname{sgn}\big(\sin(1/x)\big)$ интегрируема на отрезке $[0, 1]$.

Теорема. Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ монотонна и ограничена, то $f \in \operatorname{Rim}[a, b]$. •

Теорема. (*Линейность определённого интеграла*)
Если $f, g \in \operatorname{Rim}[a, b]$ и $\mu \in \mathbb{R}$, то $(f + g) \in \operatorname{Rim}[a, b]$, $(\mu f) \in \operatorname{Rim}[a, b]$ и

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \mu f(x)\,dx = \mu \int_a^b f(x)\,dx.$$ •

Теорема. Если $f, g \in \operatorname{Rim}[a, b]$, то $|f| \in \operatorname{Rim}[a, b]$ и $(fg) \in \operatorname{Rim}[a, b]$. •

Лемма. Если $f \in \operatorname{Rim}[a, b]$, то $f \in \operatorname{Rim}[c, d]$ для любого отрезка $[c, d] \subset [a, b]$. •

Теорема. (*Аддитивность интеграла Римана*) Если $f \in \mathrm{Rim}[a,b]$ и $c \in (a,b)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad \bullet$$

Пусть $c, d \in \mathbb{R}$ и $c < d$. Положим по определению

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0, \qquad \int_d^c f(x)\,dx = -\int_c^d f(x)\,dx.$$

Следствие. Пусть $f \in \mathrm{Rim}[a,b]$ и $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$. Тогда

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\alpha f(x)\,dx = 0. \qquad \bullet$$

Теорема. (*Монотонность интеграла Римана*) Если $f, g \in \mathrm{Rim}[a,b]$ и $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx. \qquad \bullet$$

Следствие. Пусть $f \in \mathrm{Rim}[a,b]$, $a \leqslant b$ и $f \geqslant 0$ на $[a,b]$. Тогда $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$. $\bullet$

Следствие. Пусть $f \in \mathrm{Rim}[a,b]$ и $a \leqslant b$. Тогда $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$. $\bullet$

Следствие. Пусть $f \in \mathrm{Rim}[a,b]$, $a \leqslant b$, $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ и $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогда

$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\,(b-a). \qquad \bullet$$

Теорема. (*Первая теорема о среднем*) Пусть $f, g \in \mathrm{Rim}[a,b]$, $g \geqslant 0$ (или $g \leqslant 0$) на $[a,b]$, $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ и $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогда существует число $\mu \in [m,M]$, такое, что

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то существует точка $\xi \in [a,b]$, такая, что

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx. \qquad \bullet$$

Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной по Гёльдеру* с показателем $\alpha \in (0,1)$, если существует число $K \in \mathbb{R}_+$, такое, что $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|^\alpha$ для всех $x, y \in E$, удовлетворяющих неравенству $|x-y| \leqslant 1$. Число K называется *постоянной Гёльдера* функции f. Множество таких функций обозначается через $C^\alpha(E)$ (или $C^{0,\alpha}(E)$).

Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной по Липшицу*, если существует число $K \in \mathbb{R}_+$, такое, что $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$ для всех $x, y \in E$, удовлетворяющих неравенству $|x-y| \leqslant 1$. Число K называется *постоянной Липшица* функции f. Множество таких функций обозначается через $\mathrm{Lip}(E)$ (или $C^{0,1}(E)$).

Нетрудно проверить, что $\mathrm{Lip}(E) \subset C^{\alpha}(E) \subset C(E)$, где $C(E)$ — множество непрерывных на E функций.

Лемма. Если $f \in \mathrm{Rim}[a,b]$, то функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ принадлежит $\mathrm{Lip}[a,b]$, т.е., является непрерывной на $[a,b]$. •

Лемма. Пусть $f, g \in \mathrm{Rim}[a,b]$, g — неотрицательная и невозрастающая на $[a,b]$ функция. Тогда существует $\xi \in [a,b]$, такое, что

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx. \qquad \bullet$$

Теорема. (*Вторая теорема о среднем*) Пусть $f, g \in \mathrm{Rim}[a,b]$ и функция g монотонна. Тогда существует число $\xi \in [a,b]$, такое, что

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx. \qquad \bullet$$

Теорема. Пусть $f \in \mathrm{Rim}[a,b]$ и f непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$. •

Следствие. Если $f \in C[a,b]$, то функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема на $[a,b]$ и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a,b]$. •

Следствие. Если $f \in \mathrm{Rim}[a,b]$ и f имеет конечное (или счётное) число точек разрыва, то функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной функции f на отрезке $[a,b]$. •

Теорема. (*Формула Ньютона — Лейбница*) Если $f \in \mathrm{Rim}[a,b]$, f имеет конечное (или счётное) число точек разрыва и $\widetilde{F}$ — какая-либо первообразная функции f на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \widetilde{F}(b) - \widetilde{F}(a). \qquad \bullet$$

Теорема. (*Формула интегрирования по частям*) Если функции f и g непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx. \qquad \bullet$$

Разность $f(b) - f(a)$ часто обозначают через $f(x)\big|_{x=a}^{x=b}$ или, если исключена путаница, через $f(x)\big|_a^b$. Таким образом, формулу интегрирования по частям можно записать так:

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx.$$

Теорема. (*Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме*)
Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — n раз непрерывно дифференцируемая функция и $x_0 \in [a,b]$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\,f^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^x f^{(n)}(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt$$

для всех $x \in [a,b]$. $\bullet$

Теорема. (*Формула замены переменной для непрерывных функций*) Если φ — непрерывно дифференцируемое отображение отрезка $[\alpha,\beta]$ *на* отрезок $[a,b]$, такое, что $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$, то для любой функции $f\in C[a,b]$ справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt. \qquad \bullet$$

Теорема. (*Формула замены переменной для интегрируемых функций*) Если φ — непрерывно дифференцируемое строго монотонное отображение отрезка $[\alpha,\beta]$ *на* отрезок $[a,b]$, то для любой функции $f\in \mathrm{Rim}[a,b]$ справедливо равенство:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt. \qquad \bullet$$

§ 6.3. *Несобственные интегралы.*

Обобщим понятие интеграла Римана, определив его на бесконечном промежутке и от неограниченных функций. Такие обобщения носят название несобственных интегралов.

Определение. Пусть $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f\in\mathrm{Rim}[a,b]$ для каждого $b\in[a,+\infty)$ и существует предел $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$. Тогда этот предел называется *несобственным интегралом от функции* f *по промежутку* $[a,+\infty)$ и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. $\bullet$

Аналогично определяется несобственный интеграл $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$, а $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ определим как сумму $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, где a — произвольное вещественное число.

Упражнение. Покажите, что данное определение интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ корректно, т.е., результат вычисления суммы $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ не зависит от выбора числа a. $\bullet$

Пример. Рассмотрим функцию $f(x)=x^{-\alpha}$, $\alpha\geqslant 0$, на промежутке $[1,\infty)$. Если $\alpha>1$, то несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ существует:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{при } \alpha>1.$$

Если же $\alpha\in[0,1]$, то

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx \to +\infty \quad \text{при } b\to+\infty,$$

то есть, в этом случае несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ не существует. $\bullet$

Определение. Пусть $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, $f(x)\to\infty$ при $x\to b-$, $f\in\mathrm{Rim}[a,c]$ для каждого $c\in[a,b)$ и существует предел $\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,dx$. Тогда этот предел называется *несобственным интегралом от функции* f *по промежутку* $[a,b)$ и обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$. $\bullet$

Аналогично определяется несобственный интеграл в случае, когда $f(x)\to\infty$ при $x\to a+$. Если же $f(x)\to\infty$ при $x\to x_0-$ или при $x\to x_0+$, то определим несобственный интеграл

$\int_a^b f(x)\,dx$ как сумму $\int_a^{x_0} f(x)\,dx+\int_{x_0}^b f(x)\,dx$. Заметим, что каждый интеграл в этой сумме должен существовать.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x)=x^{-\alpha}$, $\alpha\geqslant 0$, на промежутке $(0,1]$. Если $\alpha\in[0,1)$, то несобственный интеграл $\int_0^1 f(x)\,dx$ существует:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx=\frac{1}{1-\alpha}\quad \text{при } \alpha\in[0,1).$$

Если же $\alpha\geqslant 1$, то

$$\int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx\to+\infty\quad \text{при } c\to 0+,$$

то есть, в этом случае несобственный интеграл $\int_0^1 f(x)\,dx$ не существует. •

Оба типа несобственных интегралов определяются через предел, поэтому если несобственный интеграл существует, то говорят, что он сходится, а если не существует, то — расходится.

Далее, оба типа несобственных интегралов можно рассматривать по одной схеме. Пусть $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ и реализуется одна из следующих ситуаций:

1. $\omega=+\infty$,
2. $\omega\in(a,+\infty)$ и $f(x)\to\infty$ при $x\to\omega-$.

Тогда мы будем говорить о несобственном интеграле $\int_a^\omega f(x)\,dx$.

Теорема. (*Признак сравнения*) Пусть $f,g:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ и $0\leqslant f\leqslant g$ на $[a,\omega)$. Тогда

1. если несобственный интеграл $\int_a^\omega g(x)\,dx$ сходится, то сходится несобственный интеграл $\int_a^\omega f(x)\,dx$;
2. если несобственный интеграл $\int_a^\omega f(x)\,dx$ расходится, то расходится несобственный интеграл $\int_a^\omega g(x)\,dx$.

Теорема. (*Интегральный признак сходимости числовых рядов*) Если $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ — неотрицательная невозрастающая функция, то несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=1}^\infty f(k)$. •

Теорема. (*Критерий Коши*) Пусть $f\in\mathrm{Rim}[a,b]$ для любого $b\in(a,\omega)$. Для того, чтобы несобственный интеграл $\int_a^\omega f(x)\,dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало такое число $b\in(a,\omega)$, что $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$ для всех $b_1,b_2\in(b,\omega)$. •

Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^\omega f(x)\,dx$ *сходится абсолютно*, если сходится интеграл $\int_a^\omega |f(x)|\,dx$. Говорят, что несобственный интеграл *сходится условно*, если он сходится, но не сходится абсолютно. Как следует из признака сравнения, из абсолютной следует условная сходимость несобственного интеграла.

Теорема. (*Признак Абеля*)
Пусть $f,g\in\mathrm{Rim}[a,b]$ для любого $b\in(a,\omega)$ и функция $g:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ монотонна. Если

1. несобственный интеграл $\int_a^\omega f(x)\,dx$ сходится,

2. функция g ограничена на $[a, \omega)$,

то сходится несобственный интеграл $\int_a^\omega f(x)\, g(x)\, dx$. •

Теорема. (*Признак Дирихле*)
Пусть $f, g \in \mathrm{Rim}[a, b]$ для любого $b \in (a, \omega)$ и функция $g : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ монотонна. Если

1. существует $K \in \mathbb{R}_+$, такое, что $\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant K$ для всех $b \in [a, \omega)$,

2. $g(x) \to 0$ при $x \to \omega-$,

то сходится несобственный интеграл $\int_a^\omega f(x)\, g(x)\, dx$. •

Существует ещё одно обобщение интеграла Римана, тесно связанное с понятием несобственного интеграла. Пусть $\omega \in (a, b)$. Говорят, что функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *интегрируема в смысле главного значения*, если существует предел

$$\lim_{\delta \to 0+} \Big(\int_a^{\omega - \delta} f(x)\, dx + \int_{\omega + \delta}^b f(x)\, dx \Big).$$

Этот предел обозначают $\mathrm{p.v.} \int_a^b f(x)\, dx$ (аббревиатура "p.v." происходит от английского выражения "principal value"). Интеграл в смысле главного значения по ограниченному промежутку обычно возникает в случае, когда $f(x) \to \pm\infty$ при $x \to \omega\pm$. Следует обратить внимание на то, что от точки ω вправо и влево отступаются промежутки одинаковой длины. По-отдельности несобственные интегралы $\int_a^\omega f(x)\, dx$ и $\int_\omega^b f(x)\, dx$ могут и не существовать.

Пример.

$$\mathrm{p.v.} \int_{-1}^1 \frac{1}{x}\, dx = 0,$$

но несобственные интегралы $\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\, dx$ и $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ расходятся (см. пример выше). •

Аналогично определяется интеграл в смысле главного значения по бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$:

$$\mathrm{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^a f(x)\, dx.$$

Глава 7. Функции многих переменных.

§ 7.1. *Пространство* $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ множество упорядоченных наборов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, $\mathbb{R}^n$ есть декартово произведение n множеств вещественных чисел $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n}.$$

Метрическая структура в $\mathbb{R}^n$.

Определим расстояние между элементами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ множества $\mathbb{R}^n$.

Пусть A — какое-либо множество. *Метрикой* называется функция $\rho : A \times A \to \mathbb{R}$, такая, что

1. $\rho(x,y) \geqslant 0$ для всех $x, y \in A$;

2. $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

3. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ для всех $x, y \in A$;

4. $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$ для всех $x, y, z \in A$.

Пара (A, ρ) состоящая из множества и определённой на нём метрики называется *метрическим пространством.* Часто, если из контекста понятно, какая метрика введена на множестве A, то говорят о метрическом пространстве A (без упоминания метрики). Элементы метрического пространства будем называть точками.

На множестве $\mathbb{R}^n$ наиболее часто используется *евклидова метрика*:

$$\rho_e(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\Big)^{1/2}, \qquad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, $\mathbb{R}^n$ есть метрическое пространство.

Линейная (векторная) структура в $\mathbb{R}^n$.

Определим на $\mathbb{R}^n$ операции сложения и умножения на число. Если $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — элементы множества $\mathbb{R}^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то положим

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\lambda \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, $\mathbb{R}^n$ является линейным (векторным) пространством над полем вещественных чисел. Его элементы будем называть векторами. Нулём векторного пространства $\mathbb{R}^n$ называется вектор $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Векторы $\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^k$ называются *линейно независимыми*, если из равенства $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}^i = \mathbf{0}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, следует, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$. В противном случае векторы $\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^k$ называются *линейно зависимыми.* Любой набор из n линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^n$ называется *базисом. Стандартным* (или *каноническим*) базисом в $\mathbb{R}^n$ называется следующий набор векторов:

$$\{\boldsymbol{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{in})\}_{i=1}^{n},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Другими словами, стандартный базис состоит из векторов $\boldsymbol{e}_i$, у которых на i-м месте стоит 1, а все остальные позиции заняты нулями. Заметим, что если $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i$.

Евклидова структура в $\mathbb{R}^n$.

Линейное пространство E над полем вещественных чисел называется *евклидовым*, если каждой паре векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ поставлено в соответствие вещественное число $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$, такое, что

1. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \geqslant 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in E$ и $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;

2. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$;

3. $(\lambda \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ и $\lambda \in \mathbb{R}$;

4. $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}$ для всех $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in E$.

Два вектора $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E$ называются *ортогональными*, если $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$.

Введём в $\mathbb{R}^n$ следующее скалярное произведение: $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^n x_i\,y_i$ для произвольных $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$.

Линейное пространство E над полем вещественных чисел называется *нормированным*, если каждому вектору $\boldsymbol{x}\in E$ поставлено в соответствие вещественное число $\|\boldsymbol{x}\|$, такое, что

1. $\|\boldsymbol{x}\|\geqslant 0$ для всех $\boldsymbol{x}\in E$ и $\|\boldsymbol{x}\|=0\iff\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$;
2. $\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\|$ для всех $\boldsymbol{x}\in E$ и $\lambda\in\mathbb{R}$;
3. $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ для всех $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E$.

Любое евклидово пространство является нормированным с нормой $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$. Для каждого $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ определим его *евклидову норму*:

$$|\boldsymbol{x}|=\Bigl(\sum_{i=1}^n x_i^2\Bigr)^{1/2}.$$

Заметим, что $\rho_e(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ для всех $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$.

Евклидова норма каждого вектора стандартного базиса равна 1. Кроме того, векторы стандартного базиса являются взаимно ортогональными. Поэтому говорят, что стандартный базис является *ортонормированным*.

Теорема. (*Неравенство Коши — Буняковского*) Для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ произвольного евклидова пространства E справедливо неравенство:

$$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|.$$ •

Если $E=\mathbb{R}^n$, то неравенство Коши — Буняковского является частным случаем неравенства Гёльдера.

Открытые, замкнутые и компактные множества в $\mathbb{R}^n$.

Множество $B(\boldsymbol{a},r)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mid|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<r\}$ называется *открытым шаром* радиуса r с центром в точке $\boldsymbol{a}$.

Множество $A\subset\mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если для каждого $\boldsymbol{x}\in A$ существует такое $\delta>0$, что $B(\boldsymbol{x},\delta)\subset A$.

Примеры. 1. Пространство $\mathbb{R}^n$ является открытым множеством.

2. Открытый шар $B(\boldsymbol{a},r)$ является открытым множеством.

3. По определению полагают, что пустое множество $\varnothing$ является открытым, однако и формальный анализ определения открытого множества приводит к такому же выводу. •

Множество $A\subset\mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если множество $CA=\mathbb{R}^n\setminus A$ открыто.

Примеры. 1. Пространство $\mathbb{R}^n$ и пустое множество $\varnothing$ являются замкнутыми множествами.

2. Множество $\overline{B}(\boldsymbol{a}, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| \leqslant r\}$ называется *замкнутым шаром* радиуса r с центром в точке $\boldsymbol{a}$. Замкнутый шар является замкнутым множеством.

3. Множество $S(\boldsymbol{a}, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| = r\}$ называется *сферой* радиуса r с центром в точке $\boldsymbol{a}$. Сфера является замкнутым множеством. •

Точка $\boldsymbol{a}$ называется *внутренней точкой множества* $A \subset \mathbb{R}^n$, если существует такое $\delta > 0$, что $B(\boldsymbol{a}, \delta) \subset A$. Множество внутренних точек множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *внутренностью* множества A и обозначается через A°.

Точка $\boldsymbol{a}$ называется *внешней по отношению к множеству* $A \subset \mathbb{R}^n$, если существует такое $\delta > 0$, что $B(\boldsymbol{a}, \delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$.

Границей множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множество точек пространства $\mathbb{R}^n$, которые не являются ни внутренними, ни внешними по отношению к множеству A. Будем обозначать границу множества A через ∂A. Заметим, что граница всегда является замкнутым множеством.

Примеры. 1. $\partial \mathbb{R}^n = \varnothing$ и $\partial \varnothing = \varnothing$.

2. $\partial \overline{B}(\boldsymbol{a}, r) = \partial B(\boldsymbol{a}, r) = S(\boldsymbol{a}, r)$.

3. Пусть $n = 1$ и $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Тогда $\partial A = [0, 1]$, т.е., множество содержится в своей границе. •

Теорема. 1. Пусть $\{A_\alpha\}$ — произвольное (конечное или бесконечное) семейство открытых множеств в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\cup_\alpha A_\alpha$ — открытое множество.

2. Пусть $\{A_1, \ldots, A_k\}$ — конечный набор открытых множеств в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\cap_{i=1}^k A_i$ — открытое множество. •

Следствие. 1. Пусть $\{A_\alpha\}$ — произвольное (конечное или бесконечное) семейство замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\cap_\alpha A_\alpha$ — замкнутое множество.

2. Пусть $\{A_1, \ldots, A_k\}$ — конечный набор замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\cup_{i=1}^k A_i$ — замкнутое множество. •

Окрестностью точки (множества) в $\mathbb{R}^n$ называется любое открытое множество, содержащее эту точку (это множество). *δ-окрестностью* множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множество $U_\delta(A) = \cup_{\boldsymbol{x} \in A} B(\boldsymbol{x}, \delta)$. Как следует из теоремы, $U_\delta(A)$ — открытое множество. Заметим, что $U_\delta(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, A) < \delta\}$, где $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, A) = \inf_{\boldsymbol{y} \in A} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ — расстояние от точки $\boldsymbol{x}$ до множества A.

Точка $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой* множества $A \subset \mathbb{R}^n$, если для произвольного $\delta > 0$ шар $B(\boldsymbol{x}, \delta)$ содержит бесконечное число точек из A.

Упражнение. Доказать, что точка $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ является предельной точкой множества $A \subset \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда для произвольного $\delta > 0$ шар $B(\boldsymbol{x}, \delta)$ содержит хотя бы одну точку из $A \setminus \{\boldsymbol{x}\}$. •

Замыканием множества в $\mathbb{R}^n$ называется объединение этого множества с множеством его предельных точек. Замыкание множества $A \subset \mathbb{R}^n$ обозначается через $\overline{A}$.

Теорема. Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда $A = \overline{A}$. •

Упражнение. Доказать, что $\overline{A}$ есть «наименьшее» замкнутое множество, содержащее A. То есть, если $A \subset B$ и множество B замкнуто, то $\overline{A} \subset B$.

Указание: доказать сначала, что для произвольных множеств A и B из $A \subset B$ следует $\overline{A} \subset \overline{B}$, а потом воспользоваться теоремой. •

Замкнутым кубом (или *замкнутым параллелепипедом*) в $\mathbb{R}^n$ называется множество $Q = I_1 \times \ldots \times I_n$, где I_k — отрезки (замкнутые интервалы) в $\mathbb{R}$. Другими словами, замкнутый куб есть множество вида $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$.
Открытый куб (или *открытый параллелепипед*) в $\mathbb{R}^n$ есть декартово произведение n открытых интервалов.

Теорема. Пусть $\{Q_k\}$ — последовательность вложенных замкнутых кубов, т.е., $Q_{k+1} \subset Q_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\cap_{k=1}^{\infty} Q_k \neq \varnothing$. Более того, если $\operatorname{diam} Q_k \to 0$ при $k \to \infty$, то множество $\cap_{k=1}^{\infty} Q_k$ состоит из единственной точки. •

Здесь $\operatorname{diam} A$ есть *диаметр* множества A, т.е., $\operatorname{diam} A = \sup_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$.

Семейство множеств $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ называется *покрытием* множества B, если $B \subset \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Если все множества A_α открыты, то семейство $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ называется *открытым покрытием* множества B. Если I' есть подмножество множества индексов I и $B \subset \cup_{\alpha \in I'} A_\alpha$, то семейство $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I'}$ называется *подпокрытием* покрытия $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Таким образом, подпокрытие также является покрытием. Покрытие $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ называется конечным, если I — конечное множество.

Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *компактным* (или *компактом*), если из любого его открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие. Другими словами, если $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — открытое покрытие множества K, то существует конечное множество $I' \subset I$, такое, что $K \subset \cup_{\alpha \in I'} A_\alpha$.

Теорема. Любой замкнутый куб в $\mathbb{R}^n$ является компактным множеством. •

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если существует $r \in \mathbb{R}_+$, такое, что $A \subset B(\mathbf{0}, r)$.

Теорема. (*Гейне — Борель*) Для того, чтобы множество в $\mathbb{R}^n$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и ограниченным. •

Примеры. Сфера и замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ являются компактами. Открытый шар и всё пространство $\mathbb{R}^n$ компактами не являются. •

Последовательности точек в $\mathbb{R}^n$.

Говорят, что последовательность точек $\{\boldsymbol{x}_k\}$ в $\mathbb{R}^n$ *сходится* к точке $\boldsymbol{a}$, если для любой окрестности $U(\boldsymbol{a})$ точки $\boldsymbol{a}$ существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что $\boldsymbol{x}_k \in U(\boldsymbol{a})$ для всех $k > N$.

Утверждение. Последовательность точек $\{\boldsymbol{x}_k\}$ в $\mathbb{R}^n$ *сходится* к точке $\boldsymbol{a}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\boldsymbol{x}_k \in B(\boldsymbol{a}, \varepsilon)$ для всех $k > N$. •

Теорема. Для того, чтобы ограниченная последовательность точек $\{\boldsymbol{x}_k\}$ в $\mathbb{R}^n$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она имела ровно одну предельную точку. •

Теорема. Для того, чтобы последовательность точек $\{\boldsymbol{x}^k\}$ в $\mathbb{R}^n$ сходилась к точке $\boldsymbol{a}$, необходимо и достаточно, чтобы $x_i^k \to a_i$ при $k \to \infty$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$. Здесь $\boldsymbol{x}^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$. •

Упражнение. Каждая ограниченная последовательность точек в $\mathbb{R}^n$ содержит сходящуюся подпоследовательность.
Указание: воспользоваться теоремой Больцано — Вейерштрасса для последовательностей. •

Упражнение. Пусть A — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\{\boldsymbol{x}^k\}$ — сходящаяся к точке $\boldsymbol{a}$ последовательность точек из A. Доказать, что $\boldsymbol{a} \in A$. •

Последовательность точек $\{\boldsymbol{x}_k\}$ в $\mathbb{R}^n$ называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_m| < \varepsilon$ для всех $k, m > N$.

Теорема. (*Критерий Коши*) Для того, чтобы последовательность точек $\{\boldsymbol{x}_k\}$ в $\mathbb{R}^n$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной. •

§ 7.2. *Функции многих переменных.*

Мы будем изучать функции, действующие из некоторого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Не исключается и случай $X = \mathbb{R}^n$. Такие функции ещё называю вектор-функциями, так как их значениями являются векторы.

Проколотой окрестностью точки $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ называется множество вида $U(\boldsymbol{a}) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$, где $U(\boldsymbol{a})$ — окрестность точки $\boldsymbol{a}$. Проколотая окрестность обозначается $\overset{\circ}{U}(\boldsymbol{a})$. Для краткости положим $\overset{\circ}{U}_X(\boldsymbol{a}) = \overset{\circ}{U}(\boldsymbol{a}) \cap X$, $U_X(\boldsymbol{a}) = U(\boldsymbol{a}) \cap X$.

Пусть $\boldsymbol{f} : X \to \mathbb{R}^m$ и $\boldsymbol{a} \in X$. Вектор $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ называется *пределом функции* $\boldsymbol{f}$ *в точке* $\boldsymbol{a}$ (обозначается $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$), если для любой окрестности $U(\boldsymbol{b})$ точки $\boldsymbol{b}$ (в $\mathbb{R}^m$) существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_X(\boldsymbol{a})$ точки $\boldsymbol{a}$, такая, что $\boldsymbol{f}\big(\overset{\circ}{U}_X(\boldsymbol{a})\big) \subset U(\boldsymbol{b})$.

Упражнение. Доказать, что вектор $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ является пределом функции $\boldsymbol{f} : X \to \mathbb{R}^m$ в точке $\boldsymbol{a}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}| < \varepsilon$ для всех $\boldsymbol{x} \in X$, удовлетворяющих неравенству $0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta$. •

Теорема. Предел функции в точке определён единственным образом, то есть, Если векторы $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$ являются пределами функции $\boldsymbol{f}$ в точке $\boldsymbol{a}$, то $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_2$. •

Теорема. Необходимо быть осторожным с вычислением предела функции многих переменных. Может случиться так, что пределы функции по каждой переменной существуют и даже равны, но сам предел функции в этой точке не существует. Например, рассмотрим скалярную функцию $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ двух переменных :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\lim_{x_1\to 0} f(x_1, 0) = \lim_{x_2\to 0} f(0, x_2) = 0$, однако эта функция не имеет предела при $(x_1, x_2) \to (0, 0)$. •

Пусть $\boldsymbol{f} : X \to \mathbb{R}^m$. *Колебанием* функции $\boldsymbol{f}$ на множестве $E \subset X$ называется величина $\omega(\boldsymbol{f}, E) = \operatorname{diam}\big(\boldsymbol{f}(E)\big) = \sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E} |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})|$.

Теорема. (*Критерий Коши*) Для того, чтобы существовал предел функции $\boldsymbol{f}$ в точке $\boldsymbol{a} \in X$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_X(\boldsymbol{a})$ точки $\boldsymbol{a}$, что $\omega\big(\boldsymbol{f}, \overset{\circ}{U}_X(\boldsymbol{a})\big) < \varepsilon$. •

Эту теорему можно сформулировать и по-другому: для того, чтобы существовал предел функции $\boldsymbol{f}$ в точке $\boldsymbol{a} \in X$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| < \varepsilon$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \big(B(\boldsymbol{a}, \delta) \cap X\big) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$.

Функция $\boldsymbol{f}: X \to \mathbb{R}^m$ называется *непрерывной* в точке $\boldsymbol{a} \in X$, если для любой окрестности $U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))$ точки $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ (в $\mathbb{R}^m$) существует окрестность $U_X(\boldsymbol{a})$ точки $\boldsymbol{a}$, такая, что $\boldsymbol{f}\big(U_X(\boldsymbol{a})\big) \subset U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))$.

Упражнение. Доказать, что функция $\boldsymbol{f} : X \to \mathbb{R}^m$ является непрерывной в точке $\boldsymbol{a} \in X$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})| < \varepsilon$ для всех $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta) \cap X$. •

Для вектор-функций справедлива теорема Гейне: функция $\boldsymbol{f} : X \to \mathbb{R}^m$ является непрерывной в точке $\boldsymbol{a} \in X$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) \to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ для любой последовательности $\{\boldsymbol{x}_k\} \subset X$, сходящейся к $\boldsymbol{x}$.

Заметим, что изучение векторных функций можно свести к изучению скалярных функций, так как $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \big(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \dots, f_m(\boldsymbol{x})\big)$.

Функция $\boldsymbol{f} : X \to \mathbb{R}^m$ называется *ограниченной*, если $\boldsymbol{f}(X)$ — ограниченное множество в $\mathbb{R}^m$. Функция $\boldsymbol{f}$ называется *ограниченной на множестве* $E \subset X$, если $\boldsymbol{f}(E)$ — ограниченное множество в $\mathbb{R}^m$.

Теорема. Если функция $\boldsymbol{f} : X \to \mathbb{R}^m$ непрерывна в точке $\boldsymbol{a} \in X$, то она ограничена в некоторой окрестности $U_X(\boldsymbol{a})$ этой точки. •

Теорема. Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $\boldsymbol{a} \in X$ и $f(\boldsymbol{a}) > 0$, то $f(\boldsymbol{x}) > 0$ для всех $\boldsymbol{x}$ из некоторой окрестности $U_X(\boldsymbol{a})$ точки $\boldsymbol{a}$. •

Теорема. Пусть заданы функции $\boldsymbol{f} : X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$ и $\boldsymbol{g} : Y \to \mathbb{R}^k$. Если функция $\boldsymbol{f}$ непрерывна в точке $\boldsymbol{x}_0 \in X$, а функция $\boldsymbol{g}$ непрерывна в точке $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$, то функция $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}) : X \to \mathbb{R}^k$ непрерывна в точке $\boldsymbol{x}_0$. •

Теорема. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и функции $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : X \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $\boldsymbol{a} \in X$. Тогда функции $f + g$, fg, а если $g(\boldsymbol{a}) \neq 0$, то и функция $\dfrac{f}{g}$, непрерывны в точке $\boldsymbol{a} \in X$. •

Функция называется *непрерывной на множестве*, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Множество функций $\boldsymbol{f} : X \to \mathbb{R}^m$, непрерывных на множестве $E \subset X$, обозначается через $C(E, \mathbb{R}^m)$ или просто $C(E)$, если из контекста понятно, что область значений этой функции лежит в $\mathbb{R}^m$.

Функция $\boldsymbol{f} : X \to \mathbb{R}^m$ называется *равномерно непрерывной на множестве* $E \subset X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| < \varepsilon$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$, удовлетворяющих неравенству $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < \delta$.

Теорема. Если $\boldsymbol{f} : X \to \mathbb{R}^m$, K — компактное множество в X и $\boldsymbol{f} \in C(K)$, то $\boldsymbol{f}$ равномерно непрерывна на K. •

Теорема. Если K — компактное множество в $\mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{f} \in C(K, \mathbb{R}^m)$, то функция $\boldsymbol{f}$ ограничена на K, т.е., существует $C \in \mathbb{R}_+$, такое, что $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leqslant C$ для всех $\boldsymbol{x} \in K$. Более того, существуют $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in K$, такие, что $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \max_{\boldsymbol{x} \in K} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) = \min_{\boldsymbol{x} \in K} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. •

Две нормы N_1 и N_2 в $\mathbb{R}^n$ называются *эквивалентными*, если существуют такие постоянные $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$, что $c_1 N_1(\boldsymbol{x}) \leqslant N_2(\boldsymbol{x}) \leqslant c_2 N_1(\boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Теорема. Любая норма в $\mathbb{R}^n$ эквивалентна евклидовой норме. •

Заметим, что отношение эквивалентности обладает следующими свойствами:
1. если N_1 эквивалентна N_2, то N_2 эквивалентна N_1 (*симметричность*);

2. если N_1 эквивалентна N_2, а N_2 эквивалентна N_3, то N_1 эквивалентна N_3 (*транзитивность*).
Из этих свойств и из теоремы следует, что все нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны.

Пример. Помимо евклидовой в пространстве $\mathbb{R}^n$ часто используются следующие нормы:

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|,$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. •

Упражнение. Показать, что $\|\boldsymbol{x}\|_p \to \|\boldsymbol{x}\|_\infty$ при $p \to +\infty$ для каждого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. •

Путь в $\mathbb{R}^n$ есть непрерывное отображение отрезка $[0,1] \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *линейно связным*, если для любых точек $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1 \in E$ существует путь $\Gamma : [0,1] \to E$, связывающий эти точки, т.е., удовлетворяющий следующим свойствам:
1. $\Gamma(0) = \boldsymbol{x}_0$,
2. $\Gamma(1) = \boldsymbol{x}_1$,
3. $\Gamma(\lambda) \in E$ для всех $\lambda \in [0,1]$.

Других типов связности (кроме линейной) в нашем курсе не встретится, поэтому для краткости мы будем часто говорить просто «связное множество», подразумевая при этом линейно связное. *Областью* в $\mathbb{R}^n$ называется открытое линейно связное множество.

Теорема. Пусть E — область в $\mathbb{R}^n$ и $f \in C(E,\mathbb{R})$. Если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in E$, то для любого вещественного числа c, лежащего между $f(\boldsymbol{a})$ и $f(\boldsymbol{b})$, существует точка $\boldsymbol{\xi} \in E$, такая, что $f(\boldsymbol{\xi}) = c$. •

Глава 8. Основы дифференциального исчисления в $\mathbb{R}^n$.

§ 8.1. *Производная функции многих переменных.*

Линейные отображения.

Отображение $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется *линейным*, если $L(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = L(\boldsymbol{x}) + L(\boldsymbol{y})$ и $L(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda L(\boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ и всех $\lambda \in \mathbb{R}$.

Часто, чтобы подчеркнуть, что на вектор $\boldsymbol{x}$ действует линейное отображение L, мы использовать уго́льные скобки: $L\langle\boldsymbol{x}\rangle$. Также используется обозначение $L\boldsymbol{x}$, пришедшее из алгебры. Линейные отображения называют ещё *линейными операторами.*

Линейное отображение $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется *ограниченным*, если существует $C \in \mathbb{R}_+$, такое, что $|L\langle\boldsymbol{x}\rangle| \leqslant C|\boldsymbol{x}|$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. *Нормой линейного отображения* L называется величина

$$\|L\| = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \frac{|L\langle\boldsymbol{x}\rangle|}{|\boldsymbol{x}|}.$$

Упражнение. Показать, что $\|L\| = \sup_{\boldsymbol{x}\in S(\boldsymbol{0},1)} |L\langle\boldsymbol{x}\rangle|$, где $S(\boldsymbol{0},1)$ — сфера единичного радиуса в $\mathbb{R}^n$. •

Линейное отображение является ограниченным тогда и только тогда, когда $\|L\| < \infty$.

Линейное отображение $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется *непрерывным*, если $L\langle\boldsymbol{x}_k\rangle \to L\langle\boldsymbol{x}\rangle$ для любой последовательности $\{\boldsymbol{x}_k\}$, сходящейся к $\boldsymbol{x}$.

Теорема. Линейное отображение непрерывно тогда и только тогда, когда оно ограничено. •

Каждому линейному отображению $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ можно поставить в соответствие матрицу. Пусть $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ — стандартные базисы в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Положим $L_{ij} = \boldsymbol{w}_i \cdot L\langle \boldsymbol{e}_j \rangle$. Заметим, что если $\boldsymbol{y} = L\langle \boldsymbol{x} \rangle$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)$, то $y_i = \sum_{j=1}^n L_{ij} x_j$. В самом деле,

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^m y_i \boldsymbol{w}_i, \qquad \boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{e}_j,$$

поэтому

$$\sum_{k=1}^m y_k \boldsymbol{w}_k = L\Big\langle \sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{e}_j \Big\rangle = \sum_{j=1}^n x_j L\big\langle \boldsymbol{e}_j \big\rangle.$$

Умножив это равенство скалярно на $\boldsymbol{w}_i$ и воспользовавшись тождеством $\boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{w}_k = \delta_{ik}$, мы получим требуемое соотношение.

Производная функции.

Пусть X — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемой* в точке $\boldsymbol{a} \in X$, если существует такое непрерывное (ограниченное) линейное отображение $L_{\boldsymbol{x}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, что равенство

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = L_{\boldsymbol{x}}\langle \boldsymbol{h} \rangle + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})$$

справедливо для любого вектора $\boldsymbol{h}$, удовлетворяющего соотношению $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) \in X$, и некоторой функции $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, такой, что $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$ при $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$.

Линейное отображение $L_{\boldsymbol{x}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется *производной* (или *дифференциалом*) функции $\boldsymbol{f}$ в точке $\boldsymbol{a}$. Для производной используются следующие обозначения:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}), \quad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}),$$

а если мы используем термин «дифференциал», то пишем $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. Таким образом, выражение $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\langle \boldsymbol{h} \rangle$ ($d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\langle \boldsymbol{h} \rangle$) означает, что мы подействовали линейным оператором $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ ($d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$) на вектор $\boldsymbol{h}$.

Сделаем одно замечание относительно функции $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})$. Иногда её удобно записывать в таком виде: $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = |\boldsymbol{h}|\, \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})$, где $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) \to \boldsymbol{0}$ при $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$.

Приведённое выше определение производной годится и для случая, когда X — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$, а $\boldsymbol{a} \in X$ является его предельной точкой. Мы будем рассматривать только простые случаи, когда X — открытое множество или замыкание открытого множества.

Будем говорить, что функция $\boldsymbol{f} : X \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема, если она дифференцируема в каждой точке множества X.

Теорема. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то её производная в этой точке определена единственным образом. •

Очевидно, что если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке. Обратное утверждение не верно.

Теорема. Если функции $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : X \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке $\boldsymbol{a} \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то функции $(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})$ и $(\lambda \boldsymbol{f})$ дифференцируемы в точке $\boldsymbol{a}$ и

$$(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{a}), \qquad (\lambda \boldsymbol{f})'(\boldsymbol{a}) = \lambda\, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}). \qquad \bullet$$

Теорема. Пусть функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $\boldsymbol{a} \in X$. Тогда функция (fg), а если $g(\boldsymbol{a}) \neq 0$, то и функция $\dfrac{f}{g}$, дифференцируема в точке $\boldsymbol{a}$ и

$$(fg)'(\boldsymbol{a}) = g(\boldsymbol{a})\, f'(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})\, g'(\boldsymbol{a}), \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(\boldsymbol{a}) = \frac{g(\boldsymbol{a})\, f'(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{a})\, g'(\boldsymbol{a})}{g^2(\boldsymbol{a})}. \qquad \bullet$$

Теорема. Пусть функция $\boldsymbol{f} : X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке $\boldsymbol{x}_0 \in X$, а функция $\boldsymbol{g} : Y \to \mathbb{R}^k$ дифференцируема в точке $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$. Тогда функция $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}) : X \to \mathbb{R}^k$ дифференцируема в точке $\boldsymbol{x}_0$ и

$$(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})'(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_0) \circ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0).$$

То есть,

$$(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})'(\boldsymbol{x}_0)\langle \boldsymbol{h} \rangle = \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_0) \circ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\langle \boldsymbol{h} \rangle = \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_0)\big\langle \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\langle \boldsymbol{h} \rangle \big\rangle. \qquad \bullet$$

Теорема. Пусть функция $\boldsymbol{f}$, отображающая некоторую окрестность $U(\boldsymbol{x}_0)$ точки $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ на окрестность $V(\boldsymbol{y}_0)$ точки $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \in \mathbb{R}^m$, обладает следующими свойствами:

1. $\boldsymbol{f}$ дифференцируема в точке $\boldsymbol{x}_0$;
2. определена обратная функция $\boldsymbol{f}^{-1} : V(\boldsymbol{y}_0) \to U(\boldsymbol{x}_0)$, которая является непрерывной в точке $\boldsymbol{y}_0$;
3. линейное отображение $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ обратимо.

Тогда обратная функция $\boldsymbol{f}^{-1}$ дифференцируема в точке $\boldsymbol{y}_0$ и $(\boldsymbol{f}^{-1})'(\boldsymbol{y}_0) = (\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0))^{-1}$. $\bullet$

Заметим, что основное утверждение этой теоремы заключается в дифференцируемости обратной функции. Если этот факт уже известен, то формулу для производной обратной функции мы могли бы легко вывести из теоремы о производной композиции функций.

Теорема. (*О конечном приращении*) Пусть функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема. Если $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ и отрезок I, соединяющий эти точки, также лежит в X, то существует точка $\boldsymbol{\xi} \in I$, такая, что

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) = f'(\boldsymbol{\xi})\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle. \qquad \bullet$$

Следствие. Если функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема и $f'(\boldsymbol{x}) = 0$ для всех $\boldsymbol{x}$ из некоторой области $E \subset X$, то f постоянна на E. $\bullet$

§ 8.2. *Частные производные.*

Пусть X — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} : X \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{a} \in X$ и $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$. Предел, если он существует,

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{\lambda}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

назовём *производной функции* $\boldsymbol{f}$ *в точке* $\boldsymbol{a}$ *по направлению вектора* $\boldsymbol{h}$ и обозначим его через $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})$.

Если функция $\boldsymbol{f}$ дифференцируема в точке $\boldsymbol{a}$, то, как нетрудно видеть, $\partial \boldsymbol{f}/\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\langle \boldsymbol{h} \rangle$.

Пусть $\{\boldsymbol{e}_i\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. *Частной производной функции* $\boldsymbol{f}$ *по переменной* x_i называется производная функции $\boldsymbol{f}$ по направлению i-го базисного вектора $\boldsymbol{e}_i$. Она обозначается $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$. Таким образом,

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{e}_i}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\langle \boldsymbol{e}_i \rangle$$

или

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{e}_i) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{\lambda}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Другими словами, чтобы посчитать частную производную по x_i функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, достаточно вычислить производную функции одной переменной $\tilde{f}(t)$ в точке $t = a_i$, где $\tilde{f}(t) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.

Производная функции является линейным отображением, поэтому мы можем сопоставить ей матрицу, которая называется *матрицей Якоби*. Если $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, то частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ являются компонентами матрицы Якоби относительно стандартных базисов пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$. Если $n = m$, то матрица Якоби является квадратной и мы можем посчитать её определитель, называемый *якобианом*.

Интересно исследовать вопрос о связи производной функции и её частных производных. Если функция дифференцируема, то её частные производные, очевидно, существуют. Обратное утверждение не верно. Более того, существование всех частных производных функции в некоторой точке не гарантирует непрерывности функции в этой точке.

Пример. Пусть $G = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1 < 1,\ x_2 = x_1^2\}$. Определим функцию $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in G, \\ 0, & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus G. \end{cases}$$

Тогда существуют $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{0}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{0}) = 0$. Но функция f разрывна в точке $\mathbf{0}$, поэтому она не может быть дифференцируемой в этой точке. •

Теорема. Пусть функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет все частные производные (по всем переменным), которые непрерывны в точке $\boldsymbol{a} \in X$. Тогда f дифференцируема в этой точке. •

Обозначим через $C^1(X)$ множество функций, действующих из X в $\mathbb{R}$, все частные производные от которых определены и непрерывны в X. Как следует из теоремы, если $f \in C^1(X)$, то f дифференцируема в X.

Так как $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, последнюю теорему, да и многие другие утверждения можно сформулировать для векторных функций. Определим $C^1(X, \mathbb{R}^m)$, как множество функций, действующих из X в $\mathbb{R}^m$, все частные производные от которых определены и непрерывны в X. Функции из этого множества дифференцируемы в X. Нетрудно проверить, что $C^1(X, \mathbb{R}^m)$ образует линейное пространство, называемое *пространством непрерывно дифференцируемых функций.*

Градиент, дивергенция и ротор.

Рассмотрим скалярную дифференцируемую функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. В любой точке $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ её производная является ограниченным линейным отображением из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Нетрудно доказать, что в этом случае существует единственный вектор $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, такой, что $f'(\boldsymbol{a})\langle \boldsymbol{h} \rangle = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{h}$ для произвольного вектора $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$. Этот вектор называется *градиентом* функции f в точке $\boldsymbol{a}$ и обозначается $\nabla f(\boldsymbol{a})$. В стандартном базисе градиент имеет следующие компоненты:

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big).$$

Упражнение. Доказать, что градиент функции в точке $\boldsymbol{a}$, если он отличен от нуля, указывает в сторону наискорейшего возрастания этой функции. Другими словами, если $\nabla f(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}$, то

$$f'(\boldsymbol{a})\langle \boldsymbol{v} \rangle = \max_{\boldsymbol{h} \in S(\boldsymbol{0},1)} f'(\boldsymbol{a})\langle \boldsymbol{h} \rangle$$

где $S(\boldsymbol{0}, 1)$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{v} = \nabla f(\boldsymbol{a})/|\nabla f(\boldsymbol{a})|$. •

Заметим, что если $\boldsymbol{h}$ — вектор в $\mathbb{R}^n$, то $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}} = \boldsymbol{h} \cdot \nabla f$. В самом деле,

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})\langle \boldsymbol{h} \rangle = f'(\boldsymbol{a})\Big\langle \sum_{i=1}^{n} h_i \boldsymbol{e}_i \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n} h_i f'(\boldsymbol{a})\langle \boldsymbol{e}_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{h} \cdot \nabla f(\boldsymbol{a}).$$

Пусть $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. *Дивергенцией* вектор-функции $\boldsymbol{f}$ в точке $\boldsymbol{a}$ называется след $\operatorname{tr} \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ линейного отображения $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$. Дивергенция обозначается через $\operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. В стандартном базисе дивергенция является следом матрицы Якоби и имеет следующий вид:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Пусть $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ и $\Omega(\boldsymbol{a})$ есть кососимметрическая часть линейного отображения $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$, то есть,

$$\Omega(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) - \big(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\big)^*\Big),$$

где $\big(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\big)^*$ есть линейное отображение, сопряжённое (транспонированное) к $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$. Существует единственный вектор $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$, такой, что $\Omega(\boldsymbol{a})\langle \boldsymbol{h} \rangle = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{h}$. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ называется *ротором* вектор-функции $\boldsymbol{f}$ в точке $\boldsymbol{a}$ и обозначается $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ или $\operatorname{curl} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. В стандартном базисе ротор имеет следующие координаты:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \Big(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\,, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\,, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big)$$

Эти громоздкие выражения очень просто запомнить с помощью следующей формулы:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}.$$

Определитель считается формально.

§ 8.3. *Производные высших порядков.*

Если функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема, то мы можем в каждой точке $\boldsymbol{x} \in X$ посчитать её частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$, $i = 1, \ldots, n$. Эти частные производные также являются функциями от $\boldsymbol{x}$, действующими из X в $\mathbb{R}$. От них тоже можно вычислить частные производные $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, если они существуют. Эти производные называются *частными производными второго порядка* от функции f. Продолжая этот процесс, мы придём к понятию частных производных порядка k:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}},$$

где $i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. В этом выражении производные считаются справа налево, т.е., сначала по x_{i_k}, потом — по $x_{i_{k-1}}$, …, и в последнюю очередь — по x_{i_1}. Однако, как мы увидим, результат не зависит от порядка вычисления производных.

Теорема. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в некоторой окрестности $U(\boldsymbol{a})$ точки $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, а её вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

определены в $U(\boldsymbol{a})$ и непрерывны в точке $\boldsymbol{a}$. Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a}). \qquad \bullet$$

Скажем, что функция $f : X \to \mathbb{R}$ принадлежит множеству $C^k(X)$, если все её частные производные до порядка k включительно определены и непрерывны в X. Это множество образует линейное пространство, называемое *пространством k раз непрерывно дифференцируемых функций*. Очевидно, что $C^k(X) \subset C^{k-1}(X)$. Аналогично определяется пространство $C^k(X, \mathbb{R}^m)$ k раз непрерывно дифференцируемых функций, действующих из X в $\mathbb{R}^m$.

Теорема. Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$. Если $f \in C^k(X)$, $(i_1, \ldots, i_k)$ — упорядоченный набор k чисел из $\{1, 2, \ldots, n\}$ и $(\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_k))$ — произвольная перестановка этого набора, то

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{\sigma(i_1)} \ldots \partial x_{\sigma(i_k)}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \quad \text{в } X. \qquad \bullet$$

Рассмотрим оператор дифференцирования по направлению вектора $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{h}} = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Если $f \in C^k(X)$, то мы можем применить этот оператор к функции f k раз:

$$\frac{\partial^k f}{\partial \boldsymbol{h}^k} = \Big(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big)^k f.$$

Теорема. (*Формула Тейлора*) Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{a} \in X$. Если $f \in C^k(X)$, то

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial \boldsymbol{h}^m}(\boldsymbol{a}) + r_k(f, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})$$

для любого вектора $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$, такого, что отрезок с концами в точках $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}$ лежит в X. Здесь

$$r_k(f, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \frac{\partial^k f}{\partial \boldsymbol{h}^k}(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})\, dt. \qquad \bullet$$

Применяя теорему о среднем, легко получить формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$r_k(f, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial \boldsymbol{h}^k}(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h}),$$

где θ — некоторое число из отрезка $[0,1]$.

Часто используется также формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial \boldsymbol{h}^m}(\boldsymbol{a}) + o(|\boldsymbol{h}|^k) \qquad \text{при } \boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}.$$

§ 8.4. *Экстремум функции многих переменных.*

Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$ и $f : X \to \mathbb{R}$. Скажем, точка $\boldsymbol{x}_0 \in X$ является *точкой локального минимума* (*строгого локального минимума*) функции f, если существует такая окрестность $U(\boldsymbol{x}_0)$ точки $\boldsymbol{x}_0$, что $f(\boldsymbol{x}_0) \leqslant f(\boldsymbol{x})$ $(f(\boldsymbol{x}_0) < f(\boldsymbol{x}))$ для всех $\boldsymbol{x} \in \overset{\circ}{U}(\boldsymbol{x}_0)$.

Точка $\boldsymbol{x}_0 \in X$ является *точкой локального максимума* (*строгого локального максимума*) функции f, если она является точкой локального минимума (строгого локального минимума) функции $(-f)$. Точка $\boldsymbol{x}_0 \in X$ является точкой локального экстремума, если она является точкой локального минимума или локального максимума.

Пусть функция $f \in C^1(X)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0) = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $\boldsymbol{x}_0$ называют *стационарной* или *критической* точкой функции f.

Теорема. (*Необходимое условие экстремума*) Если X — область в $\mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{x}_0 \in X$ является точкой локального экстремума функции $f \in C^1(X)$, то $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0) = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, т.е., $\boldsymbol{x}_0$ — стационарная точка функции f. $\bullet$

Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$ и $f \in C^2(X)$. Матрица $H(f, \boldsymbol{x}_0)$ размерности $n \times n$ с компонентами $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)$ называется *матрицей Гессе* функции f в точке $\boldsymbol{x}_0$.

Теорема. (*Достаточное условие экстремума*) Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{x}_0 \in X$ является стационарной точкой функции $f \in C^2(X)$. Тогда

1. если матрица Гессе $H(f, \boldsymbol{x}_0)$ функции f в точке $\boldsymbol{x}_0$ является положительно определённой, то $\boldsymbol{x}_0$ — точка строго локального минимума функции f ;

2. если при различных $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ квадратичная форма $\boldsymbol{h} \cdot H(f, \boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}$ может принимать значения разных знаков, то $\boldsymbol{x}_0$ не является точкой экстремума функции f. •

Напомним, что симметричная матрица A размерности $n \times n$ с компонентами A_{ij} называется положительно определённой, если

$$\boldsymbol{h} \cdot A\boldsymbol{h} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} h_i h_j > 0$$

для всех $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$. Как известно из курса алгебры, для того, чтобы симметричная матрица обладала этим свойством, необходимо и достаточно, чтобы все её собственные числа были положительны. Критерий Сильвестра даёт другое условие: симметричная матрица является положительно определённой тогда и только тогда, когда все её главные миноры положительны.

Глава 9. Функциональные последовательности и ряды.

§ 9.1. *Функциональные последовательности.*

Пусть X — множество в $\mathbb{R}^n$. Последовательность функций $f_k : X \to \mathbb{R}$ *сходится в точке* $x \in X$, если сходится числовая последовательность $\{f_k(x)\}$.

Функциональная последовательность $\{f_k\}$ *сходится поточечно* на множестве $E \subset X$, если последовательность $\{f_k(x)\}$ сходится для всех $x \in E$.

Функциональная последовательность $\{f_k\}$ *сходится равномерно на множестве* $E \subset X$ *к функции* f (обозначение: $f_k \underset{E}{\rightrightarrows} f$ или $f_k \rightrightarrows f$ на E), если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} \; : \; |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \; \forall k > k_\varepsilon \text{ и } \forall x \in E.$$

Если ввести метрику $\varrho_E(f, g) = \sup\limits_{x \in E} |f(x) - g(x)|$, то это определение можно сформулировать следующим образом: функциональная последовательность $\{f_k\}$ *сходится равномерно на множестве* $E \subset X$ *к функции* f, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} \; : \; \varrho_E(f_k, f) < \varepsilon \; \forall k > k_\varepsilon.$$

Предельная функция не всегда известна, поэтому скажем, что последовательность $\{f_k\}$ *сходится равномерно* на множестве $E \subset X$, если существует функция $f : X \to \mathbb{R}$, такая, что $f_k \underset{E}{\rightrightarrows} f$.

Теорема (*Критерий Коши равномерной сходимости*). Для того, чтобы последовательность функций $\{f_k\}$ сходилась равномерно на $E \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}\ :\ \varrho_E(f_m, f_n) < \varepsilon\ \forall m, n > k_\varepsilon. \qquad \bullet$$

Теорема (*Дини*). Пусть X — компактное множество в $\mathbb{R}^n$ и $f_k : X \to \mathbb{R}$ — монотонная последовательность непрерывных функций (т.е., $f_k(x) \geqslant f_{k+1}(x)$ для каждого $x \in X$ или $f_k(x) \leqslant f_{k+1}(x)$ для каждого $x \in X$). Если $\{f_k\}$ сходится поточечно на X к непрерывной функции f, то эта сходимость равномерна. $\bullet$

Теорема (*Непрерывность равномерного предела последовательности непрерывных функций*). Пусть функциональная последовательность $\{f_k\}$ сходится к функции f равномерно на X. Если все f_k непрерывны в некоторой точке $x_0 \in X$, то f тоже непрерывна в этой точке. $\bullet$

Следствие. Если f_k непрерывны на X и $f_k \underset{X}{\rightrightarrows} f$, то f непрерывна на X. $\bullet$

Следствие. Если последовательность $\{f_k(x)\}$ непрерывных в точке $x_0 \in X$ функций сходится равномерно на X, то

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{k \to \infty} f_k(x) = \lim_{k \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_k(x). \qquad \bullet$$

Теорема (*Теорема о перестановке пределов двойной числовой последовательности*). Пусть двойная числовая последовательность $\{a_{k,m}\}$ для любого $k \in \mathbb{N}$ сходится при $m \to \infty$ равномерно по k и для любого $m \in \mathbb{N}$ сходится при $k \to \infty$. Тогда

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{k \to \infty} a_{k,m} = \lim_{k \to \infty} \lim_{m \to \infty} a_{k,m}. \qquad \bullet$$

Теорема. Пусть задана последовательность функций $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$, такая, что $f_k \in \mathrm{Rim}[a, b]$ и $f_k \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$. Тогда $f \in \mathrm{Rim}[a, b]$ и

$$\lim_{k \to \infty} \int_a^b f_k(x)\, dx = \int_a^b \lim_{k \to \infty} f_k(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad \bullet$$

Теорема. Пусть задана последовательность дифференцируемых функций $f_k : (a, b) \to \mathbb{R}$. Если $\{f_k\}$ сходится в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$, а последовательность производных $\{f_k'\}$ сходится равномерно на (a, b), то $\{f_k\}$ сходится равномерно на (a, b), предельная функция f дифференцируема и $f'(x) = \lim\limits_{k \to \infty} f_k'(x)$ для любого $x \in (a, b)$. $\bullet$

Упражнение. Обобщить последнюю теорему на многомерный случай. $\bullet$

§ 9.2. *Функциональные ряды.*

Ряд, членами которого являются функции с одной и той же областью определения, называется *функциональным рядом.*

Пусть $\{u_k\}$ есть функциональная последовательность ($u_k : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$).

Определение. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится в точке* $x_0 \in X$, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится поточечно* на множестве $E \subset X$, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится для каждого $x \in E$. Ряд *сходится равномерно*, если сходится равномерно его последовательность частичных сумм. $\bullet$

Теорема (*Критерий Коши равномерной сходимости ряда*). Для того, чтобы функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходился равномерно на $E \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : \ |u_n(x) + \cdots + u_m(x)| < \varepsilon \ \forall m > n > k_\varepsilon \text{ и } \forall x \in E. \quad \bullet$$

Теорема (*Необходимый признак сходимости ряда*). Для равномерной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ необходимо, чтобы последовательность $\{u_k\}$ равномерно сходилась к нулю. $\bullet$

Теорема. Пусть $\{u_k\}$ есть последовательность непрерывных функций $u_k : X \to \mathbb{R}$. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится равномерно на множестве $E \subset X$, то его сумма есть непрерывная на E функция. $\bullet$

Теорема (*Дини*). Пусть $\{u_k\}$ есть последовательность непрерывных неотрицательных функций $u_k : X \to \mathbb{R}$ и пусть X есть компактное множество в $\mathbb{R}^n$. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится поточечно на множестве X к непрерывной функции, то эта сходимость равномерная. $\bullet$

Теорема (*Об интегрировании по Риману равномерно сходящихся рядов*). Пусть $\{u_k\}$ есть последовательность интегрируемых по Риману функций $u_k : (a,b) \to \mathbb{R}$. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится равномерно на (a,b), то $\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx$. $\bullet$

Теорема (*О дифференцировании рядов*). Пусть $\{u_k\}$ есть последовательность дифференцируемых функций $u_k : (a,b) \to \mathbb{R}$. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$ сходится для некоторого $x_0 \in (a,b)$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'$ сходится равномерно на (a,b). Тогда сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ дифференцируема на (a,b) и $\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'$. $\bullet$

Теорема (*Вейерштрасс*). Пусть $\{u_k : X \to \mathbb{R}\}$ — функциональная последовательность. Если существует числовая последовательность $\{c_k\}$, такая, что
1. $|u_k(x)| \leqslant c_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $x \in X$,
2. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится,

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится равномерно и абсолютно на X. $\bullet$

Определение. Функциональная последовательность $\{u_k : X \to \mathbb{R}\}$ называется *равномерно ограниченной* на множестве $E \subset X$, если существует константа K, такая, что $\sup\limits_{x \in E} |u_k(x)| \leqslant K$ для всех $k \in \mathbb{N}$. $\bullet$

Теорема (*Признак Абеля равномерной сходимости ряда*). Пусть $\{u_k\}$ — монотонная равномерно ограниченная последовательность функций $u_k : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Если функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится равномерно на X, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ тоже сходится равномерно на X. $\bullet$

Теорема (*Признак Дирихле равномерной сходимости ряда*). Пусть $\{u_k\}$ — монотонная равномерно сходящаяся к нулю последовательность функций $u_k : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Если последовательность частичных сумм функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ равномерно ограничены на X, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ сходится равномерно на X. $\bullet$

§ 9.3. *Равномерная сходимость степенных рядов.*

Определение. Радиусом сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ называется число R, такое, что этот ряд сходится при $|x| < R$. $\bullet$

Теорема. Степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится равномерно и абсолютно на отрезке $[-r, r]$ для каждого $r \in [0, R)$. •

Следствие. Сумма степенного ряда есть непрерывная функция на интервале $(-R, R)$. •

Теорема. Степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ можно дифференцировать почленно на интервале $(-R, R)$, причем радиус сходимости продифференцированного ряда равен тому же R и

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_k x^k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k x^{k-1}. \qquad \bullet$$

Следствие. Сумма степенного ряда есть бесконечно дифференцируемая функция на интервале $(-R, R)$. •

Следствие. Если степенные ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ сходятся на некотором интервале $(-A, A)$ и их суммы совпадают, то $a_k = b_k$ для всех k. •

Определение. Функция f, являющаяся суммой степенного ряда в некоторой окрестности точки x_0, называется *аналитической* в точке x_0. Функция называется аналитической на множестве E, если она аналитична в каждой точке этого множества. •

Если функция аналитична, то она бесконечно дифференцируема.

§ 9.4. *Методы суммирования расходящихся рядов.*

Если последовательность $\{s_k\}$ частичных сумм числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то последовательности $\{a_k\}$ можно поставить в соответствие другую последовательность $\{\sigma_k\}$, составленную по другому правилу, которая уже будет сходящейся. Предел последовательности $\{\sigma_k\}$ назовем *обобщенной суммой ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Это правило должно удовлетворять следующим требованиям:

1. *Линейность.* Если A и B есть обобщенные суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ соответственно, то $\alpha A + \beta B$ есть обобщенная сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. *Регулярность.* Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ суммируем в обычном смысле и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$, то этот ряд суммируем в обобщенном смысле и его обобщенная сумма равна A.

Метод Чезаро.

$$(C,1) \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \sigma_k, \qquad \sigma_k = \frac{s_1 + \cdots + s_k}{k}, \qquad s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

$$(C,2) \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \gamma_k, \qquad \gamma_k = \frac{\sigma_1 + \cdots + \sigma_k}{k}.$$

$$\ldots$$

Метод Чезаро является линейным и регулярным.

Метод Абеля — Пуассона.

Пусть дана числовая последовательность $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$. Поставим ей в соответствие степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Если этот ряд сходится при $x \in (0, 1)$ к некоторой функции f и существует предел $\lim_{x\to 1-0} f(x)$, то говорят, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ суммируем по Абелю — Пуассону и

$$(AP) \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{x\to 1-0} f(x).$$

Теорема (*Абель*). Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится в точке $x = R$, то он сходится равномерно на $[0, R]$. $\bullet$

Метод Абеля — Пуассона является линейным и регулярным.

Глава 10. Интегралы, зависящие от параметра.

§ 10.1. *Собственные интегралы, зависящие от параметра.*

Пусть $P = [a, b] \times [c, d]$.

Определение. Функция $f : P \to \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной на P, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ : \ |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon \text{ как только } |x_1 - x_2| < \delta \text{ и } |y_1 - y_2| < \delta. \quad \bullet$$

Обозначим $F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$.

Теорема. Если функция f непрерывна на P, то функция F непрерывна на $[c, d]$. $\bullet$

Теорема. Пусть функция f и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на P. Тогда F непрерывно дифференцируема на $[c, d]$ и

$$\frac{dF}{dy}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx. \quad \bullet$$

Теорема. Пусть функция f и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на P. Пусть функции $\alpha = \alpha(y)$ и $\beta = \beta(y)$ непрерывно дифференцируемы на $[c, d]$ и, кроме того, $(\alpha(y), y) \in P$ и $(\beta(y), y) \in P$ для всех $y \in [c, d]$. Тогда

$$\frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx = \beta'(y)\, f(\beta(y), y) - \alpha'(y)\, f(\alpha(y), y) + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx. \quad \bullet$$

Теорема. Пусть $f : P \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy dx. \quad \bullet$$

Теорема (*Вейерштрасс*). Если функция $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ непрерывна, то существует последовательность полиномов с вещественными коэффициентами, которая сходится к f равномерно на $[0, 1]$. $\bullet$

Эта теорема справедлива и в многомерном случае. Кроме того, очевидно, что можно взять последовательность полиномов с рациональными коэффициентами.

§ 10.2. *Несобственные интегралы, зависящие от параметра.*

Пусть задана функция $f = f(x, y)$, где $x \in [a, \omega)$ и $y \in Y \subset \mathbb{R}^n$. Здесь либо $\omega = +\infty$, либо $f(x, y) \to \infty$ при $x \to \omega$. Обозначим $F_b(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$, где $b \in (a, \omega)$. Если $F_b(y)$ сходится при $b \to \omega$, то говорят, что существует (сходится) несобственный интеграл $\int_a^\omega f(x, y)\, dx$, значение которого мы обозначим через $F(y)$.

Определение. Несобственный интеграл $\int_a^\omega f(x, y)\, dx$ называется сходящимся равномерно по $y \in Y$, если F_b сходится при $b \to \omega$ равномерно по $y \in Y$. $\bullet$

Теорема (*Критерий Коши*). Для того, чтобы несобственный интеграл $\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ сходился равномерно по $y \in Y$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in (a,\omega)\ :\ \Big|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\Big| < \varepsilon\ \forall b_1, b_2 \in (B,\omega) \text{ и } \forall y \in Y. \qquad \bullet$$

Теорема (*Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов*). Пусть функции $f = f(x,y)$ и $g = g(x,y)$ интегрируемы по x на $[a,b]$ для любого $b \in (a,\omega)$ и для любого $y \in Y \subset \mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, $|f(x,y)| \leqslant g(x,y)$ для всех $x \in [a,\omega)$ и $y \in Y$. Если интеграл $\int_a^\omega g(x,y)\,dx$ сходится равномерно по $y \in Y$, то интеграл $\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ тоже сходится равномерно по $y \in Y$. $\bullet$

Теорема (*Признак Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов*). Пусть

а) $\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по $y \in Y$;

б) функция $g = g(x,y)$ монотонна по x на $[a,\omega)$ при каждом $y \in Y$ и равномерно ограничена, т.е. существует K, такое, что $|g(x,y)| \leqslant K$ для всех $x \in [a,\omega)$ и $y \in Y$.

Тогда $\int_a^\omega f(x,y)g(x,y)\,dx$ сходится равномерно по $y \in Y$ $\bullet$

Теорема (*Признак Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов*). Пусть

а) существует константа K, такая, что $\Big|\int_a^b f(x,y)\,dx\Big| \leqslant K$ для всех $b \in [a,\omega)$ и $y \in Y$;

б) функция $g = g(x,y)$ монотонна по x на $[a,\omega)$ при каждом $y \in Y$ и $g(x,y) \to 0$ при $x \to \omega$ равномерно по $y \in Y$.

Тогда $\int_a^\omega f(x,y)g(x,y)\,dx$ сходится равномерно по $y \in Y$ $\bullet$

Теорема (*О предельном переходе под знаком несобственного интеграла*). Пусть

а) $f(x,y) \to \varphi(x)$ при $y \to y_0$ равномерно по $x \in [a,b]$ для всех $b \in (a,\omega)$;

б) интеграл $\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по $y \in Y$.

Тогда сходится интеграл $\int_a^\omega \varphi(x)\,dx$ и

$$\int_a^\omega \varphi(x)\,dx = \lim_{y\to y_0} \int_a^\omega f(x,y)\,dx. \qquad \bullet$$

Теорема. Пусть функции $f(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны на $[a,\omega) \times [c,d]$ и

а) существует $y_0 \in [c,d]$, такой, что $\int_a^\omega f(x,y_0)\,dx$ сходится;

б) $\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ сходится равномерно по $y \in [c,d]$.

Тогда интеграл $\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по $y \in [c,d]$ и

$$\frac{d}{dy}\int_a^\omega f(x,y)\,dx = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx. \qquad \bullet$$

Теорема. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,\omega) \times [c,d]$ и интеграл $\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по $y \in [c,d]$. Тогда

$$\int_c^d \int_a^\omega f(x,y)\,dxdy = \int_a^\omega \int_c^d f(x,y)\,dydx. \qquad \bullet$$

Теорема. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,\omega_1)\times[c,\omega_2)$ и

а) интегралы $\int_a^{\omega_1} f(x,y)\,dx$ и $\int_c^{\omega_2} f(x,y)\,dy$ сходятся равномерно на $[a,b]$ и $[c,d]$ соответственно для всех $b\in(a,\omega_1)$ и $d\in(c,\omega_2)$;

б) существует хотя бы один из интегралов

$$\int_a^{\omega_1}\int_c^{\omega_2} |f(x,y)|\,dydx, \qquad \int_c^{\omega_2}\int_a^{\omega_1} |f(x,y)|\,dxdy.$$

Тогда

$$\int_a^{\omega_1}\int_c^{\omega_2} f(x,y)\,dydx = \int_c^{\omega_2}\int_a^{\omega_1} f(x,y)\,dxdy. \qquad \bullet$$

***Γ* и *B* функции Эйлера.**

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx, \qquad B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx, \qquad \alpha>0,\ \beta>0.$$

Свойства:

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha), \qquad \Gamma(n+1)=n!, \qquad \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi},$$

$$B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha), \qquad B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad \text{(упражнение)}.$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^p x\,\cos^q x\,dx=\frac12\,B\Big(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\Big).$$

Объем n-мерного шара радиуса R: $\quad V_n=\dfrac{\pi^{n/2}\,R^n}{\Gamma(1+n/2)}$.

Глава 11. Мера и интеграл Лебега.

§ 11.1. *Общее понятие меры.*

Пусть X — некоторое множество и $\mathcal{P}(X)$ — система всех его подмножеств.

Система множеств $\mathcal{R}\subset\mathcal{P}(X)$ называется *кольцом множеств*, если для любых множеств A и B из $\mathcal{R}$ множества $A\cup B$ и $A\setminus B$ также принадлежат $\mathcal{R}$.

Каждое кольцо $\mathcal{R}$ обладает следующими свойствами:

1. $\varnothing\in\mathcal{R}$;
2. $A,B\in\mathcal{R} \quad\Rightarrow\quad A\cap B\in\mathcal{R},\ A\triangle B\in\mathcal{R}$;
3. $A_1,\dots,A_k\in\mathcal{R} \quad\Rightarrow\quad \cup_{i=1}^k A_i\in\mathcal{R}, \quad \cap_{i=1}^k A_i\in\mathcal{R}$.

Скажем, что $\mathcal{U}\subset\mathcal{P}(X)$ является *системой множеств с единицей*, если существует множество $E\in\mathcal{U}$, такое, что $E\cap A=A$ для любого множества $A\in\mathcal{U}$. При этом E называют единицей системы $\mathcal{U}$.

Нетрудно видеть, что $\mathcal{U}$ является системой множеств с единицей тогда и только тогда, когда $E=\cup_{A\in\mathcal{U}}A\in\mathcal{U}$. При этом E является единицей.

Кольцо множеств с единицей называется *алгеброй множеств*.

Обычно, если рассматриваются множества из какого-либо кольца $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$, то можно считать, что $X = \cup_{A \in \mathcal{R}} A$, так как элементы множества X, не входящие в какое-либо множество из $\mathcal{R}$, не рассматриваются. Таким образом, кольцо $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ является алгеброй, если $X \in \mathcal{R}$.

Кольцо $\mathcal{R}$ называется *σ-кольцом множеств*, если для любой последовательности $\{A_i\}$ множеств $A_i \in \mathcal{R}$ их объединение $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ также является элементом $\mathcal{R}$.

σ-кольцо с единицей называется *σ-алгеброй*.

Если $\mathcal{R}$ — σ-кольцо или σ-алгебра, то для любой последовательности $\{A_i\}$ множеств $A_i \in \mathcal{R}$ их пересечение $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ также является элементом $\mathcal{R}$.

Любая функция φ с областью определения $\operatorname{dom}(\varphi) \subset \mathcal{P}(X)$, принимающая значения в $\mathbb{R}$, называется *функцией множества*.

Определение. Неотрицательная функция множества φ называется *конечно-аддитивной мерой*, если

1. её область определения $\operatorname{dom}(\varphi)$ является кольцом (или алгеброй);
2. $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ для любых непересекающихся множеств A и B из $\operatorname{dom}(\varphi)$. •

Определение. Неотрицательная функция множества φ называется *мерой*, если

1. её область определения $\operatorname{dom}(\varphi)$ является σ-кольцом (или σ-алгеброй);
2. $\varphi(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$ для любой последовательности непересекающихся множеств $A_i \in \operatorname{dom}(\varphi)$. •

Второе свойство называют *счётной аддитивностью* (или *σ-аддитивностью*) меры. Иногда предполагают, что мера принимает значения из $[0, +\infty]$, т.е., допускают значение $+\infty$. В этом случае в определении необходимо дополнительно предположить, что $\varphi(\varnothing) = 0$, дабы исключить единственный пример, в котором мера любого множества равна $+\infty$.

Пространством с мерой называется тройка $(X, \varphi, \mathcal{A})$, где X — некоторое множество, φ — мера с $\operatorname{dom}(\varphi) = \mathcal{A}$. Множества из $\mathcal{A}$ обычно называют φ-измеримыми.

Пример (*Считающая мера*). Пусть X — произвольное множество и $\operatorname{dom}(\varphi) = \mathcal{P}(X)$. Для произвольного множества $A \in \mathcal{P}(X)$ определим $\varphi(A)$ как количество элементов множества A. Эта мера может принимать значение $+\infty$. •

Пример (*Мера Дирака*). Пусть X — произвольное множество и $\operatorname{dom}(\varphi) = \mathcal{P}(X)$. Зафиксируем какой-либо элемент $x_0 \in X$. Для произвольного множества $A \in \mathcal{P}(X)$ определим

$$\varphi(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A, \\ 0, & x_0 \notin A. \end{cases}$$

Для этой меры часто используют специальное обозначение: δ_{x_0}. •

§ 11.2. *Мера Лебега в* $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство со стандартным базисом.

Параллелепипедом (или *n-мерным интервалом*) будем называть множество вида $\{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \lhd x_i \lhd b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, где значок «$\lhd$» означает «$<$» либо «$\leqslant$». Таким образом, если I — параллелепипед, то $I = I^1 \times I^2 \times \ldots \times I^n$, где I^i — непустые одномерные промежутки.

Назовём число $m(I) = \Pi_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n)$ *объёмом* (или n-мерным объёмом) параллелепипеда I. Заметим, что всегда $0 \leqslant m(I) < \infty$.

Определение. Пусть A — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. *Внешней мерой* $\mu^*(A)$ множества A называется точная нижняя грань сумм $\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k)$ по всем возможным последовательностям $\{I_k\}$ параллелепипедов, таких, что $A \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k$. То есть,

$$\mu^*(A) = \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \mid A \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k \Big\} \qquad \bullet$$

Замечания.

1. Может случиться, что ряд $\sum m(I_k)$ расходится для любой покрывающей A последовательности параллелепипедов $\{I_k\}$. В этом случае $\mu^*(A) = \infty$.

2. Так как каждый параллелепипед можно разбить на несколько параллелепипедов меньшего размера, значение $\mu^*(A)$ не изменится, если мы в определении дополнительно потребуем, чтобы диаметры параллелепипедов I_k были меньше некоторого заданного положительного числа.

3. Значение $\mu^*(A)$ не изменится, если мы в определении потребуем, чтобы параллелепипеды I_k были открытыми, т.е., имели вид $\{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$.

4. Внешняя мера, вообще говоря, мерой не является. $\bullet$

Теорема (*Монотонность внешней меры*). Если $A \subset B$, то $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$. $\bullet$

Теорема (*Счётная полуаддитивность внешней меры*). Если $A \subset \cup_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu^*(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$. $\bullet$

Теорема. Если I — параллелепипед, то $\mu^*(I) = m(I)$. $\bullet$

Определение. Скажем, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$ является *множеством меры нуль*, если $\mu^*(A) = 0$. $\bullet$

Если какое-либо утверждение справедливо для всех точек множества $A \subset \mathbb{R}^n$, кроме некоторого множества меры нуль, то говорят, что это утверждение справедливо *почти всюду* в A или для *почти всех* точек множества A.

Теорема. Если F_1 и F_2 — непересекающиеся компактные множества в $\mathbb{R}^n$, то $\mu^*(F_1 \cup F_2) = \mu^*(F_1) + \mu^*(F_2)$. $\bullet$

Следствие. Если $F_1, \ldots, F_k$ — непересекающиеся компактные множества в $\mathbb{R}^n$, то $\mu^*\big(\cup_{i=1}^{k} F_i\big) = \sum_{i=1}^{k} \mu^*(F_i)$. $\bullet$

Теорема. Для любого ограниченного открытого множества G и любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $F \subset G$, такое, что $\mu^*(G) < \mu^*(F) + \varepsilon$. $\bullet$

Теорема. Если F — замкнутое подмножество ограниченного открытого множества G, то $\mu^*(G \setminus F) = \mu^*(G) - \mu^*(F)$. $\bullet$

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ *измеримо* (по Лебегу), если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество F и открытое множество G, такие, что $F \subset A \subset G$ и $\mu^*(G \setminus F) < \varepsilon$. Совокупность измеримых множеств будем обозначать через $\mathcal{M}$. $\bullet$

Теорема. Если $A \in \mathcal{M}$, то $(\mathbb{R}^n \setminus A) \in \mathcal{M}$. $\bullet$

Теорема. Если множества A и B измеримы, то $A \cap B$ измеримо. $\bullet$

Теорема. Ограниченное множество A измеримо, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся замкнутое множество $F \subset A$, такое, что $\mu^*(A) < \mu^*(F) + \varepsilon$. •

Следствие. Любое ограниченное открытое множество измеримо. •

Теорема. Любой параллелепипед и любое множество меры нуль измеримы. •

Лемма. Пусть $\{A_k\}$ — последовательность непересекающихся измеримых множеств, содержащихся в некотором параллелепипеде. Если $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$, то множество A измеримо и $\mu^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$. •

Теорема (*Счётная аддитивность внешней меры на измеримых множествах*). Для любой последовательности $\{A_k\}$ непересекающихся измеримых множеств, множество $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ измеримо и $\mu^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$. •

Так как $\mathbb{R}^n$ — измеримое множество, система $\mathcal{M}$ измеримых множеств образует σ-алгебру. Внешняя мера μ^* является σ-аддитивной (счётно-аддитивной) функцией множества на $\mathcal{M}$, поэтому её сужение с $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ на $\mathcal{M}$ является мерой. Эта мера называется *мерой Лебега.* Мы будем обозначать её через μ. Итак, сформулируем определение меры Лебега.

Определение. *Мерой Лебега* называется функция множества μ, такая, что $\mathrm{dom}(\mu) = \mathcal{M}$ и $\mu(A) = \mu^*(A)$ для любого множества $A \in \mathcal{M}$. •

Таким образом, мы определили пространство с мерой $(\mathbb{R}^n, \mu, \mathcal{M})$.

Теорема (*Непрерывность меры Лебега*). Если $\{A_k\}$ — последовательность измеримых множеств, таких, что $A_k \subset A_{k+1}$, то множество $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ измеримо и $\mu(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$. Если $\{A_k\}$ — последовательность измеримых множеств, таких, что $A_{k+1} \subset A_k$ и $\mu(A_1) < \infty$, то множество $A = \cap_{k=1}^{\infty} A_k$ измеримо и $\mu(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$. •

Пусть $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ — некоторая система множеств. Назовём *σ-алгеброй, порождённой системой* $\mathcal{U}$, минимальную σ-алгебру, содержащую систему $\mathcal{U}$. То есть, если $\mathcal{A}$ — порождённая системой $\mathcal{U}$ σ-алгебра и $\mathcal{B}$ — другая содержащая систему $\mathcal{U}$ σ-алгебра, то $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Борелевской σ-алгеброй называется σ-алгебра, порождённая всеми открытыми множествами в $\mathbb{R}^n$. Элементы этой σ-алгебры называются *борелевскими множествами.* Борелевскую σ-алгебру будем обозначать через $\mathcal{B}$. Нетрудно заметить, что $\mathcal{B}$ состоит из тех множеств, которые можно получить из открытых счётным применением операций объединения, пересечения и разности (пересечение можно убрать). Таким образом, все открытые и замкнутые (как дополнения к открытым) множества будут борелевскими. Существуют и более сложные борелевские множества.

Некоторое множество A является *множеством типа* F_σ, если существует последовательность $\{A_k\}$ замкнутых множеств, такая, что $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Некоторое множество A является *множеством типа* G_δ, если существует последовательность $\{A_k\}$ открытых множеств, такая, что $A = \cap_{k=1}^{\infty} A_k$.

Очевидно, что множества типов F_σ и G_δ являются борелевскими.

Теорема. Любое борелевское множество является измеримым. •

Теорема. Множество является измеримым тогда и только тогда, когда его можно представить в виде объединения множества типа F_σ и множества меры нуль.
Множество является измеримым тогда и только тогда, когда его можно представить в виде разности множества типа G_δ и множества меры нуль. •

Таким образом, измеримые множества отличаются от борелевских на множество нулевой меры.

Пусть A — множество в $\mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{a}$ — вектор. Сдвигом множества A на вектор $\boldsymbol{a}$ называется множество $A + \boldsymbol{a} = \{(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} \in A\}$. Так как для любого параллелепипеда I и любого вектора $\boldsymbol{a}$, множество $I + \boldsymbol{a}$ является параллелепипедом и $m(I + \boldsymbol{a}) = m(I)$, справедлива следующая теорема.

Теорема. Мера Лебега инвариантна относительно сдвигов. То есть, если $A \in \mathcal{M}$, то $(A + \boldsymbol{a}) \in \mathcal{M}$ для любого вектора $\boldsymbol{a}$ и $\mu(A + \boldsymbol{a}) = \mu(A)$. •

Если B — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$, то через $\widehat{B}$ мы обозначим концентрический с B замкнутый шар в пять раз большего радиуса. Т.е., если $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}| \leqslant r\}$, то $\widehat{B} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}| \leqslant 5r\}$. Будем обозначать через $\operatorname{rad} B$ радиус шара B.

Теорема (*Теорема Витали о покрытии*). Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное семейство невырожденных (ненулевого радиуса) замкнутых шаров в $\mathbb{R}^n$ и $\sup\{\operatorname{rad} B \mid B \in \mathcal{F}\} < \infty$. Тогда существует счётное подсемейство $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ непересекающихся шаров, такое, что

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} \widehat{B}. \qquad \bullet$$

Следствие. Пусть A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\delta > 0$ — произвольное число. Существует счётное семейство $\mathcal{G}$ непересекающихся замкнутых шаров $B \subset A$, такое, что $\operatorname{rad} B \leqslant \delta$ для всех $B \in \mathcal{G}$ и

$$\mu\Big(A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B\Big) = 0. \qquad \bullet$$

Линейное отображение $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется *ортогональным*, если $UU^* = U^*U = I$, где I — тождественное отображение, U^* — сопряжённое (транспонированное) к U отображение. Ортогональные отображения представляют собой композицию поворотов вокруг начала координат и отражений. Заметим, что $|\det U| = 1$. Ещё одно важное для нас свойство ортогональных отображений состоит в том, что они переводят шар в шар того же радиуса.

Теорема. Пусть A — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$ и $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — ортогональное отображение. Тогда множество $U(A)$ измеримо и $\mu\big(U(A)\big) = \mu(A)$. •

Линейное отображение $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется *диагональным*, если в стандартном базисе диагональной является матрица этого отображения. Важное для нас свойство диагональных отображений состоит в том, что они переводят параллелепипед в параллелепипед.

Теорема. Для каждого открытого множества A существует счётное семейство непересекающихся параллелепипедов $\{I_k\}$, такое, что $I_k \subset A$ для всех k и $A = \cup_{k=1}^{\infty} I_k$. •

Теорема. Пусть A — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$ и $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — диагональное отображение. Тогда множество $D(A)$ измеримо и $\mu\big(D(A)\big) = |\det D|\, \mu(A)$. •

Из курса алгебры известен следующий результат: если $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, то существуют ортогональные отображения U и V и диагональное отображение D, такие, что $\Lambda = UDV$.

Теорема. Пусть A — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение. Тогда множество $\Lambda(A)$ измеримо и $\mu\big(\Lambda(A)\big) = |\det \Lambda|\, \mu(A)$. •

§ 11.3. *Измеримые функции.*

Пусть X — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *измеримой* (по Лебегу), если для любого числа $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X \mid f(x) < c\}$ измеримо. •

Функция f измерима тогда и только тогда, когда для любого числа $c \in \mathbb{R}$ измеримы множества $\{x \in X \mid f(x) \leqslant c\}$, $\{x \in X \mid f(x) > c\}$ и $\{x \in X \mid f(x) \geqslant c\}$.

Как и ранее, если F есть отображение из X в Y, то через $F^{-1}(A)$ обозначим прообраз множества $A \subset Y$. То есть, $F^{-1}(A) = \{x \in X \mid F(x) \in A\}$.

Утверждение. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ измерима тогда и только тогда, когда множество $f^{-1}(A)$ измеримо для любого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}$. •

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *борелевской* (или *измеримой по Борелю*), если для любого числа $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X \mid f(x) < c\}$ является борелевским.

Очевидно, что каждая борелевская функция измерима. Кроме того, нетрудно показать, что функция $f : X \to \mathbb{R}$ является борелевской тогда и только тогда, когда множество $f^{-1}(A)$ является борелевским для любого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}$.

Отметим простейшие свойства измеримых функций:

1. любая функция, определённая на множестве меры нуль, является измеримой;

2. если функция $f : X \to \mathbb{R}$ измерима, то для любого измеримого множества $X_1 \subset X$ функция $f : X_1 \to \mathbb{R}$ также измерима;

3. если $\{X_k\}$ — последовательность измеримых множеств и функция f определена и измерима на каждом из них, то она измерима на $\cap_{k=1}^{\infty} X_k$ и $\cup_{k=1}^{\infty} X_k$.

Теорема. Пусть $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Если функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ измеримы, то измерима функция $h : X \to \mathbb{R}$, определённая как $h(x) = F\big(f(x), g(x)\big)$. •

Следствие. Если функции f и g измеримы, то измеримы функции $f+g$, $f \cdot g$, $|f|$, а также $1/f$, если f не обращается в нуль. •

Утверждение. Пусть заданы две функции $f, g : X \to \mathbb{R}$. Если функция f измерима и $f = g$ почти всюду в X, то функция g тоже измерима. •

Теорема. Пусть $\{f_k : X \to \mathbb{R}\}$ — последовательность измеримых функций. Если $g(x) = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$ и $f(x) = \varlimsup\limits_{k \to \infty} f_k(x)$ для всех $x \in X$, то функции g и f измеримы. •

Следствие. Пусть $\{f_k : X \to \mathbb{R}\}$ — последовательность измеримых функций. Если $f(x) = \lim\limits_{k \to \infty} f_k(x)$ для всех $x \in X$, то функция f измерима. •

Скажем, что последовательность функций $\{f_k\}$ *сходится почти всюду в* X к функции f, если $f_k(x) \to f(x)$ при $k \to \infty$ для почти всех $x \in X$.

Теорема. Если последовательность $f_k : X \to \mathbb{R}$ измеримых функций сходится почти всюду в X к функции $f : X \to \mathbb{R}$, то функция f измерима. •

Теорема (*Егоров*). Пусть последовательность $f_k : X \to \mathbb{R}$ измеримых функций сходится к функции $f : X \to \mathbb{R}$ почти всюду на множестве $E \subset X$ и $\mu(E) < \infty$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует множество $E_\delta \subset E$, такое, что $\mu(E \setminus E_\delta) < \delta$ и $f_k \to f$ равномерно на E_δ. •

§ 11.4. *Интеграл Лебега.*

Предположим, что X есть произвольное измеримое множество конечной меры ($\mu(X) < \infty$) в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *простой*, если она измерима и принимает не более чем счётное число значений $a_1, a_2, \ldots$. Скажем, что простая функция f *суммируема* (или *интегрируема*), если абсолютно сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \, \mu(A_k)$, где $A_k = f^{-1}(a_k)$. Сумму этого ряда назовём *интегралом* от простой функции по мере Лебега и обозначим через $\int_X f \, d\mu$. •

Отметим некоторые свойства интеграла от простых функций.

1) Если f и g — простые интегрируемые функции, то функция $(f + g)$ интегрируема и $\int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$.
2) Если f — простая интегрируемая функция и $k \in \mathbb{R}$, то функция kf интегрируема и $\int_X kf \, d\mu = k \int_X f \, d\mu$.
3) Если f — простая интегрируемая функция, такая, что $|f| \leqslant M$ для некоторой константы M, то $\left| \int_A f \, d\mu \right| \leqslant M \, \mu(A)$, где A — произвольное измеримое множество в X.

Теорема. Для того, чтобы функция $f : X \to \mathbb{R}$ была измерима, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность простых измеримых функций $\{f_k\}$, сходящаяся к f равномерно на X. •

Замечание. Если в предыдущей теореме $f \geqslant 0$, то последовательность простых функций $\{f_k\}$ можно выбрать монотонно возрастающей или монотонно убывающей. •

Определение. Измеримая функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *интегрируемой* (или *суммируемой*) на множестве $A \subset X$, если существует последовательность простых интегрируемых функций $\{f_k\}$, сходящаяся к f равномерно на A. При этом число $\lim_{k\to\infty} \int_A f_k \, d\mu$ называется *интегралом Лебега* от функции f по множеству A и обозначается $\int_A f \, d\mu$. •

Это определение корректно, так как справедливы следующие утверждения:

1) если $f_k \underset{X}{\rightrightarrows} f$, то существует $\lim_{k\to\infty} \int_A f_k \, d\mu$;

2) этот предел не зависит от выбора последовательности $\{f_k\}$.

Обозначим через $L(A)$ множество интегрируемых на множестве A функций.

Отметим некоторые свойства интеграла Лебега.

1) Если $f \in L(X)$, то $f \in L(A)$ для любого измеримого множества $A \subset X$.

2) Если $f \in L(X)$, $A \subset X$ и $\mu(A) = 0$, то $\int_A f \, d\mu = 0$.

3) Для любого измеримого множества $A \subset X$ справедливо равенство: $\int_X \chi_A \, d\mu = \mu(A)$, где функция χ_A определяется следующим образом

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

и называется *характеристической функцией* множества A.

4) Если $f \in L(X)$ и $k \in \mathbb{R}$, то функция $(kf) \in L(X)$ и $\int_X kf \, d\mu = k \int_X f \, d\mu$.

5) Если $f, g \in L(X)$, то $(f + g) \in L(X)$ и $\int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$.

6) Если $f \in L(A)$ и $f \geqslant 0$ почти всюду в A, то $\int_A f\,d\mu \geqslant 0$. В частности, если $f, g \in L(A)$ и $f \geqslant g$ почти всюду в A, то $\int_A f\,d\mu \geqslant \int_A g\,d\mu$. Если $f \in L(A)$ и $M_1 \leqslant f \leqslant M_2$ почти всюду в A для некоторых постоянных M_1 и M_2, то $M_1\,\mu(A) \leqslant \int_A f\,d\mu \leqslant M_2\,\mu(A)$.

7) Если $f \in L(A)$, множество $B \subset A$ измеримо и $\mu(A \setminus B) = 0$, то $\int_A f\,d\mu = \int_B f\,d\mu$.

8) Если $f \in L(X)$ и $g(x) = f(x)$ для почти всех $x \in X$, то $g \in L(X)$ и $\int_X g\,d\mu = \int_X f\,d\mu$.

9) Если A_1 и A_2 — измеримые непересекающиеся множества и $f \in L(A_1) \cap L(A_2)$, то $f \in L(A_1 \cup A_2)$ и $\int_{A_1 \cup A_2} f\,d\mu = \int_{A_1} f\,d\mu + \int_{A_2} f\,d\mu$.

10) Пусть f — измеримая функция, $\varphi \in L(X)$ и $|f| \leqslant \varphi$. Тогда $f \in L(X)$ и $\int_X |f|\,d\mu \leqslant \int_X \varphi\,d\mu$.

Свойства 4 и 5 выражают факт *линейности интеграла Лебега.*

Теорема. $f \in L(X)$ тогда и только тогда, когда $|f| \in L(X)$. •

Теорема (*Счётная аддитивность интеграла Лебега*). Пусть $A, A_1, \dots, A_k, \dots$ — измеримые множества в X, такие, что $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$. Если $f \in L(A)$, то

$$\int_A f\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f\,d\mu.$$ •

Теорема (*Неравенство Чебышева*). Пусть f — неотрицательная интегрируемая на A функция. Тогда

$$\mu\big(\{x \in A \mid f(x) \geqslant c\}\big) \leqslant \frac{1}{c} \int_A f\,d\mu$$

для произвольного положительного числа c. •

Следствие. Если $\int_A |f|\,d\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду в A. •

Теорема (*Абсолютная непрерывность интеграла Лебега*). Если $f \in L(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\left|\int_A f\,d\mu\right| < \varepsilon$ для любого измеримого множества $A \subset X$, мера Лебега которого меньше δ (т.е., $\mu(A) < \delta$). •

Теорема (*Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла*). Пусть последовательность $\{f_k\}$ интегрируемых функций сходится почти всюду на множестве A к функции f. Если существует интегрируемая функция φ, такая, что $|f_k| \leqslant \varphi$ для всех k, то функция f интегрируема на A и $\lim_{k\to\infty} \int_A f_k\,d\mu = \int_A f\,d\mu$. •

Теорема (*Б.Леви*). Пусть задана последовательность интегрируемых функций $\{f_k\}$, таких, что $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots \leqslant f_k \leqslant \ldots$ на измеримом множестве $A \subset X$ и $\int_A f_k\,d\mu \leqslant M$ для всех k, где M — некоторая константа. Тогда последовательность $\{f_k\}$ сходится почти всюду на A к некоторой функции $f \in L(A)$ и $\lim_{k\to\infty} \int_A f_k\,d\mu = \int_A f\,d\mu$. •

Теорема (*Фату*). Если последовательность интегрируемых неотрицательных функций $\{f_k\}$ сходится почти всюду на измеримом множестве $A \subset X$ к функции f и $\int_A f_k\,d\mu \leqslant M$ для всех k, где M — некоторая константа, то функция f интегрируема и $\int_A f\,d\mu \leqslant M$. •

Чтобы определить *интеграл Лебега по множеству X бесконечной меры*, введём последовательность шаров $\{B_k\}$ в $\mathbb{R}^n$ с центрами в начале координат и с радиусами $r_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Скажем, что $f \in L(X)$, если $f \in L(X \cap B_k)$ для каждого k и существует конечный предел $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{X\cap B_k} f\,d\mu$.

Заметим, что если этот предел существует для какой-то одной последовательности «раздувающихся» шаров, то он существует и для любой другой последовательности и имеет то же самое значение.

Если $\mu(X) = \infty$ и $f \in L(X)$, то интеграл Лебега от функции f по множеству X определим следующим образом: $\int_X f\,d\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \int_{X\cap B_k} f\,d\mu$.

Нетрудно проверить, что теоремы Лебега, Леви и Фату о предельных переходах остаются справедливыми и для интегралов по множествам бесконечной меры.

Теорема. Если $f \in \mathrm{Rim}[a,b]$, то $f \in L\big([a,b]\big)$ и $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\mu$. Здесь μ — одномерная мера Лебега. •

Рассмотрим пространства $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ и $X \times Y = \mathbb{R}^{n+m}$. Меру Лебега в этих пространствах обозначим через μ_x, μ_y и μ соответственно.

Если A — множество в $X \times Y$, то обозначим

$A(x) = \{y \in Y \mid (x,y) \in A\}$ — *сечение множества* A, проходящее через точку $x \in X$ параллельно пространству Y;

$A(y) = \{x \in X \mid (x,y) \in A\}$ — *сечение множества* A, проходящее через точку $y \in Y$ параллельно пространству X.

Теорема (*О сечениях измеримого множества*). Если A — ограниченное μ-измеримое множество в $X \times Y$, то

1. для μ_x-почти всех точек $x \in X$ множество $A(x)$ μ_y-измеримо и функция $x \mapsto \mu_y\big(A(x)\big)$ интегрируема на X,

2. для μ_y-почти всех точек $y \in X$ множество $A(y)$ μ_x-измеримо и функция $y \mapsto \mu_x\big(A(y)\big)$ интегрируема на Y,

3. $\mu(A) = \int_X \mu_y\big(A(x)\big)\,d\mu_x = \int_Y \mu_x\big(A(y)\big)\,d\mu_y$. •

Теорема (*Фубини*). Если $f \in L(A)$, где A — ограниченное μ-измеримое множество в $X\times Y$, то

1. $f(x,\cdot) \in L\big(A(x)\big)$ для почти всех $x \in X$ и $f(\cdot,y) \in L\big(A(y)\big)$ для почти всех $y \in Y$,

2. функции

$$x \mapsto \int_{A(x)} f(x,y)\,d\mu_y \quad \text{и} \quad y \mapsto \int_{A(y)} f(x,y)\,d\mu_x$$

интегрируемы на X и Y соответственно,

3.

$$\int_A f\,d\mu = \int_X \int_{A(x)} f(x,y)\,d\mu_y\,d\mu_x = \int_Y \int_{A(y)} f(x,y)\,d\mu_x\,d\mu_y. \quad \bullet$$

Теорема. Пусть A — ограниченное μ-измеримое множество в $X\times Y$ и функция $f = f(x,y)$ измерима на A. Если существует хотя бы один из интегралов

$$\int_X \int_{A(x)} |f(x,y)|\,d\mu_y\,d\mu_x, \qquad \int_Y \int_{A(y)} |f(x,y)|\,d\mu_x\,d\mu_y,$$

то $f \in L(A)$ и для этой функции справедлива теорема Фубини. •

Пусть A — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f : A \to \mathbb{R}$ — неотрицательная функция. Множество $Q_A(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in A,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ называется *подграфиком* функции f на множестве A.

Обозначим через μ_n меру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Теорема. Пусть A — μ_n-измеримое множество конечной меры в $\mathbb{R}^n$, $f \in L(A)$ и $f \geqslant 0$. Тогда

$$\mu_{n+1}\bigl(Q_A(f)\bigr) = \int_A f\, d\mu_n. \qquad \bullet$$

Следствие. Пусть A — μ_n-измеримое множество конечной меры в $\mathbb{R}^n$, $f \in L(A)$ и $f \geqslant 0$. Тогда

$$\int_A f\, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}_+} h\, d\mu_1,$$

где $h = h(\lambda) = \mu_n\bigl(\{\boldsymbol{x} \in A \mid f(x) > \lambda\}\bigr)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. $\bullet$

Пусть U и V — области в $\mathbb{R}^n$. Отображение $\varphi : U \to V$ называется *диффеоморфизмом*, если оно биективно, непрерывно дифференцируемо и обратное отображение φ^{-1} тоже непрерывно дифференцируемо. Мы будем называть диффеоморфизм φ *ограниченным*, если $\varphi'(x)$ и $\varphi'(x)^{-1}$ являются равномерно по $x \in U$ ограниченными операторами.

Теорема. Пусть B — шар в $\mathbb{R}^n$ (замкнутый или открытый — не важно) радиуса r с центром в точке $\boldsymbol{a}$ и $\varphi : B \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируемое в точке $\boldsymbol{a}$ отображение, такое, что $\bigl(\varphi'(\boldsymbol{a})\bigr)^{-1}$ — ограниченный оператор. Тогда существует такое $r_0 > 0$, что для любого $r \in (0, r_0)$ справедлива оценка:

$$1 - \alpha(r) \leqslant \frac{\mu\bigl(\varphi(B)\bigr)}{|\det \varphi'(\boldsymbol{a})|\, \mu(B)} \leqslant 1 + \alpha(r),$$

где $\alpha(r) \to 0$ при $r \to 0$. $\bullet$

Теорема. Если $\varphi : X \to Y$ —ограниченный диффеоморфизм между открытыми множествами X и Y в $\mathbb{R}^n$, то для любого измеримого множества $A \subset X$ конечной меры справедлива формула:

$$\mu\bigl(\varphi(A)\bigr) = \int_A |\det \varphi'|\, d\mu. \qquad \bullet$$

Теорема. Пусть $\varphi : X \to Y$ — ограниченный диффеоморфизм между открытыми множествами X и Y в $\mathbb{R}^n$, $A \subset X$ — измеримое множество конечной меры и $f \in L\bigl(\varphi(A)\bigr)$. Тогда

$$\int_{\varphi(A)} f(y)\, d\mu_y = \int_A f\bigl(\varphi(x)\bigr)\, |\det \varphi'(x)|\, d\mu_x.$$

Здесь x и y — переменные в X и Y соответственно. $\bullet$

§ 11.5. ***Пространства интегрируемых функций.***

Пусть X — линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|$. Последовательность $\{x_k\}$ элементов пространства X называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ для всех $m, n \geqslant k_\varepsilon$.

Говорят, что последовательность $\{x_k\}$ *сходится* к x в нормированном пространстве X, если $\|x_k - x\| \to 0$ при $k \to \infty$.

Нормированное пространство называется *полным*, если в нём каждая фундаментальная последовательность имеет предел, принадлежащий этому пространству.

Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым.*

Пример. Рассмотрим пространство $C[0,1]$ непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций. Введём в этом пространстве две нормы: $\|f\|_C = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$, $\|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f|\,d\mu$. Пространство $(C[0,1], \|\cdot\|_C)$ является полным и потому банаховым, а пространство $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ полным, а значит и банаховым не является. Ко второй части этого утверждение мы ещё вернёмся в дальнейшем. •

Пусть G — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $L^1(G)$ линейное пространство интегрируемых по Лебегу функций (раньше мы обозначали его через $L(G)$). Для каждой функции $f \in L^1(G)$ положим

$$\|f\|_1 = \int_G |f|\,d\mu.$$

Нетрудно проверить, что $\|\cdot\|_1$ удовлетворяет всем аксиомам нормы, кроме одной. Вообще говоря, из $\|f\|_1 = 0$ не следует, что $f = 0$. Можно лишь утверждать, что $f = 0$ почти всюду в G. То есть, функция f может быть отличной от нуля на множестве меры нуль (например, функция Дирихле).

Определение. Назовём функции f и $g : G \to \mathbb{R}$ *эквивалентными* ($f \sim g$), если $f(x) = g(x)$ для почти всех $x \in G$. •

Мы не будем различать функции, совпадающие почти всюду, а элементами пространства $L^1(G)$ будем считать классы эквивалентных функций. Если $\|f\|_1 = 0$, то $f \sim 0$. Согласно нашему соглашению, последнее соотношение означает, что $f = 0$ в $L^1(G)$. Таким образом, $\|\cdot\|_1$ является нормой в $L^1(G)$. Чтобы вычислить норму элемента (класса эквивалентности) пространства $L^1(G)$, нужно посчитать её от произвольного представителя (функции) этого класса.

Аналогично определим пространства $L^p(G)$ при произвольных $p \in [1, \infty)$, элементами которых являются измеримые функции f (классы эквивалентности), такие, что $\|f\|_p < \infty$, где

$$\|f\|_p = \Big(\int_G |f|^p\,d\mu \Big)^{1/p}.$$

Пусть f — измеримая на G функция. Скажем, что число K является *существенной верхней гранью* для функции f, если $f(x) \leqslant K$ для почти всех $x \in G$. Наименьшая из существенных верхних граней обозначается через $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in G} f(x)$ и называется *существенным супремумом* функции f на множестве G.

Обозначим через $L^\infty(G)$ пространство измеримых функций f (классов эквивалентности), таких, что $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in G} |f(x)| < \infty$. Определим норму в этом пространстве:

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in G} |f(x)|.$$

Убедимся, что $L^p(G)$ является линейным пространством и $\|\cdot\|_p$ удовлетворяет аксиомам нормы. Достаточно проверить, что справедливо неравенство треугольника: $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$. При $p=\infty$ это неравенство очевидно.

Теорема (*Неравенство Юнга*). Если $f \in L^p(G)$ и $g \in L^q(G)$, где $p, q \in (1, \infty)$ и $p^{-1}+q^{-1} = 1$, то функция fg интегрируема и

$$\int_G |fg|\,d\mu \leqslant \frac{1}{p}\int_G |f|^p\,d\mu + \frac{1}{q}\int_G |g|^q\,d\mu = \frac{1}{p}\,\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\,\|g\|_q^q. \qquad \bullet$$

Пусть $\mu(G) < \infty$. Положив в последнем неравенстве $g \equiv 1$, мы получим

$$\int_G |f|\,d\mu \leqslant \frac{1}{p}\int_G |f|^p\,d\mu + \frac{1}{q}\,\mu(G).$$

Кроме того, так как $|f| \leqslant \|f\|_\infty$ почти всюду в G,

$$\int_G |f|\,d\mu \leqslant \|f\|_\infty\,\mu(G).$$

Таким образом, из того, что $f \in L^p(G)$ с $p \in (1, \infty]$ следует, что $f \in L^1(G)$. В этом случае говорят, что пространство $L^p(G)$ *вкладывается* в пространство $L^1(G)$ и пишут $L^p(G) \subset L^1(G)$. Если мы положим в последних неравенствах $|f| = |u|^\alpha$ с $\alpha \in (1, \infty)$, мы легко получим, что $L^q(G) \subset L^p(G)$ при $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$.

Теорема (*Неравенство Гёльдера*). Если $f \in L^p(G)$ и $g \in L^q(G)$, где $p, q \in (1, \infty)$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$, то функция fg интегрируема и

$$\Big|\int_G fg\,d\mu\Big| \leqslant \Big(\int_G |f|^p\,d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int_G |g|^q\,d\mu\Big)^{1/q} = \|f\|_p\,\|g\|_q. \qquad \bullet$$

Из неравенства Гёльдера также легко следует, что $L^q(G) \subset L^p(G)$ при $p \leqslant q$ в случае $\mu(G) < \infty$.

Теорема (*Неравенство Минковского*). Если $f, g \in L^p(G)$, где $p \in [1, \infty]$, то справедливо неравенство: $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$. $\bullet$

Неравенство Минковского есть не что иное, как неравенство треугольника для норм в пространстве $L^p(X)$. Таким образом, пространства $L^p(G)$, $p \in [1, \infty]$, являются линейными и нормированными.

Теорема. Пространство $L^p(G)$ с $p \in [1, \infty]$ является банаховым. $\bullet$

Пусть M — некоторое множество в банаховом пространстве X. Говорят, что множество M *замкнуто* в X, если любая фундаментальная последовательность, лежащая в M, сходится к элементу из M. *Замыканием* множества M в пространстве X называется наименьшее замкнутое множество в X, содержащее M. Говорят, что множество M *плотно* в множестве $N \subset X$, если его замыкание в X содержит N. Если M плотно во всём пространстве X, то часто говорят, что M *всюду плотно.*

Можно дать и другое определение плотного множества. Скажем, что множество M всюду плотно в банаховом пространстве X, если для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $u \in X$ существует такое $v \in M$, что $\|u - v\|_X < \varepsilon$.

Лемма. Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, такие, что $Z \subset Y \subset X$ и $\|\cdot\|_X \leqslant c_1\|\cdot\|_Y \leqslant c_2\|\cdot\|_Z$ для некоторых постоянных c_1 и c_2. Если Z плотно в Y, а Y плотно в X, то Z плотно в X. •

Теорема. Если $\mu(G) < \infty$, то $L^\infty(G)$ плотно в $L^p(G)$ для любого $p \in [1, \infty)$. •

Следствие. Если $\mu(G) < \infty$, то $L^p(G)$ плотно в $L^q(G)$ для любых $p, q \in [1, \infty]$, таких, что $p \geqslant q$. •

Теорема. Если G — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то пространство $C(\overline{G})$ плотно в $L^p(G)$ для любого $p \in [1, \infty)$. Здесь $\overline{G}$ — замыкание множества G в $\mathbb{R}^n$. •

Заметим, что если $f \in C(\overline{G})$, то $\max\limits_{x \in \overline{G}} |f(x)| = \|f\|_\infty$. Поскольку $C(\overline{G})$ — полное пространство, его замыкание (т.е., пополнение) по норме $\|\cdot\|_\infty$ является самим пространством $C(\overline{G}) \neq L^\infty(G)$. Таким образом, $C(\overline{G})$ не плотно в $L^\infty(G)$.

Как следует из теоремы, замыкание $C(\overline{G})$ по норме $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty)$, совпадает с $L^p(G) \neq C(\overline{G})$. Поэтому пространство $\big(C(\overline{G}), \|\cdot\|_p\big)$, $p \in [1, \infty)$, не является полным (см. пример в начале параграфа).

Определение. Банахово пространство называется *сепарабельным*, если в нём существует счётное всюду плотное множество. •

По теореме Вейерштрасса множество полиномов с рациональными коэффициентами плотно в $C(\overline{G})$. Так как это множество является счётным, банахово пространство $C(\overline{G})$ сепарабельно. Следовательно сепарабельными являются все пространства $L^p(G)$ при $p \in [1, \infty)$.

Пространство $L^\infty(G)$ не сепарабельно.

Пример. Пусть $G = [0, 1]$. Для каждого $\alpha \in (0, 1)$ определим функцию

$$u_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \alpha), \\ 1, & x \in [\alpha, 1]. \end{cases}$$

Очевидно, что все $u_\alpha \in L^\infty(G)$ и $\|u_\alpha - u_\beta\|_\infty = 1$ при $\alpha \neq \beta$. Кроме того, семейство $\{u_\alpha,\ \alpha \in (0, 1)\}$ является несчётным (оно имеет мощность континуума). Предположим, что существует счётное плотное в $L^\infty(G)$ множество $V = \{v_1, v_2, \ldots\}$. Тогда

$$L^\infty(G) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B(v_k, 1/3),$$

где $B(v_k, 1/3) = \{v \in L^\infty(G) \mid \|v - v_k\|_\infty < 1/3\}$ — шар в $L^\infty(G)$ с центром в v_k радиуса $1/3$. Но в каждом из этих шаров может лежать только одна из функций u_α, поэтому мощность множества шаров должна быть больше мощности семейства $\{u_\alpha,\ \alpha \in (0, 1)\}$. Получили противоречие. Таким образом, в $L^\infty(G)$ не существует счётного всюду плотного множества. •

Глава 12. Ряды Фурье.

§ 12.1. *Гильбертовы пространства.*

Определение. Банахово пространство называется *гильбертовым*, если в нём определена симметричная билинейная форма $(\cdot, \cdot)$, называемая *скалярным произведением*, такая, что $(u, u) = \|u\|^2$. •

Пространство $L^2(X)$ является гильбертовым. Скалярное произведение в нём определяется следующим образом: $(u,v) = \int_X u\,v\,d\lambda$, где λ — мера Лебега.

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$.

Лемма. (*Неравенство Коши — Буняковского*) Для любых $u, v \in H$ справедливо неравенство: $|(u,v)| \leqslant \|u\|\,\|v\|$. •

Линейной оболочкой множества M называется совокупность всех конечных линейных комбинаций элементов из M: $\sum_{i=1}^{m} c_i u_i$, $c_i \in \mathbb{R}$, $u_i \in M$.

Определение. Набор элементов $\{u_\alpha\}$ гильбертова пространства H называется *полным* в H, если замыкание линейной оболочки $\{u_\alpha\}$ совпадает с H. •

Определение. Полная линейно независимая система $\{u_\alpha\}$ элементов пространства H называется *базисом.* Базис $\{u_\alpha\}$ в гильбертовом пространстве H называется *ортонормированным*, если $(u_\alpha, u_\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$ и $\|u_\alpha\| = 1$ для всех α. •

Утверждение. В сепарабельном гильбертовом пространстве любая ортонормированная система элементов может быть не более чем счетной. •

Утверждение. В каждом сепарабельном гильбертовом пространстве существует счетный ортонормированный базис. •

Далее мы будем полагать, что H — сепарабельное гильбертово пространство.

Определение. Пусть $\{\varphi_k\}$ — счетная ортонормированная система в гильбертовом пространстве H, которая не обязательно является базисом. Для произвольного $u \in H$ обозначим: $\alpha_k = (u, \varphi_k)$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\,\varphi_k$ называется *рядом Фурье* элемента u относительно системы $\{\varphi_k\}$. Числа α_k называются *коэффициентами Фурье.* •

Обозначим через $S_m(u)$ (или просто S_m) частичные суммы $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k\,\varphi_k$ ряда Фурье.

Лемма. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ среди всех сумм $S'_m = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k\,\varphi_k$, $\gamma_k \in \mathbb{R}$, минимум величины $\|u - S'_m\|$ в H достигается на частичной сумме S_m ряда Фурье, то есть при $\gamma_k = \alpha_k$. •

Лемма. (*Неравенство Бесселя*) Для каждого $u \in H$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \leqslant \|u\|^2,$$

где α_k — коэффициенты Фурье элемента u. •

Теорема. Пусть $\{\varphi_k\}$ — ортонормированная система в H. Для того, чтобы эта система была полной в H, необходимо и достаточно, чтобы для любого $u \in H$ выполнялось *равенство Парсеваля*:

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2,$$

где α_k — коэффициенты Фурье элемента u. •

Теорема. (*Теорема Рисса — Фишера*) Пусть $\{\varphi_k\}$ — ортонормированная, не обязательно полная система в H и $\{\gamma_k\}$ — произвольная последовательность чисел, такая, что $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty$. Тогда существует $u \in H$, такой, что $u = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \varphi_k$ с $\gamma_k = (u, \varphi_k)$ и $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2$. •

Определение. Система $\{\varphi_k\}$ элементов гильбертова пространства H называется *тотальной*, если для любого $u \in H$ из того, что $(u, \varphi_k) = 0$ для всех k следует, что $u = 0$ в H. •

Теорема. Для того, чтобы система $\{\varphi_k\}$ была полной в сепарабельном гильбертовом пространстве H, необходимо и достаточно, чтобы она была тотальной. •

§ 12.2. *Тригонометрические ряды Фурье.*

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L^2(-\pi, \pi)$ тригонометрическую систему функций:

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos kx,\ \sin kx,\ \ldots$$

Эта система является ортогональной, но не нормированной. Нетрудно убедиться в том, что система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots,\ \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}},\ \ldots$$

ортонормирована в $L^2(-\pi, \pi)$.

Каждой функции $f \in L^2(-\pi, \pi)$ поставим в соответствие ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big),$$

где коэффициенты Фурье определены следующим образом:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Определение. *Тригонометрическим полиномом* называется выражение вида

$$c_0 + \sum_{k=1}^{m} \big(c_k \cos kx + d_k \sin kx\big), \qquad c_k, d_k \in \mathbb{R}.$$ •

Если $T(x)$ — тригонометрический полином, а $P(y)$ — алгебраический полином, то $P(T(x))$ — тригонометрический полином.

Теорема. (*Вейерштрасс*) Пусть $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический полином T, такой, что $\max\limits_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - T(x)| < \varepsilon$. •

Утверждение. (*Обращение теоремы Вейерштрасса*) Если функция $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ аппроксимируется с любой точностью тригонометрическими полиномами по норме пространства $C[-\pi, \pi]$, то f непрерывна и $f(-\pi) = f(\pi)$. •

Теорема. (*Следствие из теоремы Вейерштрасса*)
Тригонометрическая система $\{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos kx,\ \sin kx,\ \ldots\}$ полна в пространстве $L^2(-\pi, \pi)$. •

Таким образом, для тригонометрической системы в $L^2(-\pi, \pi)$ справедливы все утверждения, доказанные для полных ортонормированных систем в сепарабельных гильбертовых пространствах. В частности,

1) для каждой функции $f \in L^2(-\pi,\pi)$ справедливо равенство Парсеваля: $\|f\|^2 = a_0^2/2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$;

2) ряд Фурье, соответствующий функции $f \in L^2(-\pi,\pi)$, сходится к f в $L^2(-\pi,\pi)$.

Далее мы исследуем поточечную сходимость рядов Фурье.

Обозначим через $S_n(x)$ (или через $S_n(f,x)$) частичную сумму ряда Фурье функции f:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big),$$

Продолжим функцию f периодически на всю числовую ось $\mathbb{R}$. Нетрудно посчитать, что

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\, D_n(y)\, dy, \quad \text{где} \quad D_n(y) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin y(n+1/2)}{\sin y/2}.$$

Интеграл в выражении для $S_n(x)$ называется *интегралом Дирихле*, а $D_n(y)$ — *ядром Дирихле*. Заметим, что $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y)\, dy = 1$.

Лемма. Пусть $f \in L^1(a,b)$, где $[a,b]$ — произвольный ограниченный интервал в $\mathbb{R}$. Тогда

$$\lim_{p\to\infty} \int_a^b f(t) \sin pt\, dt = \lim_{p\to\infty} \int_a^b f(t) \cos pt\, dt = 0. \qquad \bullet$$

Лемма. Для любого $\delta \in (0,\pi)$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} D_n(t)\, dt = 0. \qquad \bullet$$

Теорема. (*Принцип локализации*) Пусть $f, g \in L^1(-\pi,\pi)$ и $f = g$ на некотором интервале $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Тогда ряды Фурье, соответствующие функциям f и g, сходятся или расходятся одновременно на любом интервале $(a',b') \subset (a,b)$, и если они сходятся, то их суммы совпадают. $\bullet$

Теорема. Пусть $f \in L^1(-\pi,\pi)$, $x \in [-\pi,\pi]$ и выполняется *условие Дини*:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|}\, dt < \infty$$

для некоторого $\delta > 0$. Тогда $S_n(f,x) \to f(x)$ при $n \to \infty$. $\bullet$

Заметим, что в формулировке теоремы допущена неточность (для наглядности). Функции из $L^1(-\pi,\pi)$ определены с точностью до значений на множестве меры нуль, поэтому $f(x)$ может быть не определена. Было бы более правильно изменить формулировку следующим образом. Если

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+t) - S_0|}{|t|}\, dt < \infty$$

для некоторого числа S_0, то $S_n(f,x) \to S_0$ при $n \to \infty$.

Теорема. Пусть $f \in L^1(-\pi,\pi)$, $x \in [-\pi,\pi]$, существуют пределы $\lim_{t\nearrow x} f(t) = f(x-0)$, $\lim_{t\searrow x} f(t) = f(x+0)$ и выполняется *второе условие Дини*:

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{|t|}\,dt < \infty, \qquad \int_{-\delta}^0 \frac{|f(x+t)-f(x-0)|}{|t|}\,dt < \infty$$

для некоторого $\delta > 0$. Тогда $S_n(f,x) \to \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ при $n \to \infty$. •

Обозначим через $C^{0,\alpha}[-\pi,\pi]$, $\alpha \in (0,1)$, пространство непрерывных на $[-\pi,\pi]$ функций f, которые удовлетворяют *условию Гёльдера*: $|f(x)-f(y)| \leqslant C\,|x-y|^\alpha$ для некоторой константы C. При $\alpha = 1$ условие Гёльдера называется *условием Липшица.* $C^{0,\alpha}[-\pi,\pi]$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}[-\pi,\pi]} = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)| + \max_{x,y\in[-\pi,\pi]} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Функции из $C^{0,\alpha}[-\pi,\pi]$ удовлетворяют условиям Дини.

Теорема. Пусть $f \in C^{0,\alpha}[-\pi,\pi]$ с $\alpha \in (0,1]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда ряд Фурье функции f сходится к f равномерно на $[-\pi,\pi]$. •

Теорема. (*Упражнение*) Пусть функция f интегрируема на $[-\pi,\pi]$, продолжена периодически на $\mathbb{R}$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Если $f \in C^{0,\alpha}[a,b]$, где $\alpha \in (0,1]$ и $[a,b] \subset \mathbb{R}$, то для любого $\delta \in (0,(b-a)/2)$ ряд Фурье функции f сходится к f равномерно на $[a+\delta, b-\delta]$. •

Пусть f — непрерывная на $[-\pi,\pi]$ функция, продолженная периодически на $\mathbb{R}$. Обозначим $\sigma_n(f,x) = \dfrac{1}{n}\big(S_0(f,x) + \dots + S_{n-1}(f,x)\big)$. Нетрудно вычислить, что

$$\sigma_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t)\,dt, \quad \text{где } \Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\right)^2.$$

Величина $\sigma_n(f,x)$ называется *суммой Фейера*, а Φ_n — *ядром Фейера.* Ядра Фейера обладают следующими свойствами:

1) $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = 1$ для всех n;

2) $\int_\delta^\pi \Phi_n(t)\,dt \to 0$ и $\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t)\,dt \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $\delta \in (0,\pi)$.

Теорема. (*Фейер*) Пусть $f \in C[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда $\sigma_n(f) \to f$ равномерно на $[-\pi,\pi]$. •

Из этой теоремы следует теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций тригонометрическими полиномами.

В пространстве $L^2(0,\pi)$ полными являются следующие две ортогональные системы функций:

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \dots,\ \cos kx,\ \dots$$
$$\sin x,\ \sin 2x,\ \dots,\ \sin kx,\ \dots$$

Предположим, что функция f представима своим рядом Фурье. Согласно формуле Эйлера $\cos kx = \dfrac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx})$ и $\sin kx = \dfrac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})$. Отсюда получаем, что

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

где $c_0 = a_0/2$, $c_k = (a_k + ib_k)/2$ при $k < 0$ и $c_k = (a_k - ib_k)/2$ при $k > 0$. Можно вычислить c_k и по следующей формуле:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx.$$

Это представление справедливо и для комплексных функций $f = f_1 + if_2 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$. Скажем, что комплексная функция принадлежит пространству L^p, если её вещественная и мнимая части лежат в этом пространстве. С пространством L^2 есть небольшой нюанс. Скалярное произведение в комплексном пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ определяется следующим образом: $(u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\, \overline{v(x)}\, dx$, где черта означает комплексное сопряжение. Таким образом, в полном соответствии с нашими определениями для абстрактных гильбертовых пространств для комплексного пространства $L^2[-\pi, \pi]$ мы имеем: $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$, где $\varphi_k(x) = e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$, $\alpha_k = (f, \varphi_k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Функции φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, образуют ортонормированный базис в $L^2[-\pi, \pi]$.

§ 12.3. *Преобразование Фурье.*

Теорема. (*Формула Фурье*) Пусть функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Дини в точке x_0. Тогда

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda (t - x_0)\, dt.$$

•

Формулу Фурье можно записать в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\lambda(t-x)}\, dt d\lambda\ .$$

Введем обозначение:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\lambda(t-x)}\, dt.$$

$\hat{f}$ называется преобразованием Фурье функции f. Мы будем также использовать для преобразования Фурье обозначение $F(f)$. Согласно формуле Фурье справедлива формула обращения преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda(t-x)}\, d\lambda.$$

Выражение в правой части называется обратным преобразованием Фурье и обозначается F^{-1}. Для того, чтобы формула обращения была справедлива, необходимо наложить на функцию f некоторые ограничения (например, условие Дини).

Утверждение. Если $f_k \to f$ в $L^1(\mathbb{R})$, то $F(f_k) \to F(f)$ равномерно на $\mathbb{R}$. •

Утверждение. Если $f \in L^1(\mathbb{R})$, то $F(f)$ определено всюду в $\mathbb{R}$ и ограничено: $|f(f)| \leqslant (2\pi)^{-1/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$. •

Утверждение. Если $f \in L^1(\mathbb{R})$, то $F(f) \in C(\mathbb{R})$ и $F(f)(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. •

Утверждение. Если $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$ и $f \in C^1(\mathbb{R})$, то $F(f')(x) = ixF(f)(x)$. •

Утверждение. Если $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$, то $F(f)$ дифференцируема всюду на $\mathbb{R}$ и $\frac{d}{d\lambda}F(f) = -i\lambda F(f)$. •

Сверткой функций $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ называется функция

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt.$$

Теорема. Если $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, то $F(f * g) = F(f)\,F(g)$. •

Если $f \in L^2(\mathbb{R})$, то, вообще говоря, $f \notin L^1(\mathbb{R})$ и поэтому преобразование Фурье $F(f)$ в обычном смысле не определено. Тем не менее, мы можем обобщить понятие преобразования Фурье так, чтобы оно было определено на функциях из $L^2(\mathbb{R})$ и совпадало с классическим на функциях из $L^1(\mathbb{R})$.

Теорема (*Планшерель*). Пусть $f \in L^2(\mathbb{R})$ и $g_m(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-m}^{+m} f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx$. Тогда
а) $g_m \in L^2(\mathbb{R})$ для всех $m \in \mathbb{N}$;
б) последовательность $\{g_m\}$ сходится в $L^2(\mathbb{R})$ при $m \to \infty$ к некоторой функции $g \in L^2(\mathbb{R})$, причем $\|g\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$;
в) если $f \in L^2 \cap L^1(\mathbb{R})$, то $g = F(f)$. •

Функция g называется преобразованием Фурье функции $f \in L^2$.

Упражнение. Пусть $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ и $F(f) = F(g)$ в $\mathbb{R}$. Доказать, что $f = g$ почти всюду в $\mathbb{R}$. В частности, из $F(f) = 0$ следует, что $f = 0$ почти всюду. •

Глава 13. Анализ гладких отображений.

§ 13.1. *Непрерывные отображения.*

Определение. *Метрическим пространством* M называется множество точек, на котором определена метрика ρ. *Метрика* это функция $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:
1) $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqslant 0$;
2) $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$;
3) $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqslant \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \rho(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$;
4) $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$. •

Последовательность $\{\boldsymbol{x}_k\}$ точек метрического пространства M называется *сходящейся*, если существует точка $\boldsymbol{x} \in M$, такая, что $\rho(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}) \to 0$ при $k \to \infty$. Последовательность $\{\boldsymbol{x}_k\}$ точек метрического пространства M называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}\ :\ \ \rho(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_\ell) < \varepsilon \text{ для всех } m, \ell > k_\varepsilon.$$

Определение. Метрическое пространство называется *полным*, если в нем каждая фундаментальная последовательность является сходящейся. •

Пусть M и N — метрические пространства. Отображение $f : M \to N$ называется *непрерывным в точке* $\boldsymbol{x} \in M$, если из $\rho_M(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}) \to 0$ следует, что $\rho_N(f(\boldsymbol{x}_k), f(\boldsymbol{x})) \to 0$. Отображение $f : M \to N$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно во всех точках пространства M.

Определение. Отображение $f : M \to N$ называется *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно и взаимнооднозначно, и f^{-1} непрерывно. •

Определение. Отображение $f : M \to M$ называется *сжимающим*, если существует $q \in (0, 1)$, такое что $\rho(f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2)) \leqslant q\rho(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ для всех $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in M$. Мы будем еще говорить, что f является q-сжимающим. •

Теорема (*Принцип сжимающих отображений*). Пусть M — полное метрическое пространство и $f : M \to M$ — сжимающее отображение. Тогда существует единственная точка $\boldsymbol{x}_* \in M$, такая, что $\boldsymbol{x}_* = f(\boldsymbol{x}_*)$. •

Точка $\boldsymbol{x}_*$ называется *неподвижной точкой* отображения f.

Теорема (*О непрерывной зависимости неподвижной точки от параметра*). Пусть M — полное метрическое пространство и $f_t : M \to M$ — семейство отображений, зависящих от параметра t из метрического пространства T. Предположим, что
1) существует $q \in (0, 1)$, такое, что f_t является q-сжимающим для каждого $t \in T$;
2) $f_t(\boldsymbol{x})$ непрерывно по t в точке $t_0 \in T$ для каждого $\boldsymbol{x} \in M$.

Если $\boldsymbol{a}_t \in M$ — неподвижная точка отображения f_t, т.е. $\boldsymbol{a}_t = f_t(\boldsymbol{a}_t)$, то $\boldsymbol{a}_t$ непрерывна по t в точке $t_0 \in T$. •

Определение. Взаимно-однозначное отображение $\boldsymbol{\varphi} : U \to Y$ называется *диффеоморфизмом*, если как $\boldsymbol{\varphi}$, так и $\boldsymbol{\varphi}^{-1} : \boldsymbol{\varphi}(U) \to U$ непрерывно-дифференцируемы. •

§ 13.2. *Неявные функции.*

Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ и $F : X \times Y \to Y$, $F = (F_1, \ldots, F_m)$.

Определение. Отображение $\boldsymbol{\varphi} : X \to Y$, такое, что $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) = 0$, называется *неявно заданным отображением.* •

Теорема (*О неявной функции*). Пусть U_x и U_y — области в X и Y соответственно, и отображение $F : U_x \times U_y \to Y$ удовлетворяет следующим условиям:
1) существует точка $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in U_x \times U_y$, такая, что $F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = 0$;
2) отображение F непрерывно в точке $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$;
3) производная F'_y отображения F по $\boldsymbol{y}$ существует в $U_x \times U_y$ и непрерывна в точке $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$;
4) $\det F'_y(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \neq 0$.

Тогда существуют окрестность V_x точки $\boldsymbol{x}_0$ в X, окрестность V_y точки $\boldsymbol{y}_0$ в Y и отображение $\boldsymbol{\varphi} : V_x \to V_y$, такие, что
1) $\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in V_x \times V_y \mid F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in V_x \times V_y \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\}$;
2) $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_0)$;
3) отображение $\boldsymbol{\varphi}$ непрерывно в точке $\boldsymbol{x}_0$. •

Теорема (*О непрерывности неявного отображения*). Пусть выполнены условия теоремы о неявной функции и отображение F непрерывно в некоторой окрестности точки $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ в $X \times Y$. Тогда неявная функция $\boldsymbol{\varphi}$ непрерывна в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$ в X. •

Теорема (*О дифференцируемости неявного отображения*). Пусть выполнены условия теоремы о неявной функции и отображение F непрерывно дифференцируемо (по $\boldsymbol{x}$ и по $\boldsymbol{y}$) в некоторой окрестности точки $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ в $X \times Y$. Тогда неявная функция $\boldsymbol{\varphi}$ непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$ в X и

$$\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x}) = -\big(F'_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))\big)^{-1} \circ F'_x(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})). \quad \bullet$$

Теорема (*О гладкости неявного отображения*). Пусть выполнены условия теоремы о неявной функции и отображение F k раз непрерывно дифференцируемо (по $\boldsymbol{x}$ и по $\boldsymbol{y}$) в некоторой окрестности точки $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ в $X \times Y$. Тогда неявная функция $\boldsymbol{\varphi}$ k раз непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$ в X. $\bullet$

Теорема (*О неявном отображении в общей формулировке*). Пусть отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $n > k$, непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ и $\operatorname{rang} F'_x(\boldsymbol{x}^0) = k$, т.е. можно выделить k переменных $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, которые мы обозначим через $\boldsymbol{y}$, такие, что $\det F'_y(\boldsymbol{x}^0) \neq 0$. Обозначим совокупность переменных, отличных от $\boldsymbol{y}$, через $\boldsymbol{z}$. Таким образом, пространство $X = \mathbb{R}^n$ можно представить как $X = Y \times Z$, где $Y = \mathbb{R}^k$ и $Z = \mathbb{R}^{n-k}$, при этом $\boldsymbol{x}^0 = (\boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$.

Если $F(\boldsymbol{x}^0) = 0$, то существует отображение $\boldsymbol{\varphi} : Z \to Y$, такое, что в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}^0$ множество решений уравнения $F(\boldsymbol{x}) = 0$ есть $\{\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{z})\}$. $\bullet$

Теорема (*Об обратной функции*). Пусть в некоторой окрестности $U_y \subset \mathbb{R}^n$ точки $\boldsymbol{y}_0$ задано непрерывно-дифференцируемое отображение $\boldsymbol{g} : U_y \to \mathbb{R}^n$, такое, что $\det \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_0) \neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности $U_x \subset \mathbb{R}^n$ точки $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0)$ определено обратное отображение $\boldsymbol{g}^{-1}$, которое является непрерывно-дифференцируемым, и

$$\left(\boldsymbol{g}^{-1}\right)'_x(\boldsymbol{x}) = \left(\boldsymbol{g}'_y\right)^{-1}(\boldsymbol{y})\Big|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{x})}. \qquad \bullet$$

Теорема (*О гладкости обратного отображения*). Пусть $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ есть отображение класса C^k в некоторой окрестности U_y точки $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\det \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_0) \neq 0$. Тогда существует окрестность U_x точки $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0)$, такая, что $\boldsymbol{g}$ есть диффеоморфизм класса C^k области U_y на область U_x. $\bullet$

§ 13.3. *Многообразия в* $\mathbb{R}^n$.

Определение. Пусть задано множество $M \subset \mathbb{R}^n$ и точка $\boldsymbol{a} \in M$. Мы скажем, что M является p-мерным многообразием класса C^k в окрестности U точки $\boldsymbol{a}$, если существует диффеоморфизм φ класса C^k окрестности U на окрестность нуля $V \subset \mathbb{R}^n$, такой, что $\varphi(\boldsymbol{a}) = 0$ и $\varphi(M \cap U) = \{\boldsymbol{x} \in V \cap \mathbb{R}^n \mid x_{p+1} = \ldots = x_n = 0\}$. $\bullet$

Теорема (*О локальном явном задании многообразия*). Пусть M — некоторое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{a} \in M$. Для того, чтобы M было p-мерным многообразием класса C^k в некоторой окрестности U точки $\boldsymbol{a}$, необходимо и достаточно, чтобы существовали $(n-p)$ скалярных функций $f_{p+1}, \ldots, f_n : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ класса C^k, такие, что после подходящей перестановки координат $x_1, \ldots, x_n$ пространства $\mathbb{R}^n$ выполнялись бы следующие условия:
1) $f_i(a_1, \ldots, a_p) = a_i$ для $i = p+1, \ldots, n$;
2) $M \cap U = \{\boldsymbol{x} \in U \mid x_i = f_i(x_1, \ldots, x_p),\ i = p+1, \ldots, n\}$. $\bullet$

Теорема (*О локальном параметрическом задании многообразия*). Пусть M — некоторое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{a} \in M$. Для того, чтобы M было p-мерным многообразием класса C^k в некоторой окрестности U точки $\boldsymbol{a}$, необходимо и достаточно, чтобы существовал гомеоморфизм ψ некоторой окрестности V нуля в $\mathbb{R}^p$ на $M \cap U$, такой, что
1) $\psi(0) = \boldsymbol{a}$;
2) ψ как отображение из $\mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^n$ принадлежит классу C^k;
3) $\operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right) = p$ при $\boldsymbol{\xi} \in V$. $\bullet$

Отображение ψ называется *локальной параметризацией* многообразия M в окрестности точки $\boldsymbol{a}$.

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *p-мерным многообразием* класса C^k, если оно является таковым в некоторой окрестности каждой своей точки. •

Множество $U \subset M$ называется открытым в M, если существует открытое множество $V \subset \mathbb{R}^n$, такое, что $U = V \cap M$. Каждое многообразие M можно представить в виде объединения открытых в M множеств U_α, каждое из которых является областью действия некоторой параметризации ψ_α. Пара (U_α, ψ_α) называется *картой* или *локальной картой*. Объединение всех локальных карт называется *атласом*.

Лемма (*О двух локальных параметризациях*). Пусть M — p-мерное многообразие класса C^k в $\mathbb{R}^n$ и U — открытое множество в M, на котором заданы две параметризации ψ и h. То есть, $\psi : V \to U$ и $h : V \to U$, где V — окрестность нуля в $\mathbb{R}^p$. Тогда существует диффеоморфизм $\lambda : V \to V$ класса C^k, такой, что $h = \psi \circ \lambda$. •

Теорема (*О касательном пространстве к параметрически заданному многообразию*). Пусть M есть p-мерное многообразие класса C^1 в $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in M$ и ψ есть локальная параметризация в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{a}$. Множество $\dfrac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\xi}}\Big|_{\boldsymbol{\xi}=0}(\mathbb{R}^p)$ не зависит от выбора параметризации ψ и называется *касательным пространством* к многообразию M в точке $\boldsymbol{a}$ (обозначается $T_a M$). •

Определение. Карты (U_α, ψ_α) и (U_β, ψ_β) имеют *согласованные ориентации*, если либо $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$, либо $\det (\psi'_\alpha)^{-1} \circ \psi'_\beta > 0$ в $U_\alpha \cap U_\beta$. Атлас называется *согласованным*, если в нем любые две карты имеют согласованные ориентации. Многообразие называется *ориентируемым*, если на нем существует согласованный атлас. •

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется p-мерным *многообразием с краем*, если для любой точки $\boldsymbol{a} \in M$ реализуется одна из следующих возможностей:
1) существует диффеоморфизм $\varphi : U \to V$ некоторой окрестности $U \subset \mathbb{R}^n$ точки $\boldsymbol{a}$ на некоторую окрестность нуля $V \subset \mathbb{R}^n$, такой, что $\varphi(\boldsymbol{a}) = 0$ и $\varphi(M \cap U) = \{\boldsymbol{x} \in V \mid x_{p+1} = \ldots = x_n = 0\}$;
2) существует диффеоморфизм $\varphi : U \to V$ некоторой окрестности $U \subset \mathbb{R}^n$ точки $\boldsymbol{a}$ на некоторую окрестность нуля $V \subset \mathbb{R}^n$, такой, что $\varphi(\boldsymbol{a}) = 0$ и $\varphi(M \cap U) = \{\boldsymbol{x} \in V \mid x_p \geqslant 0,\ x_{p+1} = \ldots = x_n = 0\}$,
причем множество точек, для которых реализуется вторая возможность (это множество называется *краем многообразия*), не пусто. •

§ 13.4. *Неявно заданные многообразия.*

Обозначим через M множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{cases}$$

где $k < n$. Обозначим $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_k)$.

Теорема (*О неявно заданном многообразии*). Если $M \neq \varnothing$, $\operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}} = k$ для любой точки $\boldsymbol{a} \in M$ и $\boldsymbol{f}$ является отображением класса C^m, то M есть $(n-k)$-мерное многообразие класса C^m в $\mathbb{R}^n$. •

Теорема (*О касательном пространстве к неявно заданному многообразию*). Пусть M —

неявно заданное многообразие и выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда $T_aM = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\langle \boldsymbol{x} \rangle = 0\}$. •

Определение. Пусть M — $(n-k)$-мерное неявно заданное многообразие класса C^1 в $\mathbb{R}^n$ и $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция класса C^1. Мы скажем, что F достигает в точке $\boldsymbol{a} \in M$ своего *локального минимума на многообразии* M (*локального условного минимума*), если существует окрестность U точки $\boldsymbol{a}$, такая, что $F(\boldsymbol{a}) \leqslant F(\boldsymbol{x})$ для любого $\boldsymbol{x} \in U$. •

Если в этом определении $F(\boldsymbol{a}) \geqslant F(\boldsymbol{x})$ для любого $\boldsymbol{x} \in U$, то говорят о *локальном максимуме на многообразии* M или о *локальном условном максимуме*. Если точка $\boldsymbol{a}$ является точкой локального условного минимума или максимума, то она называется точкой *локального условного экстремума*.

Теорема (*Правило множителей Лагранжа*). Пусть M — $(n-k)$-мерное неявно заданное многообразие класса C^1 в $\mathbb{R}^n$ и $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция класса C^1. Если функция F достигает в точке $\boldsymbol{a} \in M$ своего локального экстремума на многообразии M, то существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что

$$F'(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i'(\boldsymbol{a}).$$

•

Введем обозначение: $L(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(\boldsymbol{x})$ — функция Лагранжа.

Теорема (*Достаточное условие локального условного минимума*). Пусть $F, f_i \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, \ldots, k$, $\boldsymbol{x}_0 \in M$ и для некоторого $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ функция L удовлетворяет следующим условиям:

1. $\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}_0) = 0$;
2. $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{x}^2}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}_0)$ является положительно определенным оператором на $T_{\boldsymbol{x}_0}M$, т.е.,

$\dfrac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{x}^2}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}_0)\langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h} \rangle \geqslant \alpha |\boldsymbol{h}|^2$ для некоторого $\alpha > 0$ и для всех $\boldsymbol{h} \in T_{\boldsymbol{x}_0}M$.

Тогда $\boldsymbol{x}_0$ — точка локального минимума функции F на многообразии M. •

Глава 14. Дифференциальные формы.

§ 14.1. *Полилинейные формы.*

Пусть X есть *линейное пространство* над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. То есть, по определению, если $\boldsymbol{x} \in X$ и $\boldsymbol{y} \in X$, то $(\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y}) \in X$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Линейные пространства часто называют векторными, а их элементы — *векторами*.

Выражение $\sum_{k=1}^{n} \alpha^k \boldsymbol{x}_k$, где $\alpha^k \in \mathbb{R}$ и $\boldsymbol{x}_k \in X$, называется *линейной комбинацией* векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. Векторы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ пространства X называются *линейно независимыми*, если из $\sum_{k=1}^{n} \alpha^k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}$ следует, что все $\alpha^k = 0$. Здесь $\mathbf{0}$ есть нулевой вектор в X.

Семейство $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ векторов линейного пространства X называется *базисом*, если каждый вектор $\boldsymbol{x} \in X$ однозначно представим в виде линейной комбинации: $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \boldsymbol{e}_k$, $\alpha^k \in \mathbb{R}$. Коэффициенты α^k называются *координатами* $\boldsymbol{x}$ относительно базиса $\{\boldsymbol{e}_k\}$. Векторы базиса являются линейно независимыми.

Множество Y называется *линейным подпространством* пространства X, если Y есть линейное пространство и $Y \subset X$. *Линейной оболочкой* семейства векторов пространства X называется множество их всевозможных линейных комбинаций. Легко проверить, что линейная оболочка является линейным подпространством в X. Линейную оболочку элементов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ называют подпространством, *порождённым* векторами $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ (или *натянутым* на эти векторы).

Линейное пространство называется *конечномерным*, если оно является линейной оболочкой конечного числа векторов.

Теорема. Каждое конечномерное линейное пространство X имеет базис. •

Теорема. В конечномерном пространстве число элементов базиса не зависит от выбора базиса. •

Размерностью линейного пространства X (обозначается $\dim X$) называется число векторов в его базисе.

Пусть X — конечномерное линейное пространство. Обозначим через X^p линейное пространство, элементы которого суть упорядоченные наборы $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p)$.

Определение. Отображение $f : X^p \to \mathbb{R}$ называется *полилинейной формой степени* p (или *p-линейной формой*), если

$$f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \alpha \boldsymbol{x}'_k + \beta \boldsymbol{x}''_k, \ldots, \boldsymbol{x}_p) = \alpha f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}'_k, \ldots, \boldsymbol{x}_p) + \beta f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}''_k, \ldots, \boldsymbol{x}_p)$$

для каждого $k = 1, \ldots, p$ и для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. •

Для двух полилинейных форм f и g произвольных степеней k и m соответственно определим полилинейную форму $f \otimes g$ степени $k+m$, называемую их *тензорным произведением*:

$$(f \otimes g)(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{k+m}) = f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)\, g(\boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{k+m}).$$

для полилинейных форм f, g и h произвольных степеней справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
(\lambda f) \otimes g = \lambda (f \otimes g) \quad \text{для всех } \lambda \in \mathbb{R}, \\
(f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h, \\
f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h, \\
(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h).
\end{gathered}$$

Последнее свойство позволяет нам не заботиться о расстановке скобок в тензорных произведениях: $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h) = f \otimes g \otimes h$.

Предположим, что $\dim X = n$ и $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — какой-либо базис в X. Поставим в соответствие этому базису n линейных форм π^k, $k = 1, \ldots, n$, определённых следующим образом:

$$\pi^k(\boldsymbol{x}) = x^k,$$

где x^k есть k-я координата вектора $\boldsymbol{x}$ относительно базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, то есть, $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^n x^k \boldsymbol{e}_k$. Заметим, что $\pi^k(\boldsymbol{e}_m) = \delta^k_m$, где δ^k_m — символ Кронекера.

Лемма (*О представлении полилинейных форм*). Для каждой определённой на X полилинейной формы f степени p справедливо представление

$$f = \sum_{k_1=1}^n \ldots \sum_{k_p=1}^n a_{k_1 \ldots k_p}\, \pi^{k_1} \otimes \ldots \otimes \pi^{k_p},$$

где $a_{k_1\dots k_p} = f(\boldsymbol{e}_{k_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{k_p})$. Формы вида $\pi^{k_1} \otimes \dots \otimes \pi^{k_p}$, где каждый индекс k_i пробегает значения от 1 до n, образуют базис в пространстве полилинейных форм степени p. •

Полилинейная форма f степени $p \geqslant 2$ называется *кососимметрической*, если она меняет знак при перестановке двух её произвольных аргументов:

$$f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k, \dots, \boldsymbol{x}_m, \dots, \boldsymbol{x}_p) = -f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m, \dots, \boldsymbol{x}_k, \dots, \boldsymbol{x}_p). \qquad \bullet$$

Множество всех кососимметрических p-линейных форм на X образует линейное пространство, которое мы будем обозначать $\Lambda^p(X)$. Если $p = 1$, то определим $\Lambda^1(X)$ как линейное пространство всех линейных форм на X. Если $p = 0$, то мы положим $\Lambda^0(X) = \mathbb{R}$. Для краткости мы будем называть кососимметрические полилинейные формы степени p (то есть, элементы пространства $\Lambda^p(X)$) просто *p-формами* или *внешними p-формами*.

Лемма. Пусть $f \in \Lambda^p(X)$ и $p \geqslant 2$. Если $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_m$ для пары различных индексов k и m, то $f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p) = 0$. •

Следствие. Пусть $f \in \Lambda^p(X)$ и $p \geqslant 2$. Если векторы $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p$ пространства X линейно зависимы, то $f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p) = 0$. •

Следствие. Если $f \in \Lambda^p(X)$ и $p > \dim X$, то $f = 0$, то есть, $f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p) = 0$ для всех наборов векторов $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p$ пространства X. •

Пусть $N_p = \{1, 2, \dots, p\}$. Каждое взаимнооднозначное отображение множества N_p в себя называется *перестановкой*. Обозначим через P_p множество всех перестановок в N_p. Перестановка $\sigma \in P_p$ называется *транспозицией*, если в N_p существует пара различных чисел k и m, таких, что $\sigma(k) = m$, $\sigma(m) = k$ и $\sigma(\ell) = \ell$ для любого ℓ, отличного от k и m. Всякая перестановка из P_p может быть представлена как суперпозиция конечного числа транспозиций. При этом чётность числа транспозиций в этом представлении не зависит от выбора представления. Назовём *сигнатурой* перестановки σ число $\varepsilon(\sigma)$, равное $+1$, если σ разлагается в суперпозицию чётного числа транспозиций, и -1, если — нечётного.

Теорема. Пусть $f \in \Lambda^p(X)$ и $p \geqslant 2$. Для любой перестановки $\sigma \in P_p$ имеет место равенство $f(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}, \dots, \boldsymbol{x}_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\, f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p)$. •

Введём операцию *альтернирования* $\mathcal{A}_p$, которая каждой полилинейной форме f степени $p \geqslant 2$ ставит в соответствие кососимметрическую p-форму $\mathcal{A}_p f$:

$$(\mathcal{A}_p f)(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in P_p} \varepsilon(\sigma) f(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}, \dots, \boldsymbol{x}_{\sigma(p)}).$$

Сумма здесь берётся по всем перестановкам из P_p.

Если $f \in \Lambda^p(X)$, то $\mathcal{A}_p f = f$. Операция альтернирования линейна, то есть,

$$\mathcal{A}_p(f + g) = \mathcal{A}_p f + \mathcal{A}_p g,$$
$$\mathcal{A}_p(\lambda f) = \lambda\, \mathcal{A}_p f$$

для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и всех полилинейных форм f и g степени p. Из этих свойств операции $\mathcal{A}_p$ следует, что

$$\mathcal{A}_p f = \sum_{k_1=1}^{n} \dots \sum_{k_p=1}^{n} a_{k_1\dots k_p}\, \mathcal{A}_p(\pi^{k_1} \otimes \dots \otimes \pi^{k_p})$$

для любой полилинейной формы f степени p. Кроме того, для линейных форм $f^1, \ldots, f^p$

$$\mathcal{A}_p(f^1 \otimes \ldots \otimes f^p)(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) = \frac{1}{p\,!} \begin{vmatrix} f^1(\boldsymbol{x}_1) & \ldots & f^p(\boldsymbol{x}_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f^1(\boldsymbol{x}_p) & \ldots & f^p(\boldsymbol{x}_p) \end{vmatrix}.$$

Лемма. Пусть $\dim X = n$ и $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис в X. Каждая форма $f \in \Lambda^p(X)$ может быть однозначно представлена в таком виде:

$$f = \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_p \leqslant n} a_{k_1 \ldots k_p} \, \pi^{k_1 \ldots k_p},$$

где сумма берётся от 1 до n по всем k_i, удовлетворяющим условию под знаком суммы, $a_{k_1 \ldots k_p} \in \mathbb{R}$, а формы $\pi^{k_1 \ldots k_p} \in \Lambda^p(X)$ определены следующим образом:

$$\pi^{k_1 \ldots k_p}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) = \begin{vmatrix} \pi^{k_1}(\boldsymbol{x}_1) & \ldots & \pi^{k_p}(\boldsymbol{x}_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \pi^{k_1}(\boldsymbol{x}_p) & \ldots & \pi^{k_p}(\boldsymbol{x}_p) \end{vmatrix}.$$ •

Из этой леммы следует, что множество p-форм $\{\pi^{k_1 \ldots k_p},\ 1 \leqslant k_1 < \ldots < k_p \leqslant n\}$ образует базис в $\Lambda^p(X)$, а $\dim \Lambda^p(X) = C_n^p$.

Определение. *Внешним произведением* форм $f \in \Lambda^p(X)$ и $g \in \Lambda^q(X)$ называется следующая форма $(f \wedge g) \in \Lambda^{p+q}(X)$:

$$f \wedge g = \frac{(p+q)!}{p\,!\,q\,!} \mathcal{A}_{p+q}(f \otimes g).$$ •

Внешнее произведение обладает следующими простейшими свойствами:

$$(f + g) \wedge h = f \wedge h + g \wedge h,$$
$$(\lambda f) \wedge h = \lambda (f \wedge h)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \Lambda^p(X)$, $g \in \Lambda^p(X)$, $h \in \Lambda^q(X)$ с произвольными p и q.

Теорема. Если $f \in \Lambda^p(X)$ и $g \in \Lambda^q(X)$, то

$$(f \wedge g)(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{p+q}) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, f(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\sigma(p)})\, g(\boldsymbol{x}_{\sigma(p+1)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\sigma(p+q)}),$$

где сумма берётся по всем упорядоченным перестановкам $\sigma \in P_{p+q}$, то есть таким, что $\sigma(1) < \ldots < \sigma(p)$ и $\sigma(p+1) < \ldots < \sigma(p+q)$. •

Лемма. Пусть $\dim X = n$ и $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис в X. Для любого набора индексов $\{k_1, \ldots, k_{p+q}\} \subset \{1, \ldots, n\}$ имеет место равенство

$$\pi^{k_1 \ldots k_p} \wedge \pi^{k_{p+1} \ldots k_{p+q}} = \pi^{k_1 \ldots k_{p+q}}.$$ •

Теорема. Внешнее произведение ассоциативно, то есть,

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$$

для любых форм $f \in \Lambda^p(X)$, $g \in \Lambda^q(X)$ и $h \in \Lambda^s(X)$ с произвольными p, q и s. •

Из этой теоремы следует, что мы можем не заботиться о расстановке скобок во внешнем произведении нескольких форм и имеем право писать выражения вида $f^1 \wedge f^2 \wedge \ldots \wedge f^m$, где f^k — произвольные внешние формы.

Лемма. Пусть $\dim X = n$ и $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис в X. Для любого набора индексов $\{k_1, \ldots, k_p\} \subset \{1, \ldots, n\}$ имеет место равенство

$$\pi^{k_1 \ldots k_p} = \pi^{k_1} \wedge \ldots \wedge \pi^{k_p}.$$ •

Таким образом, совокупность p-форм $\{\pi^{k_1} \wedge \ldots \wedge \pi^{k_p}, \ : \ 1 \leqslant k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_p \leqslant n\}$ образует базис в $\Lambda^p(X)$, то есть, каждая p-форма f может единственным образом быть представлена в следующем виде:

$$f = \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_p \leqslant n} a_{k_1 \ldots k_p} \, \pi^{k_1} \wedge \ldots \wedge \pi^{k_p},$$

где $a_{k_1 \ldots k_p} \in \mathbb{R}$. Это выражение называется *каноническим представлением* p-формы f.

Теорема (*Об антикоммутативности внешнего произведения*). Если $f \in \Lambda^p(X)$ и $g \in \Lambda^q(X)$, то $f \wedge g = (-1)^{pq} \, g \wedge f$. •

Пусть X и Y — линейные пространства и Φ — линейное отображение X в Y. Линейное отображение $\Phi : X \to Y$ естественным образом порождает отображение $\Phi^* : \Lambda^p(Y) \to \Lambda^p(X)$. Если $f \in \Lambda^p(Y)$, то

$$(\Phi^* f)(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) = f(\Phi \boldsymbol{x}_1, \ldots, \Phi \boldsymbol{x}_p).$$

Отображение Φ^* линейно, то есть,

$$\Phi^*(f + g) = \Phi^* f + \Phi^* g \quad \text{и} \quad \Phi^*(\lambda f) = \lambda \Phi^* f$$

для всех $f, g \in \Lambda^p(Y)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Кроме того,

$$\begin{gathered} \Phi^*(f \otimes g) = (\Phi^* f) \otimes (\Phi^* g), \\ \Phi^*(\mathcal{A}_p f) = \mathcal{A}_p(\Phi^* f), \\ \Phi^*(f \wedge g) = (\Phi^* f) \wedge (\Phi^* g) \end{gathered}$$

для всех $f \in \Lambda^p(Y)$ и $g \in \Lambda^q(Y)$.

§ 14.2. *Дифференциальные формы в* $\mathbb{R}^n$.

Пусть U есть открытое множество в $\mathbb{R}^n$, которое может совпадать со всем пространством $\mathbb{R}^n$.

Определение. Всякое отображение $\omega : U \to \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ называется *внешней дифференциальной формой* степени p. •

Таким образом, в каждой точке $\boldsymbol{x} \in U$ определена p-форма $\omega_x \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$.

Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в области $U \subset \mathbb{R}^n$, то по определению $d_x f$ есть линейная форма на $\mathbb{R}^n$ для каждого $\boldsymbol{x} \in U$. Таким образом, df является внешней дифференциальной 1-формой. Рассмотрим функцию $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которая каждой точке $\boldsymbol{x}$ ставит в соответствие её i-ю координату. То есть, $f_i(\boldsymbol{x}) = x^i$. Её дифференциал в произвольной точке $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ есть $d_x x^i(\boldsymbol{\xi}) = \xi^i$. Видим, что дифференциал не зависит от выбора точки $\boldsymbol{x}$, поэтому индекс $\boldsymbol{x}$ у знака дифференциала можно не писать, то есть, $dx^i(\boldsymbol{\xi}) = \xi^i = \pi^i(\boldsymbol{\xi})$.

Таким образом, каждая дифференциальная форма ω степени p может быть представлена в таком виде:

$$\omega = \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_p \leqslant n} a_{k_1 \ldots k_p} \, dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_p},$$

где коэффициенты $a_{k_1 \ldots k_p}$ зависят от точки $\boldsymbol{x}$, то есть, являются функциями, действующими из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Это выражение называется *каноническим представлением дифференциальной формы* ω. В произвольной фиксированной точке $\boldsymbol{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$ мы имеем:

$$\omega_x = \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_p \leqslant n} a_{k_1 \ldots k_p}(\boldsymbol{x}) \, dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_p}.$$

Определение. Дифференциальная форма ω называется p-формой класса $C^m(U)$, если все коэффициенты $a_{k_1 \ldots k_p}$ в её каноническом представлении являются функциями класса $C^m(U)$. Множество внешних дифференциальных p-форм класса $C^m(U)$ будем обозначать через $C^m(U; \Lambda^p(\mathbb{R}^n))$. •

Сопоставим каждой дифференциальной p-форме ω класса $C^m(U)$, $m \geqslant 1$, некоторую $(p+1)$-форму класса $C^{m-1}(U)$, обозначаемую через $d\omega$ и называемую *внешним дифференциалом* формы ω.

Если $\omega \in C^m(U; \Lambda^0(\mathbb{R}^n))$, то есть, $\omega = \omega(\boldsymbol{x})$ является просто m раз непрерывно дифференцируемой в U функцией, то $d\omega$ суть обычный дифференциал этой функции:

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x^i} \, dx^i.$$

Видим, что $d\omega \in C^{m-1}(U; \Lambda^1(\mathbb{R}^n))$ и коэффициенты a_i в каноническом представлении формы $d\omega$ есть функции $a_i(\boldsymbol{x}) = \partial\omega(\boldsymbol{x})/\partial x^i$.

Пусть теперь $\omega \in C^m(U; \Lambda^p(\mathbb{R}^n))$ с произвольным $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Если каноническое представление формы ω имеет вид

$$\omega = \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_p \leqslant n} a_{k_1 \ldots k_p} \, dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_p},$$

то положим по определению

$$d\omega = \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_p \leqslant n} da_{k_1 \ldots k_p} \wedge dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_p},$$

где $da_{k_1 \ldots k_p}$ есть дифференциальная 1-форма, являющаяся дифференциалом функции $a_{k_1 \ldots k_p}(\boldsymbol{x})$.

Операция внешнего дифференцирования линейна:

$$d(\lambda\, \omega) = \lambda\, d\omega, \qquad d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$$

для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и любых форм $\omega, \omega_1, \omega_2 \in C^1(U, \Lambda^p(\mathbb{R}^n))$, $p \geqslant 0$.

Лемма. Для любой функции $f : U \to \mathbb{R}$ класса $C^1(U)$ и любой дифференциальной формы $\omega \in C^1(U; \Lambda^p(\mathbb{R}^n))$, $p \geqslant 1$, имеет место равенство

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega. \qquad \bullet$$

Теорема. Для любых дифференциальных форм $\omega_1 \in C^1(U; \Lambda^p(\mathbb{R}^n))$ и $\omega_2 \in C^1(U; \Lambda^q(\mathbb{R}^n))$ с $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 1$ справедливо равенство

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^p \, \omega_1 \wedge (d\omega_2). \qquad \bullet$$

Теорема. Для произвольной дифференциальной формы $\omega \in C^2(U; \Lambda^p(\mathbb{R}^n))$, $p \geqslant 0$, справедливо равенство $d(d\omega) = 0$. $\bullet$

Обозначим через $\mathbb{R}^n_x$ и $\mathbb{R}^m_y$ пространства переменных $\boldsymbol{x} = (x^1, \dots, x^n)$ и $\boldsymbol{y} = (y^1, \dots, y^m)$ соответственно. Пусть $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$ есть отображение класса C^{k+1} из $\mathbb{R}^n_x$ в $\mathbb{R}^m_y$, $U \subset \mathbb{R}^n_x$ и $V \subset \mathbb{R}^m_y$ — открытые связные множества (области), такие, что $\varphi(U) = V$.

Для каждой дифференциальной формы $\omega \in C^k(V; \Lambda^p(\mathbb{R}^m_y))$ определим форму $\varphi^*\omega \in C^k(U; \Lambda^p(\mathbb{R}^n_x))$ по следующему правилу:

$$(\varphi^*\omega)_x(\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_p) = \omega_{\varphi(\boldsymbol{x})}(\varphi'\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \varphi'\boldsymbol{\xi}_p),$$

где φ' есть производная отображения φ в точке $\boldsymbol{x}$:

$$\varphi' : \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}^m_y, \qquad \varphi'_{ij} = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}, \qquad (\varphi'\boldsymbol{\xi})^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \xi^j.$$

Отображение $\varphi^* : C^k(V; \Lambda^p(\mathbb{R}^m_y)) \to C^k(U; \Lambda^p(\mathbb{R}^n_x))$ называется *переносом дифференциальной формы* при отображении φ.

Заметим, что если $f : V \to \mathbb{R}$ есть скалярная функция, то $(\varphi^* f)_x = f(\varphi(x))$.

Лемма. Отображение φ^* линейно. То есть, если ω, ω_1 и ω_2 — дифференциальные формы и C — скалярная постоянная, то

$$\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) + \varphi^*(\omega_2), \qquad \varphi^*(C\,\omega) = C\,\varphi^*(\omega). \qquad \bullet$$

Лемма. Если $\omega = dy^k$, то $(\varphi^*\omega)_x = \displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\, dx^j$. $\bullet$

Лемма. Если ω_1 и ω_2 — дифференциальные формы (произвольных степеней), то

$$\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2. \qquad \bullet$$

Упражнение. Если f — скалярная функция и ω — дифференциальная форма, то

$$\big(\varphi^*(f\omega)\big)_x = f(\varphi(\boldsymbol{x}))\,(\varphi^*\omega)_x. \qquad \bullet$$

Таким образом, если форма ω задана в каноническом виде:

$$\omega_y = \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_p \leqslant m} a_{k_1 \ldots k_p}(\boldsymbol{y})\, dy^{k_1} \wedge \ldots \wedge dy^{k_p},$$

то

$$(\varphi^* \omega)_x = \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_p \leqslant m} a_{k_1 \ldots k_p}(\varphi(\boldsymbol{x}))\, d\varphi^{k_1}(\boldsymbol{x}) \wedge \ldots \wedge d\varphi^{k_p}(\boldsymbol{x}).$$

Утверждение. Если ω — форма степени m в $\mathbb{R}^m$ и $\varphi : \mathbb{R}^m_x \to \mathbb{R}^m_y$, то

$$(\varphi^* \omega)_x = \big(\varphi^*\, a\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^m\big)_x = \det \varphi'(\boldsymbol{x})\, a(\varphi(\boldsymbol{x}))\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m.$$ •

Теорема. $\quad d(\varphi^* \omega) = \varphi^* d\omega.$ •

Определение. Дифференциальная форма $\omega \in C^1(U; \Lambda^p(\mathbb{R}^n))$ называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$ в U. •

Определение. Дифференциальная форма $\omega \in C^k(U; \Lambda^p(\mathbb{R}^n))$ называется *точной*, если существует форма $\alpha \in C^{k+1}(U; \Lambda^{p-1}(\mathbb{R}^n))$, такая, что $\omega = d\alpha$ в U. •

Очевидно, точная форма всегда замкнута. Справедливость обратного утверждения зависит от области определения формы.

Определение. Область U называется *звездной относительно точки* $\boldsymbol{x}_0 \in U$, если для любой точки $\boldsymbol{x}_1 \in U$ отрезок $[\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1] = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} = t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_0,\ t \in [0,1]\}$ лежит в U.

Теорема (*Пуанкаре*). Пусть U — звездная относительно одной из своих точек область в $\mathbb{R}^n$ и $\omega \in C^\infty(U; \Lambda^p(\mathbb{R}^n))$. Если $d\omega = 0$ в U, то существует $\alpha \in C^\infty(U; \Lambda^{p-1}(\mathbb{R}^n))$, такая, что $d\alpha = \omega$. •

Пусть $\omega \in C(U; \Lambda^p(\mathbb{R}^n))$, $U \subset \mathbb{R}^n_x$. Если $p = n$ (в этом случае форма имеет вид $\omega_x = a(\boldsymbol{x})\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$), то можно определить интеграл от дифференциальной формы ω по области U. Положим

$$\int_U \omega = \int_U a(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

В правой части этой формулы стоит интеграл Лебега (или Римана) от функции a по области U. Если $\varphi : V \to U$, $V \subset \mathbb{R}^n_y$, то $\varphi^*\omega \in C(V; \Lambda^n(\mathbb{R}^n))$ и

$$\int_V \varphi^* \omega = \int_V a(\varphi(\boldsymbol{y})) \det \varphi'(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}.$$

Если $\det \varphi'(\boldsymbol{y}) > 0$, то согласно формуле замены переменных в интеграле Лебега (или Римана)

$$\int_V \varphi^* \omega = \int_{\varphi(V)} \omega.$$

§ 14.3. *Дифференциальные формы на многообразиях.*

Определение. Пусть M есть k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$. Дифференциальной формой ω степени p на многообразии M называется отображение, которое каждой точке $\boldsymbol{x} \in M$ ставит в соответствие форму $\omega_x \in \Lambda^p(T_x M)$. •

Сумма и внешнее произведение форм на многообразии определяются обычным образом. Определим операцию внешнего дифференцирования. Пусть $\boldsymbol{a} \in M$ и ψ — параметризация многообразия M в некоторой окрестности $U \subset \mathbb{R}^n$ точки $\boldsymbol{a}$. То есть, существует окрестность нуля $V \subset \mathbb{R}^k$, такая, что $M \cap U = \psi(V)$, $\psi(\mathbf{0}) = \boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rang} \psi' = k$ в V. Переменные в $\mathbb{R}^k$ обозначим через $\boldsymbol{t} = (t^1, \ldots, t^k)$.

Определение. Дифференциальная форма α степени $p+1$, определенная на $M \cap U$, называется внешним дифференциалом формы ω степени p, если $\psi^*\alpha = d(\psi^*\omega)$ в V. •

Определение. Скажем, что p-форма ω на M принадлежит классу C^m, если $\psi^*\omega$ — форма класса C^m. Для этого необходимо, чтобы многообразие M было класса C^{m+1}, т.е. ψ было отображением класса C^{m+1}. •

Определение. Пусть ψ — определенная выше параметризация (одна карта) k-мерного многообразия M в U. Если ω — дифференциальная k-форма на $M \cap U$, то положим

$$\int_{\psi(V)} \omega = \int_V \psi^*\omega. \qquad \bullet$$

Введем понятие интеграла по всему многообразию.

Определение. *Носителем* функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется замыкание множества $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ в $\mathbb{R}^n$. Обозначается носитель $\operatorname{supp} f$. •

Определение. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *финитной*, если $\operatorname{supp} f$ есть компактное множество в $\mathbb{R}^n$. •

Лемма (*Урысон*). Пусть компакт K содержится в открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$. Существует функция $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ класса C^∞, такая, что $\operatorname{supp} f \subset U$ и $f(\boldsymbol{x}) = 1$ при $\boldsymbol{x} \in K$. •

Теорема (*О разбиении единицы*). Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$ и $\{U_1, \ldots, U_m\}$ есть его открытое покрытие (т.е. все U_i — открытые множества в $\mathbb{R}^n$ и $K \subset \cup_{i=1}^m U_i$). Существует набор бесконечно дифференцируемых (класса C^∞) функций $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, таких, что

1) $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$;

2) $\sum_{i=1}^m f_i(\boldsymbol{x}) = 1$ для всех $\boldsymbol{x} \in K$;

3)$\sum_{i=1}^m f_i(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. •

Если выполняются условия (2) и (3), то набор функций $\{f_1, \ldots, f_m\}$ является *разбиением единицы* на K. Если выполнено еще и условие (1), то говорят, что разбиение единицы $\{f_1, \ldots, f_m\}$ подчинено покрытию $\{U_1, \ldots, U_m\}$.

Пусть M — компактное k-мерное многообразие, т.е. M является компактом в $\mathbb{R}^n$ и многообразием (с краем или без). Пусть $\{(U_1, \psi_1), \ldots, (U_m, \psi_m)\}$ есть атлас на M. То есть, $\{U_1, \ldots, U_m\}$ — открытое покрытие M, и каждое множество U_i есть область действия одной параметризации ψ_i. Пусть $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ — разбиение единицы на M, подчиненное покрытию $\{U_1, \ldots, U_m\}$. Тогда для любой дифференциальной формы ω на M справедливо представление: $\omega = \sum_{i=1}^m \varphi_i\, \omega$. Если ω — форма степени k, то положим

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^m \int_M \varphi_i\, \omega = \sum_{i=1}^m \int_{M \cap U_i} \varphi_i\, \omega.$$

Теорема (*Стокс*). Пусть M — компактное ориентируемое k-мерное многообразие и ω — дифференциальная $(k-1)$-форма на M. Тогда

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

При этом ориентации многообразия M и его края ∂M должны быть согласованы. •

Определение. Пусть M есть k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^3$. При $k=1$ интеграл от любой дифференциальной 1-формы по M называется *криволинейным интегралом второго рода*. При $k=2$ интеграл от любой дифференциальной 2-формы по M называется *поверхностным интегралом второго рода*. •

Определение. *Формой объема* в $\mathbb{R}^n$ называется n-форма, которая на векторах стандартного базиса принимает значение 1. •

Напомним, что стандартный базис в евклидовом пространстве — это любой ортонормированный базис. Например, в $\mathbb{R}^n$ с обычным скалярным произведение стандартным базисом является набор векторов $(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)$. Очевидно, что $\mathcal{V} = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ — это и есть форма объема в $\mathbb{R}^n$.

Пусть M есть $(n-1)$-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ — поле нормали на M. То есть, $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ есть единичный вектор, ортогональный к T_xM и непрерывно зависящий от $\boldsymbol{x}$.

Определение. *Формой объема на многообразии* M называется дифференциальная $(n-1)$-форма Ω, такая, что $\Omega_x(\boldsymbol{\xi}_1,\ldots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}) = \mathcal{V}(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\xi}_1,\ldots,\boldsymbol{\xi}_{n-1})$ для всех $\boldsymbol{\xi}_1,\ldots,\boldsymbol{\xi}_{n-1} \in T_xM$. •

Форму Ω можно определить и другим способом. Пусть $\{\boldsymbol{\xi}_1,\ldots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}\}$ — произвольный набор векторов из T_xM, а σ — параметр, равный $+1$, если репер $\{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\xi}_1,\ldots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}\}$ ориентирован одинаково со стандартным базисом в $\mathbb{R}^n$, и -1 — в противном случае. Обозначим через A $(n-1)\times n$ матрицу, составленную из координат векторов $\boldsymbol{\xi}_i$ в $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что

$$\Omega_x(\boldsymbol{\xi}_1,\ldots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}) = \sigma\sqrt{\det{(A\circ A^T)}}.$$

Матрица $G = A\circ A^T$ называется *матрицей Грама*. Несложно проверить, что ее компоненты имеют вид: $G_{ij} = \boldsymbol{\xi}_i\cdot\boldsymbol{\xi}_j$. Заметим, что матрица G симметрична и не зависит от выбора базиса.

Пусть на ориентируемом $(n-1)$-мерном многообразии M задана система параметризаций ψ с локальными координатами $(t^1,\ldots,t^{n-1})$. Тогда

$$\psi^*\Omega = \sqrt{\det\Psi}\,dt^1\wedge\cdots\wedge dt^{n-1},$$

где Ψ — матрица с компонентами

$$\Psi_{ij} = \frac{\partial\psi}{\partial t^i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t^j}.$$

Если M есть k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$, то определим на нем дифференциальную k-форму dS_k, такую, что

$$\psi^* dS_k = \sqrt{\det\Psi}\,dt^1\wedge\cdots\wedge dt^k,$$

где Ψ — определенная выше матрица. Заметим, что dS_k — это не дифференциал от S_k, а символ, обозначающий дифференциальную форму. Такое обозначение используется в силу традиции.

Определение. Площадью k-мерного многообразия M называется интеграл от формы dS_k по M. •

Определение. *Поверхностным интегралом 1-го рода* от функции f по ориентируемому k-мерному многообразию M называется интеграл от формы $f\,dS_k$ по M. При $k = 1$ говорят о *криволинейном интеграле 1-го рода.* •

§ 14.4. *Элементы теории векторных полей в* $\mathbb{R}^3$*.*

Определение. *Векторным полем* в $\mathbb{R}^n$ называется отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. То есть, каждой точке ставится в соответствие вектор. •

Точки в $\mathbb{R}^3$ будем обозначать $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, а в $\mathbb{R}^2$ — $\boldsymbol{r} = (x, y)$. Если $\boldsymbol{A}$ — векторное поле в $\mathbb{R}^3$, то его компоненты в декартовой системе координат будем обозначать (A_x, A_y, A_z).

Введем в $\mathbb{R}^3$ три дифференциальные формы:
1) каждой скалярной функции $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ поставим в соответствие дифференциальную 0-форму $(\omega^0_f)_r = f(\boldsymbol{r})$ и дифференциальную 3-форму $\omega^3_f = f\,dS_3$, где dS_3 — форма 3-мерного объема в $\mathbb{R}^3$;
2) каждому векторному полю $\boldsymbol{A}$ поставим в соответствие 1-форму $(\omega^1_A)_r(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\xi}$ и 2-форму $(\omega^2_A)_r(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{\xi}_1 \times \boldsymbol{\xi}_2)$, где $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi}_1$ и $\boldsymbol{\xi}_2$ — произвольные векторы из $\mathbb{R}^3$.

В декартовых координатах

$$
\begin{aligned}
\omega^1_A &= A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz, \\
\omega^2_A &= A_x\,dy \wedge dz + A_y\,dz \wedge dx + A_z\,dx \wedge dy, \\
\omega^3_f &= f\,dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned}
$$

Теорема.

$$\omega^1_A \wedge \omega^1_B = \omega^2_{A\times B}, \qquad \omega^1_A \wedge \omega^2_B = \omega^3_{A\cdot B}$$ •

Определение. *Градиентом* скалярной функции f называется векторное поле ∇f, такое, что $d\omega^0_f = \omega^1_{\nabla f}$. •

В декартовых координатах $\nabla f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$.

Определение. *Ротором* (или *вихрем*) векторного поля $\boldsymbol{A}$ называется векторное поле $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ (или $\operatorname{curl}\boldsymbol{A}$), такое, что $d\omega^1_A = \omega^2_{\operatorname{rot} A}$. •

В декартовых координатах

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad (\operatorname{rot}\boldsymbol{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad (\operatorname{rot}\boldsymbol{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Определение. *Дивергенцией* векторного поля $\boldsymbol{A}$ называется скалярное поле $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$, такое, что $d\omega^2_A = \omega^3_{\operatorname{div} A}$. •

В декартовых координатах $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \partial A_x/\partial x + \partial A_y/\partial y + \partial A_z/\partial z$.

Определения дивергенции и градиента имеют смысл и в $\mathbb{R}^n$. Градиент определяется совершенно аналогично $\mathbb{R}^3$ и в декартовых координатах имеет вид $\nabla f = (\partial f/\partial x^1, \dots, \partial f/\partial x^n)$. Для определения дивергенции введем еще одну форму, которая в декартовых координатах имеет вид $\omega_A^{n-1} = \sum_{i=1}^n A^i\, dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots dx^n$, где $\boldsymbol{A} = (A^1, \dots, A^n)$, «крышка» означает пропущенный сомножитель. Тогда $\omega^n_{\operatorname{div} A} := (\operatorname{div} \boldsymbol{A})\, dS_n = d\omega_A^{n-1}$. В декартовых координатах $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^n \partial A^i/\partial x^i$.

Утверждение.

$$\operatorname{rot}(f\boldsymbol{A}) = \nabla f \times \boldsymbol{A} + f \operatorname{rot} \boldsymbol{A},$$

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{A}) = \nabla f \cdot \boldsymbol{A} + f \operatorname{div} \boldsymbol{A},$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{B}. \qquad \bullet$$

Теорема (*Формула Ньютона — Лейбница*). Пусть M — кривая в $\mathbb{R}^3$, A и B — точки на M, $\boldsymbol{\tau}$ — единичный касательный вектор к M, задающий направление от A к B. Тогда

$$\int_M \nabla f \cdot \boldsymbol{\tau}\, dS_1 = f(B) - f(A). \qquad \bullet$$

Теорема (*Формула Грина*). Пусть G — область с гладкой границей в $\mathbb{R}^2$ и $\boldsymbol{A}$ — векторное поле в G. Тогда

$$\int_{\partial G} A_x\, dx + A_y\, dy = \int_G \Big(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\Big)\, dx \wedge dy.$$

При этом ориентации G и ∂G должны быть согласованы. Если граница ∂G ориентирована так, что положительным направлением обхода является обход против часовой стрелки, то

$$\int_{\partial G} A_x\, dx + A_y\, dy = \int_G \Big(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\Big)\, dxdy. \qquad \bullet$$

Пусть M — двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$ и $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ — вектор нормали к M. Причем, если $(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)$ — ориентирующий репер в касательном пространстве, то репер $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)$ ориентирован одинаково с базисным репером $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ пространства $\mathbb{R}^3$.

Лемма. Тогда для любой точки $\boldsymbol{a} \in M$ на T_aM справедливы формулы:

$$dS_2 = n_x\, dy \wedge dz + n_y\, dz \wedge dx + n_z\, dx \wedge dy,$$

$$n_x\, dS_2 = dy \wedge dz, \qquad n_y\, dS_2 = dz \wedge dx, \qquad n_z\, dS_2 = dx \wedge dy. \qquad \bullet$$

Теорема (*Векторная формула Стокса*). Пусть M — 2-мерное многообразие с краем в $\mathbb{R}^3$ и $\boldsymbol{A}$ — векторное поле в $\mathbb{R}^3$. Тогда

$$\int_M \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS_2 = \int_{\partial M} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dS_1,$$

причем, ориентации M и ∂M (т.е. $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$) согласованы. А именно, при движении вдоль ∂M в направлении вектора $\boldsymbol{\tau}$ мы по правилу буравчика получим направление вектора $\boldsymbol{n}$. $\bullet$

Интеграл $\int_M \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS_2$ называется *потоком векторного поля* $\boldsymbol{A}$ через M.

Интеграл $\int_{\partial M} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dS_1$ называется *циркуляцией векторного поля* $\boldsymbol{A}$ вдоль замкнутого контура ∂M.

Теорема (*Формула Гаусса — Остроградского*). Пусть G — область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей ∂G и $\boldsymbol{A}$ — векторное поле в $\mathbb{R}^3$. Тогда

$$\int_G \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dxdydz = \int_{\partial G} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS_2,$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор внешней нормали к ∂G. •

Формула Гаусса — Остроградского справедлива не только в $\mathbb{R}^3$, но и в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Векторное поле $\boldsymbol{u}$ в области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *потенциальным*, если существует функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$, такая, что $\boldsymbol{u} = \nabla\varphi$ в D. •

Заметим, что если $\boldsymbol{u} = \nabla\varphi$, то $\omega^1_{\boldsymbol{u}} = d\omega^0_\varphi$. Поэтому для потенциальности векторного поля $\boldsymbol{u}$ необходимо, чтобы $d\omega^1_{\boldsymbol{u}} = 0$. В декартовых координатах это условие может быть записано следующим образом:

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j} = \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \qquad \text{для всех} \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

или $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0$, если $n = 3$.

Непрерывное отображение $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ называется *путём*. Путь называется *замкнутым*, если $\gamma(0) = \gamma(1)$. Если отображение γ принадлежит классу C^k, то говорят о пути класса C^k.

Теорема. Для того, чтобы векторное поле $\boldsymbol{u} : D \to \mathbb{R}^n$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы его циркуляция по любому замкнутому пути $\gamma : [0, 1] \to D$, лежащему в D, была равна нулю:

$$\oint_\gamma \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dS_1 = 0.$$ •

Определение. Два замкнутых пути $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to D$ называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \to D$, называемое *гомотопией*, такое, что $\Gamma(0, t) = \gamma_1(t)$ и $\Gamma(1, t) = \gamma_2(t)$ для всех $t \in [0, 1]$. Говорят, что замкнутый путь *гомотопен точке*, если существует гомотопия, стягивающая его в точку. •

Определение. Область $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *односвязной*, если в ней любой замкнутый путь гомотопен точке. •

Теорема. Если D есть односвязная область, то необходимое условие потенциальности векторного поля $\boldsymbol{u} : D \to \mathbb{R}^n$ ($d\omega^1_{\boldsymbol{u}} = 0$) является и достаточным. •

Теорема. Для того, чтобы дифференциальная 1-форма, определенная в односвязной области, была точной, необходимо и достаточно, чтобы она была замкнутой. •

Определение. Векторное поле $\boldsymbol{a}$ называется *соленоидальным*, если $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$. Векторное поле $\boldsymbol{b}$ в $\mathbb{R}^3$ называется *векторным потенциалом* векторного поля $\boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{a} = \operatorname{rot} \boldsymbol{b}$. •

Согласно теореме Пуанкаре, если D — звездная область в $\mathbb{R}^3$, то любое соленоидальное векторное поле в D имеет векторный потенциал. Можно показать, что если D — область в $\mathbb{R}^3$, такая, что любая гомеоморфная сфере поверхность гомотопна в D точке, то любое соленоидальное векторное поле в D имеет векторный потенциал.