

**Е.М. РУДОЙ**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.  
ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ  
РЯДЫ**

НОВОСИБИРСК 2010



МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ГОУ ВПО «НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Е.М. Рудой**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.  
ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ  
РЯДЫ**

Утверждено Редакционно-издательским советом НГПУ  
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК 2010



УДК 517.37  
ББК В161.223  
Р835

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор  
Новосибирского государственного педагогического  
университета

*А.Е. Мамонтов;*

доктор физико-математических наук, профессор  
Новосибирского государственного университета

*В.Н. Старовойтов*

Р835 **Рудой, Е.М.**

Математический анализ. Числовые и функциональные ряды: учебное пособие / Е.М. Рудой. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2010. – 95 с.

Учебное пособие содержит теоретический и практический материал для занятий по теме «Числовые и функциональные ряды» по курсу «Математический анализ» для студентов, обучающихся на математическом факультете Новосибирского государственного педагогического университета по специальности «Информатика—математика».

**УДК 517.37**  
**ББК В161.223**

© Рудой Е.М., 2010

© ГОУ ВПО «Новосибирский государственный педагогический университет», 2010

Учебное пособие состоит из пяти глав, отражающих основные теоретические и практические аспекты университетского курса математического анализа по теме "Числовые и функциональные ряды", читаемого для студентов математического факультета Новосибирского государственного педагогического университета, обучающихся по специальности «информатика-математика».

Большинство задач, включенных в пособие, содержится в качестве упражнений и примеров в различных изданиях (см. список литературы). Часть примеров и задачи для контрольных работ составлены специально для настоящего издания. Сложные задачи помечены звездочкой.

Пособие будет полезно как студентам, обучающимся на математическом факультете, так и преподавателям для проведения семинарских занятий.

## 1. Числовые ряды

### 1.1. Понятие числового ряда

При изучении числовых последовательностей мы уже сталкивались с понятием числового ряда. Кроме того, известная из школьного курса математики бесконечная геометрическая прогрессия тоже является частным случаем числового ряда. В настоящей главе мы введем понятие числового ряда и изучим основные его свойства.

**Определение.** Пусть задана числовая последовательность  $\{a_n\}$ . Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

называется числовым рядом. Элементы последовательности  $\{a_n\}$  называются членами ряда (1).

**Замечание.** Бесконечная сумма (1) является лишь формальной записью, т.к. невозможно вычислить сумму бесконечного числа чисел путем сложения.

**Определение.** Сумма первых  $n$  слагаемых числового ряда (1) называется  $n$ -ой частичной суммой ряда (1) и обозначается  $S_n$ , т.е.

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ S_n &= a_1 + a_2 + \dots a_n. \end{aligned}$$

Таким образом, частичные суммы  $S_n$  ряда (1), где  $n = 1, 2, \dots$ , образуют последовательность  $\{S_n\}$ , которая называется последовательностью частичных сумм.

*Задача.* Дан общий член ряда

$$a_n = \frac{n^2}{2^n + 1}.$$

Написать первые четыре члена ряда.

*Решение.* Имеем  $a_1 = 1/3$ ,  $a_2 = 4/5$ ,  $a_3 = 1$ ,  $a_4 = 16/17$ . Таким образом, получаем, что ряд можно записать в виде

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{5} + 1 + \frac{16}{17} + \dots + \frac{n^2}{2^n + 1} + \dots$$

**Определение.** Числовой ряд (1) называется сходящимся, если существует число  $S$  — предел последовательности его частичных сумм. Этот предел называется суммой ряда. Таким образом, сумма ряда

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Кроме того, в этом случае пишут

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

**Определение.** Если последовательность частичных сумм ряда (1) не имеет конечного предела, то ряд называется расходящимся.

**Замечание.** Подчеркнем здесь, что введенное понятие суммы ряда является лишь одним из возможных понятий бесконечной суммы. Существуют другие определения суммы рядов. В настоящем курсе мы будем изучать данное как наиболее естественное.

**Замечание.** Очевидно, что справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned} a_1 &= S_1, \\ a_2 &= S_2 - S_1, \\ &\dots\dots\dots \\ a_n &= S_n - S_{n-1}. \end{aligned}$$

Это означает, что каждому ряду однозначно соответствует последовательность его частичных сумм и, наоборот, если задана последовательность частичных сумм, то всегда можно восстановить члены ряда. Таким образом, изучение сходимости числовых рядов равносильно изучению сходимости последовательностей.

Основной задачей в теории рядов является установление сходимости числового ряда. Зачастую даже не требуется находить его сумму.

Приведем примеры сходящихся и расходящихся рядов.

**Пример.** Ряд  $1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$  является расходящимся. Действительно,  $n$ -я частичная сумма ряда

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty.$$

**Пример.** Рассмотрим ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$$



Составим последовательность его частичных сумм  $\{S_n\}$

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, \dots, S_{2k} = 0, S_{2k+1} = 1, \dots$$

Как известно из теории числовых последовательностей заданная последовательность сходится тогда и только тогда, когда любая ее подпоследовательность сходится к одному и тому же числу. Подпоследовательность последовательности  $\{S_n\}$ , составленная из четных номеров, сходится к 0, а подпоследовательность, составленная из нечетных номеров — к 1. Следовательно, ряд расходится.

**Пример.** Исследуем сходимость ряда

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots,$$

где  $q \in \mathbb{R}$ . Частичная сумма  $S_n$  этого ряда — это сумма  $n$  первых членов геометрической прогрессии. Поэтому имеем

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{q - 1}.$$

Если  $|q| < 1$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$$

и, следовательно, сумма ряда

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}.$$

Если  $|q| > 1$ , то последовательность  $\{S_n\}$  расходится. При  $q = 1$   $n$ -я частичная сумма  $S_n$  равна  $n$ , следовательно, ряд расходится. Если  $q = -1$ , то получаем расходящийся ряд из предыдущего примера. Таким образом, ряд, составленный из членов геометрической прогрессии сходится при  $|q| < 1$  и расходится при  $|q| \geq 1$ .

*Задача.* По заданному общему члену ряда

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

записать ряд и найти его сумму.

*Решение.* Подставляя последовательно  $n = 1, 2, 3, \dots$ , получим ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Для нахождения суммы ряда рассмотрим последовательность его частичных сумм  $\{S_n\}$ , где

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

Так как

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

то  $S_n$  можно преобразовать следующим образом

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

В последней сумме все слагаемые попарно уничтожаются, кроме первого и последнего. Таким образом, получаем

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

откуда заключаем, что сумма ряда

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

### Упражнения.

1.1.1. По заданному общему члену ряда  $a_n$  найти первые четыре члена ряда и записать ряд, если

$$\text{а) } a_n = \frac{n}{10^n - 1}, \quad \text{б) } a_n = \sqrt{n!},$$

$$\text{в)} a_n = \frac{n!}{2^n}, \quad \text{г)} a_n = \frac{(-1)^n n}{n! + 1}.$$

1.1.2. Найти суммы следующих рядов:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}, \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

1.1.3\*. Найти суммы следующих рядов:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2},$$

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}.$$

1.1.4. Найти суммы следующих рядов или установить их расходимость:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}),$$

$$\text{б)}^* \sum_{n=1}^{\infty} nq^n, \quad |q| < 1, \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right),$$

$$\text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right).$$

## 1.2. Свойства числовых рядов

**Теорема 1.1** Пусть ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

сходятся, а  $S$  и  $T$  — их суммы. Тогда для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$

сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha S + \beta T.$$

**Доказательство.** Пусть

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^n b_k,$$

тогда, очевидно, что

$$\sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha S_n + \beta T_n. \quad (2)$$

Так как последовательности  $\{S_n\}$  и  $\{T_n\}$  сходятся, то

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \alpha S + \beta T. \end{aligned}$$

□

**Следствие.** Пусть задана последовательность  $\{a_n\}$  такая, что

$$a_n = b_n + c_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

расходится. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (4)$$

расходится.

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. ряд (4) сходится. Тогда из условия (3) следует, что  $c_n = a_n - b_n$ . Из теоремы 1.1 следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

сходится. Противоречие. Следовательно, ряд (4) расходится.

□

*Задача.* Найти сумму ряда

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} + \dots$$

*Решение.* Рассмотрим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии с показателем  $q = 1/2$ . Тогда  $n$ -ый член исходного ряда  $a_n$  равен  $\frac{1}{3} \cdot q^{n-1}$ . Так как сумма ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots,$$

составленного из членов геометрической прогрессии с показателем  $q = 1/2$ , равна 2, то сумма исходного ряда равна  $2/3$ .

*Задача.* Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^n + \frac{1}{2^n} \right).$$

*Решение.* Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

расходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

сходится, то исходный ряд расходится.

**Определение.** Пусть задан ряд (1). Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$$

называется  $n$ -ым остатком ряда (1). Если  $n$ -ый остаток ряда сходится, то его сумму обозначают  $r_n$ , т.е.

$$r_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} \equiv \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

**Теорема 1.2** Если числовой ряд (1) сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

**Доказательство.** Пусть ряд (1) сходится и  $S$  — его сумма, т.е.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

где  $\{S_n\}$  — последовательность частичных сумм. Пусть  $S_m^n$  —  $m$ -ая частичная сумма остатка ряда. Очевидно, что справедливо равенство

$$S_{n+m} = S_n + S_m^n. \quad (5)$$

Зафиксируем  $n$  и перейдем к пределу в (5) при  $m \rightarrow \infty$ . По условию теоремы ряд является сходящимся, следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{m+n} = S.$$

С другой стороны, по определению

$$r_n = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m^n.$$

Таким образом, получаем, что  $S = S_n + r_n$ . Устремляя  $n$  к бесконечности, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

□

**Теорема 1.3** (Необходимое условие сходимости ряда). Пусть числовой ряд (1) сходится. Тогда последовательность его членов  $\{a_n\}$  стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

**Доказательство.** Пусть  $S_n$  —  $n$ -ая частичная сумма ряда,  $S_{n-1}$  —  $(n-1)$ -ая частичная сумма ряда,  $S$  — сумма ряда. По условию теоремы ряд является сходящимся. Следовательно, существует предел последовательности  $\{S_n\}$  равный  $S$ . Так как последовательность  $\{S_n\}$  сходится, то и любая ее подпоследовательность сходится к тому же пределу, в том числе и подпоследовательность  $\{S_{n-1}\}$ . Из равенства  $a_n = S_n - S_{n-1}$  следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

□

В заключении параграфа сформулируем еще одно очевидное свойство рядов: отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость. При этом сумма полученного ряда отличается от суммы исходного на сумму выброшенных членов.

*Задача.* Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$$

*Решение.* Рассмотрим  $n$ -ый член ряда

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

и вычислим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Таким образом, заключаем, что исходный ряд расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости числового ряда.

*Задача.* Исследовать сходимость ряда

$$0,001 + \sqrt[2]{0,001} + \sqrt[3]{0,001} + \dots + \sqrt[n]{0,001} + \dots$$

*Решение.* Как известно для любого  $a > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1,$$

поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0,001} = 1.$$

Получили, что  $n$ -ый член ряда не стремится к нулю. Ряд расходится.

### Упражнения.

1.2.1. Найти сумму следующих рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{5^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \right), \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}},$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha}{q_1^{n-1}} + \frac{\beta}{q_2^n} \right), \text{ где } |q_1| > 1, |q_2| > 1.$$

1.2.2. Исследовать сходимость следующих рядов:

$$\text{а) } \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots + \frac{2n}{2n+1} + \dots,$$

$$\text{б) } 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + \dots,$$

$$\text{в) } \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}n}{n+1} + \dots,$$

$$\text{г) } 1, 1 - 1, 02 + 1, 003 - 1, 004 + \dots + (-1)^{n+1} \left( 1 + \frac{n}{10^n} \right) + \dots,$$

$$\text{д) } \cos 1 + \cos \frac{1}{2} + \dots + \cos \frac{1}{n} + \dots$$



1.2.3. Исследовать следующие ряды на сходимость:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^n + \frac{1}{n(n+1)} \right), \\ \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right). \end{aligned}$$

### 1.3. Критерий Коши сходимости числовых рядов

Сходимость числового ряда по определению это сходимость его последовательности частичных сумм. Поэтому из критерия Коши сходимости числовых последовательностей легко получить критерий сходимости числовых рядов.

**Теорема 1.4** (Критерий Коши). *Для сходимости числового ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа  $\varepsilon$  нашелся такой номер  $N$ , что для всех номеров  $n \geq N$  и для любого целого числа  $p \geq 0$  выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon. \quad (6)$$

Кратко это условие можно записать в следующем виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \forall p \geq 0 \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

**Доказательство.** По критерию Коши последовательность  $\{S_n\}$  сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \forall p \geq 0 |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

По определению частичной суммы имеем

$$S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + \dots + a_{n+p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k.$$

Из этого равенства следует условие (6).

□

**Пример.** Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

который называется гармоническим рядом. Используя критерий Коши, покажем, что он является расходящимся. Укажем такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что для любого натурального  $N$  существуют натуральные  $n \geq N$  и  $p > 0$  такие, что

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \right| \geq \varepsilon_0.$$

Это будет означать, что необходимое и достаточное условие сходимости числовых рядов для гармонического ряда не выполняется.

Действительно, если взять  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ ,  $n = N$ ,  $p = N$ , то будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} &= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N} > \\ &> \underbrace{\frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \dots + \frac{1}{2N}}_{N \text{ слагаемых}} = N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, гармонический ряд является расходящимся.

**Замечание.** Необходимое условие сходимости числовых рядов можно было доказать, используя критерий Коши. Действительно, если взять  $p = 1$ , то получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |a_{n+1}| < \varepsilon.$$

Это и означает, что последовательность  $\{a_n\}$  — бесконечно малая.

**Замечание.** Подчеркнем, что условие стремления к нулю последовательности членов ряда является необходимым. Например, как мы показали, гармонический ряд расходится, но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

В дальнейшем мы сформулируем и докажем ряд достаточных признаков сходимости рядов.

**Упражнения.**

1.3.1. Используя критерий Коши сходимости рядов, доказать расходимость следующих рядов:

а)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots,$

б)  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots,$

в)  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{4n-1} + \dots$

1.3.2. Доказать, что ряд

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \dots$$

сходится и найти его сумму.

1.3.3\*. Пользуясь критерием Коши, доказать, что ряд

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \text{ раз}} - \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \dots - \frac{1}{n}}_{n \text{ раз}} + \dots$$

расходится.

#### 1.4. Ряды с неотрицательными членами

В этом параграфе будем изучать числовые ряды, члены которых неотрицательны. Итак, пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (7)$$

у которого  $a_n \geq 0$  для всех  $n \geq 1$ . Рассмотрим последовательность его частичных сумм  $S_n$ :

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$$

.....

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n.$$

Так как все  $a_n$  неотрицательны, то

$$0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots$$

Таким образом, у числового ряда с неотрицательными членами последовательность частичных сумм является неубывающей.

**Теорема 1.5** *Числовой ряд с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.*

**Доказательство.** Утверждение теоремы непосредственно следует из критерия существования предела монотонной последовательности.

□

Далее мы сформулируем и докажем несколько достаточных признаков сходимости числовых рядов с неотрицательными членами. Все они будут основаны на сравнении исходного ряда с рядами, информация о сходимости которых уже известна. Такие признаки называются признаками сравнения.

**Теорема 1.6** (Признак сравнения). Пусть даны два ряда с неотрицательными членами — ряд (7) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad (8)$$

Пусть для всех  $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq b_n.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если ряд (8) сходится, то сходится и ряд (7);
2. Если ряд (7) расходится, то расходится и ряд (8).

**Доказательство.** Докажем первое утверждение теоремы. Пусть ряд (8) сходится. Пусть  $S_n, T_n$  —  $n$ -ые частичные суммы рядов (7), (8) соответственно, а  $T$  — сумма ряда (8). Так как последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами — неубывающая, то

$$T_n \leq T.$$

Следовательно, имеем

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k = T_n \leq T.$$

Таким образом, получаем, что последовательность частичных сумм  $S_n$  ряда (7) ограничена. Поэтому, ряд (7) сходится.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Пусть ряд (7) расходится. Значит последовательность его частичных сумм неограничена. Из неравенства  $S_n \leq T_n$  следует неограниченность последовательности  $\{T_n\}$ . Поэтому ряд (8) расходится.

□

*Задача.* Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

*Решение.* Имеем

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} > \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n},$$

но, как было доказано выше, гармонический ряд является расходящимся, следовательно, исходный ряд расходится.

*Задача.* Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

*Решение.* Воспользуемся признаком сравнения. Для этого оценим сверху  $n$ -ый член ряда:

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \quad \forall n \geq 2,$$

но, как мы доказали ранее, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

сходится. Следовательно, исходный ряд тоже сходится.

**Следствие.** (Признак сравнения в предельной форме) Пусть даны ряды (7) и (8) с неотрицательными членами. Пусть  $b_n > 0$  и существует конечный

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0. \quad (9)$$

Тогда ряды (7) и (8) сходятся или расходятся одновременно.

**Доказательство.** Так как  $L > 0$ , то по определению предела последовательности существует такой номер  $N_1$ , что для всех  $n \geq N_1$  выполняется неравенство

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \frac{L}{2}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2} \quad \forall n \geq N_1. \quad (10)$$

Из (10) следует

$$a_n < \frac{3L}{2} b_n \quad \forall n \geq N_1.$$

Поэтому, по признаку сравнения из сходимости ряда (8) получаем сходимость ряда (7); из расходимости ряда (7) получаем расходимость ряда (8). Отметим, что здесь мы воспользовались тем, что отбрасывание конечного числа (в нашем случае  $N_1$ ) членов ряда не влияет на его сходимость.

С другой стороны, так как  $L > 0$  и  $b_n > 0$ , то начиная с некоторого номера  $N_2$  все члены последовательности отличны от нуля. Тогда, выбирая  $N = \max(N_1, N_2)$ , будем иметь

$$\frac{2}{3L} < \frac{b_n}{a_n} < \frac{2}{L} \quad \text{для всех } n \geq N.$$

По признаку сравнения получаем, что из сходимости ряда (7) следует сходимость ряда (8); из расходимости ряда (8) следует расходимость ряда (7).

□

**Замечание.** Если  $L = 0$ , то из сходимости ряда (8) следует сходимость ряда (7); из расходимости ряда (7) следует расходимость ряда (8).

*Задача.* В зависимости от параметра  $\alpha > 0$  исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 + \alpha^n}.$$

*Решение.* Пусть  $0 < \alpha < 1$ , тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \alpha^n} = \frac{1}{2},$$

т.е. не выполняется необходимое условие сходимости рядов. То же самое и в случае  $\alpha = 1$ . Пусть теперь  $\alpha > 1$ , тогда

$$\frac{1}{2 + \alpha^n} < \frac{1}{\alpha^n}.$$

Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n}$$

сходится (как ряд, составленный из членов геометрической прогрессии с показателем  $q = 1/\alpha < 1$ ), поэтому по признаку сравнения сходится и исходный ряд.

*Задача.* Для  $\alpha \leq 1$  исследовать сходимость обобщенного гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

*Решение.* Очевидно, что для всех  $\alpha \leq 1$  и всех натуральных  $n$  справедливо неравенство

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}.$$

Как мы уже доказали, гармонический ряд расходится. Следовательно, по признаку сравнения обобщенный гармонический ряд с показателем  $\alpha \leq 1$  тоже будет расходиться.

**Замечание.** В дальнейшем мы докажем, что для показателя  $\alpha > 1$  обобщенный гармонический ряд будет сходиться.

*Задача.* Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}.$$

*Решение.* Воспользуемся признаком сравнения в предельной форме. Для этого рассмотрим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



Так как гармонический ряд расходится, то исходный ряд тоже будет расходиться.

*Задача.* Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 4 \cdot (-1)^n}{3^{n+2}}.$$

*Решение.* Для всех натуральных  $n$  выполняется неравенство

$$0 < \frac{5 + 4 \cdot (-1)^n}{3^{n+1}} \leq \frac{5 + 4}{3^{n+2}} \leq \frac{1}{3^n}.$$

Таким образом, из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

следует сходимость исходного ряда.

*Задача.* Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \right).$$

*Решение.* Вычислим предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

Несложно проверить, что выполнены все условия правила Лопиталя. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{3},$$

откуда из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

(т.к.  $\frac{1}{n^3} < \frac{1}{n^2}$ ) следует сходимость исходного ряда.

*Задача.* Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + n^2}{3^n + \ln n}.$$

*Решение.* Сравним исходный ряд с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n,$$

который является сходящимся, т.к.  $e < 3$ . Вычислим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n + n^2}{3^n + \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{n^2}{e^n}}{1 + \frac{\ln n}{3^n}} = 1.$$

Следовательно, исходный ряд сходится.

**Теорема 1.7** Пусть даны два ряда (7) и (8) с положительными членами, т.е.  $a_n > 0$ ,  $b_n > 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Пусть справедливо неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

Тогда из сходимости ряда (8) следует сходимость ряда (7); из расходимости ряда (7) следует расходимость ряда (8).

**Доказательство.** Выпишем цепочку из  $(n-1)$  неравенств вида (11)

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1},$$
$$\frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

и перемножим их (мы это можем сделать, т.к. все  $a_n$  и  $b_n$  — строго положительны). В результате получим

$$\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1}.$$

Отсюда и признака сравнения следует утверждение теоремы.  
□

Далее мы сформулируем и докажем ряд признаков сходимости, основанных на сравнении исходного ряда с рядом, составленным из членов геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n,$$

который сходится при  $|q| < 1$  и расходится при  $|q| \geq 1$ . Далее мы будем рассматривать положительные  $q$ .

**Теорема 1.8** (Признак Даламбера). *Пусть дан ряд (7). Если для всех  $n \in \mathbb{N}$  справедливо неравенство*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1, \tag{12}$$

*то ряд (7) сходится. Если для всех  $n \in \mathbb{N}$  справедливо неравенство*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \tag{13}$$

*то ряд (7) расходится.*

**Доказательство.** Пусть справедливо неравенство (12) с  $q < 1$ . Рассмотрим ряд (8) с  $b_n = q^n$ . Тогда (12) можно переписать в следующем виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q = \frac{q^{n+1}}{q^n} \equiv \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Так как  $q < 1$ , то по теореме 1.7 ряд (7) сходится.

Пусть теперь выполняется (13). Рассмотрим ряд (8) с  $b_n = 1$ . Тогда неравенство (13) можно переписать в следующем виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Отсюда и из теоремы 1.7 следует, что ряд (7) расходится.

□

**Замечание.** Условие (12) нельзя заменить условием

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Действительно, для гармонического ряда имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$$

для всех натуральных  $n$ , но ряд расходится.

**Замечание.** Как уже отмечалось выше, отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость. Поэтому если неравенства (12) и (13) выполняются не для всех номеров  $n$ , а начиная с некоторого  $N$ , то утверждение теоремы остается в силе.

*Задача.* Пользуясь признаком Даламбера, исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

*Решение.* Имеем

$$a_n = \frac{3^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!},$$

поэтому

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1} \cdot n!}{3^n \cdot (n+1)!} = \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4} < 1$$

для всех  $n \geq 3$ . Следовательно, по признаку Даламбера ряд сходится.

*Задача.* Доказать расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}.$$

*Решение.* Имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! \cdot 10^n}{10^{n+1} \cdot n!} = \frac{n+1}{10} \geq 1$$

для всех  $n \geq 9$ , поэтому по признаку Даламбера ряд расходится.

**Теорема 1.9** (Признак Даламбера в предельной форме). Пусть дан ряд (7). Пусть существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L. \quad (14)$$

Тогда при  $L < 1$  ряд (7) сходится; при  $L > 1$  — расходится.

**Доказательство.** Пусть предел (14) существует и  $L < 1$ . Тогда, начиная с некоторого номера  $N$ , справедливо неравенство

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \frac{1-L}{2}, \quad \forall n \geq N,$$

откуда следует

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1+L}{2} < 1 \quad \forall n \geq N.$$

По признаку Даламбера ряд сходится.

Пусть теперь  $L > 1$ . Тогда, начиная с некоторого номера  $N$ , справедливо неравенство

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < L - 1, \quad \forall n \geq N,$$

откуда следует

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \forall n \geq N.$$

По признаку Даламбера ряд расходится.

□

**Замечание.** Отметим, что признак Даламбера применим только в случаях, когда  $L \neq 1$ . Если же  $L = 1$ , то исследуемый ряд может как сходиться, так и расходиться. Например, для гармонического ряда (известно, что он расходится)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Вместе с тем, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

*Задача.* Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

*Решение.* Воспользуемся признаком Даламбера в предельной форме. Итак, имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}3^n n!} = \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$$

и, следовательно, ряд расходится.

*Задача.* Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}.$$

*Решение.* Здесь  $a_n = \frac{n}{5^n}$ ,  $a_{n+1} = \frac{n+1}{5^{n+1}}$ , поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 5^n}{n \cdot 5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5(n+1)} = \frac{1}{5} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

*Задача.* Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

*Решение.* Выпишем отношение  $(n+1)$ -го члена ряда к  $n$ -му:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{((n+1)!)^2 \cdot (2n)!}{(n!)^2 \cdot (2(n+1))!} = \frac{(n!)^2 (n+1)^2 \cdot (2n)!}{(n!)^2 \cdot (2n)!(2n+1)(2n+2)} = \\ &= \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4} < 1.$$

Поэтому, ряд сходится.

**Теорема 1.10** (Признак Коши). Пусть дан ряд (7). Если для всех  $n \in \mathbb{N}$  справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1, \quad (15)$$

то ряд (7) сходится. Если для всех  $n \in \mathbb{N}$  справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1, \quad (16)$$

то ряд (7) расходится.

**Доказательство.** Пусть  $q < 1$ , положим  $b_n = q^n$ . Тогда из (15) следует, что

$$a_n \leq b_n,$$

и по признаку сравнения ряд (7) сходится.

Пусть теперь справедливо неравенство (16). Тогда  $a_n \geq 1$ , следовательно,  $n$ -ый член ряда не может стремиться к нулю. Ряд расходится.

□

**Замечание.** Если условие (15) справедливо, начиная с некоторого номера  $N$ , то признак Коши сходимости числовых рядов остается в силе.

**Замечание.** Условие (15) нельзя заменить условием

$$\sqrt[n]{a_n} < 1.$$

Например, для гармонического ряда

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1,$$

но, как известно, он расходится.

*Задача.* Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}.$$

*Решение.* Воспользуемся признаком Коши:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \frac{1}{\ln n} < \frac{1}{2} < 1$$

для всех  $n \geq 9$ . Поэтому ряд сходится.

*Задача.* Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{3n+1} \right)^n.$$

*Решение.* Имеем

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left( \frac{n}{3n+1} \right)^n} = \frac{n}{3n+1} < \frac{n}{3n} = \frac{1}{3} < 1,$$



и, следовательно, ряд сходится.

*Задача.* Исследовать следующий ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n.$$

*Решение.* Рассмотрим

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \leq \frac{2 + 1}{5 - 1} = \frac{3}{4} < 1,$$

откуда следует, что ряд сходится.

**Теорема 1.11** (Признак Коши в предельной форме). Пусть дан ряд (7). Пусть существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L. \quad (17)$$

Тогда при  $L < 1$  ряд (7) сходится; при  $L > 1$  — расходится.

**Доказательство.** Доказательство аналогично доказательству признака Даламбера в предельной форме. Для этого достаточно лишь в рассуждениях заменить  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  на  $\sqrt[n]{a_n}$ .

□

**Замечание.** В случае, когда  $L = 1$ , исследование сходимости ряда требует применения других методов.

*Задача.* Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$$

*Решение.* Для данного ряда имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \cdot \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{3} < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд сходится.

*Задача.* Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{1000}}.$$

*Решение.* Известно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{1000}} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right)^{1000} = 1$$

и, следовательно, для данного ряда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n^{1000}}} = 2 > 1.$$

Таким образом, заключаем, что ряд расходится.

**Теорема 1.12** (Интегральный признак сходимости). Пусть функция  $f(x)$  неотрицательна и не возрастает всюду на полуинтервале  $[1, +\infty)$ . Тогда числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \dots \quad (18)$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x) dx. \quad (19)$$

**Доказательство.** Возьмем произвольное натуральное число  $n \geq 2$ , а  $x$  — любое число из отрезка  $[n-1, n]$ . По условию теоремы функция  $f(x)$  — невозрастающая. Поэтому справедливы неравенства

$$f(n) \leq f(x) \leq f(n-1) \quad \forall n \geq 2.$$

Так как функция  $f(x)$  — неотрицательна и монотонна для всех  $x \geq 1$ , то она ограничена. А из ограниченности и монотонности функции следует ее интегрируемость на отрезке  $[n-1, n]$ . Имеют место неравенства

$$\int_{n-1}^n f(n)dx \leq \int_{n-1}^n f(x)dx \leq \int_{n-1}^n f(n-1)dx,$$

откуда следует

$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x)dx \leq f(n-1) \quad \forall n \geq 1.$$

Выпишем цепочку неравенств, последовательно подставляя  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$f(2) \leq \int_1^2 f(x)dx \leq f(1),$$

$$f(3) \leq \int_2^3 f(x)dx \leq f(2),$$

.....

$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x)dx \leq f(n-1).$$

Сложим эти неравенства и воспользуемся аддитивностью определенного интеграла. В результате получим

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k). \quad (20)$$

Пусть  $S_n$  —  $n$ -я частичная сумма ряда (18), т.е.

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k).$$

Кроме того, положим

$$a_n = \int_1^n f(x) dx.$$

Тогда (20) можно переписать в следующем виде

$$S_n - f(1) \leq a_n \leq S_{n-1}. \quad (21)$$

Из (21) легко следует утверждение теоремы. Действительно, т.к.  $f(x) \geq 0$  для всех  $x \geq 1$ , то последовательность  $\{a_n\}$  — неотрицательна. Поэтому для ее сходимости (что, фактически, означает сходимость несобственного интеграла (19)) необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена. Кроме того, для сходимости ряда (18) — ряда с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность  $\{S_n\}$  его частичных сумм была ограничена.

Из (21) следует, что последовательность  $\{a_n\}$  ограничена тогда и только тогда, когда ограничена последовательность  $\{S_n\}$ .  
□

**Пример.** Используя доказанную теорему легко показать, что обобщенный гармонический ряд с показателем  $\alpha > 1$  сходится. Действительно, известно, что несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится при  $\alpha > 1$ , и расходится при  $\alpha \leq 1$ . Таким образом, обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

сходится при  $\alpha > 1$ , и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

**Замечание.** Отметим, что сумма числового ряда (18) в общем случае не совпадает со значением несобственного интеграла (19).

*Задача.* Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}. \quad (22)$$

*Решение.* Применим интегральный признак сходимости. Для этого рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x},$$

который по определению равен

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \ln \ln x \Big|_{x=2}^{x=A} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \ln A - \ln \ln 2.$$

Последний, в свою очередь, не существует. Следовательно, ряд (22) расходится.

### **Упражнения.**

1.4.1. Используя признак сравнения, исследовать сходимость следующих рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{(n^2+1)}}, \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n},$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{n}, \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n(2n+1)},$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{\sqrt{n^5}}, \quad \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+10000}.$$

1.4.2\*. Используя признак сравнения, доказать сходимость следующих рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n^2}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin 3^n|}{3^n},$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1 - \cos n}, \quad \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}, \\ \text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 - 2}, \quad \text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \left(\frac{1}{n} + 1\right)}{n}. \end{aligned}$$

1.4.3. Используя признак сравнения в предельной форме, исследовать сходимость следующих рядов:

$$\begin{aligned} \text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{3^n - 1}, \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2 + 2}{n^2}\right), \\ \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^2}, \quad \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}, \\ \text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{1}{n} + 1\right), \quad \text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

1.4.4. Исследовать сходимость следующих рядов:

$$\begin{aligned} \text{а)}^* \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \text{б)}^* \sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^2, \\ \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right), \quad \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 3^n}; \\ \text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 - 100000}{n^5 + 1000000}, \quad \text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4 + (-1)^n)^n}{7^n}. \end{aligned}$$

1.4.5. Используя признак Даламбера, исследовать сходимость следующих рядов:

$$\begin{aligned} \text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}, \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}, \\ \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}, \quad \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!}, \end{aligned}$$

$$д)* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \sin \frac{\pi}{2^n}}{n!}, \quad е)* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{n2^{n+1}},$$

где

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n),$$

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1).$$

1.4.6. Используя признак Коши, исследовать сходимость следующих рядов:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5 + (-1)^n)^n}{4^n}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{5n+2} \right)^n,$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2 - (-1)^n}{5 + (-1)^n} \right)^n, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 1} \right)^n.$$

1.4.7. Используя признак Коши в предельной форме, исследовать сходимость следующих рядов:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n,$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{2^n},$$

$$д) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n^2 + 1}{3n^2 - 1} \right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n^2 + 2n + 1}{5n^2 + 3n + 9} \right)^n.$$

1.4.8. Используя интегральный признак сходимости, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$а) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}},$$

$$в)* \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}.$$

1.4.9. Используя различные признаки сходимости, исследовать сходимость знакоположительных рядов:

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{2n+5}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \\
 & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}, \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \\
 & \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n}, \quad \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n - 4^n}, \\
 & \text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}, \quad \text{з) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{(4 + \frac{1}{n})^n}, \\
 & \text{и) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n + n}, \quad \text{к) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}, \\
 & \text{л) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (3n+4)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n+3)}, \\
 & \text{м) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n^2}}{e^n}, \quad \text{н) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}, \\
 & \text{о) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2} \sqrt{n}}, \quad \text{п) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \ln n}{n \ln n}.
 \end{aligned}$$

## 1.5. Абсолютно и условно сходящиеся ряды

В этом параграфе изучим ряды, члены которых могут быть любого знака.

**Определение.** Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{23}$$



называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (24)$$

**Замечание.** В определении абсолютно сходящегося ряда не сказано, что он должен сходиться. Тем не менее, справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.13** *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*  
**Доказательство.** Нам надо доказать, что из сходимости ряда (24) следует сходимость ряда (23). Действительно, в силу критерия Коши имеем: для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$  такой, что для всех  $n \geq N$  и для всех  $p \geq 0$  справедливо неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

Из неравенства

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$$

следует, что критерий Коши справедлив и для ряда (23).

□

**Определение.** Ряд (23) называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд (24) расходится.

*Задача.* Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}$$

сходится абсолютно при  $\alpha > 1$ .

*Решение.* Из неравенства

$$\left| \frac{\sin n}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}, \quad \forall n \geq 1,$$

и признака сравнения следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^\alpha} \right|$$

сходится. Следовательно, исходный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}$$

будет сходиться абсолютно.

*Задача.* Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \tag{25}$$

сходится условно.

*Решение.* Заметим, что ряд, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда, совпадает с гармоническим рядом, который, как известно, расходится. Следовательно, ряд (25) не сходится абсолютно. Покажем, что он сходится. Действительно, по формуле Маклорена для функции  $\ln(1+x)$  имеем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

где  $R_{n+1}(x)$  — остаточный член. В форме Лагранжа

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Отсюда следует, что для всех  $x \in [0, 1]$  имеет место оценка

$$R_{n+1}(x) \leq \frac{1}{n+1}.$$

Таким образом, получаем

$$|S_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+1},$$

где  $S_n$  —  $n$ -я частичная сумма ряда (25). Это означает, что ряд (25) сходится, а его сумма равна  $\ln 2$ . Мы показали, что ряд (25) сходится условно.

**Определение.** Пусть задана последовательность  $\{p_n\}$ , у которой  $p_n \geq 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Ряд вида

$$p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} p_n \quad (26)$$

называется знакоперевающимся рядом.

Установим достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.

**Теорема 1.14** (Лейбниц). *Если последовательность  $\{p_n\}$  монотонно стремится к нулю, то ряд (26) сходится.*

**Доказательство.** Пусть  $\{S_n\}$  —  $n$ -я частичная сумма ряда (26). Рассмотрим подпоследовательность  $S_{2k}$ . Сгруппируем слагаемые в  $S_{2k}$  следующим образом

$$S_{2k} = (p_1 - p_2) + (p_3 - p_4) + \dots + (p_{2k-1} - p_{2k}).$$

В силу монотонности последовательности  $\{p_n\}$  каждое из слагаемых в последнем равенстве неотрицательно. Следовательно, последовательность  $\{S_{2k}\}$  неубывающая.

С другой стороны, имеем

$$S_{2k} = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5) - \dots - (p_{2k-2} - p_{2k-1}) - p_{2k} \leq p_1.$$

Таким образом, получаем, что последовательность  $\{S_{2k}\}$  не убывает и ограничена сверху. Следовательно, она имеет предел. Обозначим его через  $S$ . Далее, имеем  $S_{2k-1} = S_{2k} - p_{2k}$ . Так как  $p_{2k} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то  $S_{2k-1} \rightarrow S$  при  $k \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что последовательность  $\{S_n\}$  сходится к  $S$ , т.е. ряд (26) сходится.

□

*Задача.* Используя признак Лейбница, доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

сходится.

*Решение.* Проверим, что данный ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Действительно, ряд является знакоперевающимся, составленным из последовательности  $\{p_n\}$ , где

$$p_n = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

которая монотонно стремится к нулю.

*Задача.* Исследовать следующий ряд на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n - \ln n}.$$

*Решение.* Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n - \ln n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \ln n}$$

и сравним его с гармоническим рядом, воспользовавшись признаком сравнения в предельной форме. Итак, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n - \ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{\ln n}{n}} = 1$$

откуда следует, что ряд не сходится абсолютно.

Исследуем ряд на сходимость. Покажем, что последовательность  $\{p_n\}$ , где

$$p_n = \frac{1}{n - \ln n}$$

монотонно убывает. Для этого рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{x - \ln x},$$

определенную на полуинтервале  $[1, +\infty)$  и найдем ее производную:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x - \ln x)^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{x - 1}{(x - \ln x)^2}.$$

Видно, что  $f'(x) < 0$  для всех  $x > 1$ . Следовательно, функция  $f(x)$  монотонно убывает. Поэтому последовательность  $p_n$  тоже убывает. По признаку Лейбница ряд сходится. Таким образом, ряд сходится условно.

В заключение сформулируем две теоремы, характеризующие отличие условно и абсолютно сходящихся рядов.

**Теорема 1.15** (Коши). *Если данный ряд сходится абсолютно, то любой ряд, составленный из членов исходного, взятых в любом порядке, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму, что и исходный.*

**Теорема 1.16** (Риман). *Если данный ряд сходится условно, то для любого действительного числа  $S$  можно переставить члены исходного ряда так, что сумма полученного ряда будет равна  $S$ .*

Теорема Римана показывает, что одно из основных свойств действительных чисел — коммутативность конечного числа слагаемых — не переносится на бесконечные суммы, т.е. на ряды.

С другой стороны, теорема Коши показывает, что среди рядов можно выделить отдельный класс — абсолютно сходящиеся ряды, для которых справедлив коммутативный закон сложения.

И, наконец, отметим, что ассоциативный закон сложения справедлив для любых сходящихся рядов. Если же ряд расходится, то это утверждение не верно. Например, ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$$

расходится, а ряды

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1) + \dots,$$

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots - (1 - 1) - \dots,$$

полученные из исходного путем расставления скобок, сходятся. При этом сумма первого равна 0, а второго 1.

### Упражнения.

1.5.1. Используя признак сходимости Лейбница, доказать сходимость следующих рядов:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^2+n+1}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}, \\ \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n}, \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n^2-n+1)}. \end{aligned}$$

1.5.2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n^2+1)}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n, \\ \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+10)}, \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[n]{e}-1), \\ \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^3 - \sin^2 n}, \quad \text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n. \end{aligned}$$

## 2. Функциональные ряды

В этой главе мы изучим функциональные последовательности и ряды, членами которых являются не числа, а некоторые функции, определенные на некотором фиксированном множестве.

### 2.1. Функциональные последовательности

Пусть  $X$  — некоторое числовое множество, т.е.  $X \subset \mathbb{R}$ . Для каждого натурального  $n$  поставим в соответствие некоторую функ-

цию  $f_n(x)$ , определенную на множестве  $X$ . В результате получим функциональную последовательность

$$\{f_n(x)\}. \quad (27)$$

При этом

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

называются элементами функциональной последовательности, а множество  $X$  — ее областью определения.

**Пример.** 1)  $f_n(x) = x^n$ ,  $x \in [0, 1]$ ; 2)  $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Определение.** Пусть точка  $x_0$  принадлежит множеству области определения функциональной последовательности (27). Говорят, что функциональная последовательность (27) сходится в точке  $x_0$ , если числовая последовательность  $\{f(x_0)\}$  сходится.

**Определение.** Множество точек  $x_0 \in X$ , в которых сходится данная функциональная последовательность, называется областью сходимости этой последовательности.

**Замечание.** Область сходимости может не совпадать с областью определения функциональной последовательности. Действительно, рассмотрим  $f_n(x) = x^n$ ,  $x \in [-1, 1]$ . Для любой точки  $x_0 \in (-1, 1]$  числовая последовательность  $\{x_0^n\}$  сходится. В точке  $x_0 = -1$  последовательность  $\{(-1)^n\}$  расходится. Значит, область сходимости будет полуинтервал  $(-1, 1]$ .

Далее будем рассматривать функциональные последовательности, у которых область сходимости и область определения совпадают.

**Определение.** Функция  $f(x)$ , определенная на множестве  $X$  называется пределом (или поточечным пределом) последовательности (27), если

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$$

для всех  $x_0 \in X$ .

**Пример.** 1. Пусть  $f_n(x) = x^n$ ,  $x \in [0, 1]$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

2. Пусть

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = 0$$

для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

3. Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0, & x \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Заметим, что в рассмотренных примерах все функции  $f_n(x)$  — непрерывны, а предельная функция может оказаться и разрывной (в 1 и 3 случаях). В дальнейшем мы установим ряд достаточных условий, при которых предельные функции последовательностей и рядов будут сохранять свои свойства: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость. Для этого мы введем новое понятие — понятие равномерной сходимости.

**Определение.** Функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}$  называется равномерно сходящейся к функции  $f(x)$  на множестве  $X$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$ , что для всех точек  $x \in X$  и для всех номеров  $n \geq N$  выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Если последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится к  $f(x)$  равномерно на множестве  $X$ , то в этом случае пишут

$$f_n \xrightarrow{X} f \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

**Замечание.** Если последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится равномерно к функции  $f(x)$  на множестве  $X$ , то она сходится и поточечно для каждой точки  $x$  из  $X$ . Обратное в общем случае



не верно, т.е. из сходимости последовательности функций в для каждой точки  $x \in X$  не следует равномерная сходимость последовательности. Действительно, как известно, последовательность  $\{f_n(x)\}$ , где

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1]$$

сходится к

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

в каждой точке отрезка  $[0, 1]$ . Покажем, что равномерной сходимости нет. Для этого укажем число  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для всех  $N$  можно найти такой номер  $n \geq N$  и такую точку  $x \in [0, 1]$ , что будет выполняться неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0.$$

Действительно, если взять  $\varepsilon_0 = 1/4$  и для любого натурального  $N$  положить  $n = N$  и взять точку  $x_N = 1 - 1/N \in [0, 1]$ , то будем иметь

$$|f_N(x_N) - f(x_N)| = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N.$$

Известно, что числовая последовательность

$$\left\{ \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N \right\}$$

является возрастающей, следовательно,

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right)^N \geq \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

для всех натуральных  $N \geq 2$ .

Запишем определения поточечной и равномерной сходимости последовательности функций в символической форме:

*поточечная сходимость*:  $f_n \rightarrow f$

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

равномерная сходимость:  $f_n \xrightarrow{X} f$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, если последовательность функций сходится поточечно на множестве  $X$ , то для каждой точки  $x$  из  $X$  существует, вообще говоря, свой номер  $N = N(\varepsilon, x)$  (т.е.  $N$  зависит и от  $\varepsilon$ , и от  $x$ ) такой, что начиная с него, выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (28)$$

Если же последовательность сходится равномерно на множестве  $X$ , то номер  $N$ , начиная с которого выполняется неравенство (28) не зависит от выбора точки  $x \in X$ , т.е. неравенство (28) выполняется для всех  $x \in X$  и для всех  $n \geq N$ .

**Теорема 2.1** *Последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится равномерно на множестве  $X$  к функции  $f(x)$  тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0. \quad (29)$$

**Доказательство.** Пусть последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится равномерно к  $f(x)$  на множестве  $X$ , тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим

$$\alpha_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|.$$

Тогда из свойств точной верхней грани следует, что

$$\alpha_n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом, получили, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти такой номер  $N$ , начиная с которого выполняется неравенство

$\alpha_n < \varepsilon$ , где  $n \geq N$ . Это означает, что числовая последовательность  $\{\alpha_n\}$  стремится к нулю.

Пусть теперь выполнено (29), т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : \alpha_n < \varepsilon.$$

Так как

$$\alpha_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|,$$

то

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \quad \forall x \in X.$$

Таким образом, получили

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n < \varepsilon,$$

то есть последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится равномерно к  $f(x)$  на множестве  $X$ .

□

**Следствие.** Пусть

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \tag{30}$$

для всех  $x \in X$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \tag{31}$$

Тогда последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится равномерно к  $f(x)$  на множестве  $X$ .

**Доказательство.** Так как неравенство (30) выполняется для всех  $x \in X$ , то

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq a_n.$$

Тогда из условия (31) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

□

**Пример.** Рассмотрим функциональную последовательность  $\{f_n(x)\}$ , где

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Для каждого фиксированного  $x_0 \in X$  числовая последовательность  $\{f_n(x_0)\}$  сходится к нулю. Покажем, что  $\{f_n(x)\}$  сходится к  $f(x) = 0$  равномерно на  $\mathbb{R}$ . Действительно, имеем

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx^2}{1 + n^2x^2} \right| < \frac{nx^2}{n^2x^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

В заключение параграфа докажем критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей.

**Теорема 2.2** (критерий Коши). *Функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится равномерно на множестве  $X$  к некоторой функции тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти такой номер  $N$ , что для всех  $x \in X$ , для всех  $n \geq N$  и для всех  $p = 1, 2, \dots$  выполняется неравенство*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Кратко последнее условие можно записать так:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall x \in X \forall n \geq N \forall p \geq 1 : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \quad (32)$$

**Доказательство.** Докажем необходимость. Пусть последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится равномерно к  $f(x)$ , т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти номер  $N$  такой, что для всех  $n \geq N$  и для всех  $x \in X$  выполнено

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как  $n + p > n$  при  $p \geq 1$ , то для всех  $x \in X$ , для всех  $n \geq N$  и для всех  $p \geq 1$  имеем

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В результате получим, что для всех  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$  такой, что для всех  $x \in X$ , для всех  $n \geq N$  и для всех  $p \geq 1$  выполнено

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= |f_{n+p}(x) - f(x) - (f_n(x) - f(x))| \leq \\ &\leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |(f_n(x) - f(x))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Теперь докажем достаточность. Пусть выполнено условие (32). Возьмем произвольную точку  $x_0 \in X$ . Тогда получаем, что числовая последовательность  $\{f_n(x_0)\}$  удовлетворяет условию Коши, а значит имеет предел. Обозначим его через  $f(x_0)$  и покажем, что функция  $f(x)$  есть равномерный предел функциональной последовательности  $\{f_n(x)\}$ . Неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

справедливо для всех  $p \geq 1$  и для всех  $x \in X$ . Устремив  $p$  к  $\infty$  в этом неравенстве, получим

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X.$$

Таким образом, получаем, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$  такой, что для всех  $n \geq N$  и для всех  $x \in X$  выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

что и означает равномерную сходимость на множестве  $X$  последовательности  $\{f_n(x)\}$ .

□

## 2.2. Функциональные ряды

**Определение.** Пусть на множестве  $X$  задана функциональная последовательность  $\{u_n(x)\}$ ,  $x \in X$ . Пусть  $x_0 \in X$  — произвольная фиксированная точка. Тогда мы можем составить числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0).$$

Совокупность всех таких рядов называется функциональным рядом, определенным на множестве  $X$ , и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \quad (33)$$

Функции  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  называются членами функционального ряда (33).

**Определение.** Функция

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), \quad x \in X \quad (34)$$

называется  $n$ -ой частичной суммой функционального ряда (33).

**Определение.** Ряд (33) называется сходящимся поточечно на множестве  $X$ , если функциональная последовательность его частичных сумм  $S_n(x)$  сходится в каждой точке множества  $X$ . В этом случае будем писать

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in X.$$

**Определение.** Множество всех точек  $x \in X$  называется областью сходимости функционального ряда (33).

**Замечание.** Область сходимости может не совпадать со множеством  $X$ , на котором определены функции  $u_n(x)$  – члены функционального ряда.

**Пример.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n.$$

Функции  $u_n(x) = (-x)^n$  определены на всей числовой прямой  $\mathbb{R}$ , но, как известно, ряд составленный из членов геометрической сходитсся тогда и только тогда, когда  $|x| < 1$ .

*Задача.* Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}.$$

*Решение.* Для всех  $x \in \mathbb{R}$  имеем  $u_n(x) > 0$ , поэтому можно воспользоваться признаком Коши сходимости числовых рядов. Зафиксируем точку  $x$  и рассмотрим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{-nx}} = e^{-x}.$$

При  $x > 0$  значение предела строго меньше 1; при  $x < 0$  — строго больше 1. Следовательно, для всех  $x > 0$  ряд сходится; для всех  $x < 0$  — расходится. Рассмотрим точку  $x = 0$ . В результате получим ряд

$$1 + 1 + \dots + 1 + \dots,$$

который расходится. Таким образом, область сходимости функционального ряда есть интервал  $(0, +\infty)$ .

*Задача.* Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

*Решение.* Во-первых, заметим, что при  $x = -1$  функции — члены функционального ряда не определены. Обозначим

$$y = \frac{1-x}{1+x},$$

тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^n$$

представляет собой ряд, составленный из членов геометрической прогрессии, про который известно, что он сходится только при  $|y| < 1$ . Решая неравенство

$$\left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1,$$

закключаем, что область сходимости исходного функционального ряда есть интервал  $(0, +\infty)$ .

**Определение.** Функциональный ряд (33) называется равномерно сходящимся на множестве  $X$  к сумме  $S(x)$ , если последовательность его частичных сумм  $\{S_n(x)\}$  сходится равномерно к  $S(x)$  на множестве  $X$ .

*Задача.* Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

на множествах: а)  $[-1/2, 1/2]$ ; б)  $(-1, 1)$ .

*Решение.* Рассмотрим  $n$ -ую частичную сумму ряда :

$$S_n(x) = |1 + x + x^2 + \dots + x^n| = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Для каждого фиксированного  $x \in (-1, 1)$  (и, тем более, для  $x \in [-1/2, 1/2]$ ) последовательность  $\{S_n(x)\}$  сходится к

$$S(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

Рассмотрим

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{1}{1 - x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1 - x}.$$

В случае а) будем иметь

$$|S_n(x) - S(x)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-1/2, 1/2]} |S_n(x) - S(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$



Это означает, что последовательность частичных сумм ряда сходится равномерно на множестве  $[-1/2, 1/2]$ , т.е. ряд сходится равномерно к  $S(x)$  на отрезке  $[-1/2, 1/2]$ .

В случае б) имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} = +\infty,$$

следовательно,

$$\sup_{x \in (-1, 1)} |S_n(x) - S(x)| = +\infty.$$

Поэтому последовательность частичных сумм  $\{S_n(x)\}$  не сходится равномерно на интервале  $(-1, 1)$ , т.е. исходный ряд не сходится равномерно на  $(-1, 1)$ .

**Теорема 2.3** (Критерий Коши равномерной сходимости ряда). *Ряд (33) сходится равномерно на множестве  $X$  тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $N$ , что для всех  $n \geq N$ , для всех натуральных  $p \geq 1$  и для всех  $x \in X$  выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon. \quad (35)$$

**Доказательство.** Пусть  $S_n(x)$  — частичные суммы ряда (33). Тогда критерий Коши равномерной сходимости ряда следует из равенства

$$u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x) = S_{n+p}(x) - S_n(x)$$

и критерия Коши равномерной сходимости последовательностей.  $\square$

**Теорема 2.4** (Необходимое условие равномерной сходимости ряда). *Если функциональный ряд (33) равномерно сходится на множестве  $X$ , то последовательной его членов равномерно сходится к  $u(x) = 0$ ,  $x \in X$ .*

**Доказательство.** Действительно, имеем

$$u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x),$$

где  $\{S_n(x)\}$  — последовательность частичных сумм ряда (33). Пусть последовательность частичных сумм  $\{S_n(x)\}$  равномерно сходится к  $S(x)$  на множестве  $X$ . Тогда и последовательность  $\{S_{n-1}(x)\}$  равномерно сходится к  $S(x)$  на множестве  $X$ . Отсюда получаем, что  $u_n$  сходится к  $u(x)$  равномерно на  $X$ .

□

**Теорема 2.5** (Признак Вейерштрасса). Пусть числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0, \quad (36)$$

сходится. Пусть для всех  $x \in X$  и для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$|u_n(x)| \leq a_n. \quad (37)$$

Тогда функциональный ряд (33) сходится равномерно на множестве  $X$ .

**Доказательство.** Так как числовой ряд (36) сходится, то для него справедлив критерий Коши сходимости числовых рядов: для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$ , что для всех  $n \geq N$  и для всех  $p \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon. \quad (38)$$

Из (37) и следующей цепочки неравенств:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon,$$

справедливой для всех  $x \in X$ , в силу критерия Коши равномерной сходимости рядов следует равномерная сходимость ряда (33).

□

*Замечание.* Признак Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости функциональных рядов.

*Задача.* Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + x^2}$$

сходится равномерно на всей числовой оси.

*Решение.* Для всех  $x \in \mathbb{R}$  имеем

$$\frac{1}{n^3 + x^2} \leq \frac{1}{n^3}.$$

В силу того, что числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

сходится, то по признаку Вейерштрасса исходный функциональный ряд сходится равномерно на  $\mathbb{R}$ .

*Задача.* Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{n^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Решение.* Имеют место следующие оценки:

$$\left| \sin \frac{x}{n} \right| \leq \frac{|x|}{n}, \quad \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n|x|}$$

для всех  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Следовательно,

$$\left| \frac{\sin \frac{x}{n}}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

поэтому исходный функциональный ряд сходится равномерно на  $\mathbb{R}$ .

### 2.3. Непрерывность суммы равномерно сходящихся рядов

Пусть дан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in X \subset \mathbb{R}. \quad (39)$$

**Теорема 2.6** Пусть ряд (39) равномерно сходится на множестве  $X$  к  $S(x)$ . Пусть для каждого  $n \geq 1$  существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = b_n,$$

где  $x_0$  — предельная точка множества  $X$ . Тогда функция  $S(x)$  имеет предел в точке  $x_0$  и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

**Замечание.** Последнее равенство означает, что можно переходить к пределу под знаком суммы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x),$$

т.е. «предел суммы равен сумме пределов».

**Доказательство.** Прежде всего докажем, что числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (40)$$

сходится, т.к. в условиях теоремы об этом ничего не сказано. Применим признак Коши к функциональному ряду (39): для любого  $\varepsilon > 0$  существует натуральное число  $N$ , что для всех натуральных  $n \geq N$ , для всех натуральных  $p \geq 1$  и для всех  $x \in X$  выполняется неравенство

$$|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как в последнем неравенстве под знаком модуля стоит конечная сумма, то мы можем перейти к пределу при  $x \rightarrow x_0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| &= \left| \lim_{x \rightarrow x_0} u_{n+1}(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} u_{n+p}(x) \right| \equiv \\ &\equiv |b_{n+1} + \dots + b_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Это означает, что для числового ряда (40) справедлив критерий Коши сходимости числовых рядов, т.е. ряд (40) сходится.

Теперь возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$  и зафиксируем его. Так как ряд числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

сходится, а функциональный

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

сходится равномерно на  $X$ , то существует натуральное число  $N$  такое, что

$$\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k(x) \right|$$

для всех  $x \in X$ .

Далее, в силу того, что предел конечной суммы равен сумме пределов слагаемых, то существует такая окрестность  $U(x_0)$  точки  $x_0$ , что

$$\left| \sum_{k=1}^N u_k(x) - \sum_{k=1}^N b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех  $x \in U(x_0) \cap X$ .

Рассмотрим следующую цепочку равенств и неравенств:

$$\left| S(x) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| = \left| \left[ \sum_{k=1}^N u_k(x) - \sum_{k=1}^N b_k \right] + \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \sum_{k=1}^N u_k(x) - \sum_{k=1}^N b_k \right| + \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k(x) \right| + \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k \right| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, получили, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такая окрестность  $U(x_0)$  точки  $x_0$ , что для всех  $x \in U(x_0) \cap X$  выполняется неравенство

$$\left| S(x) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| < \varepsilon.$$

Это означает, что предел функции  $S(x)$  в точке  $x_0$  существует и равен сумме ряда (40).

□

**Следствие.** Пусть ряд (39) равномерно сходится на множестве  $X$  к  $S(x)$ . Пусть функции  $u_n(x)$  непрерывны в точке  $x_0 \in X$  для каждого  $n \geq 1$ . Тогда сумма  $S(x)$  ряда (39) непрерывна в точке  $x_0$ .

**Доказательство.** Так как функции  $u_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , непрерывны в точке  $x_0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = u_n(x_0), \quad n \geq 1.$$

По теореме о предельном переходе имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = S(x_0), \end{aligned}$$

т.е. функция  $S(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ .

□

**Теорема 2.7** Пусть функции  $u_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , непрерывны на множестве  $X$ . Пусть ряд (39) сходится равномерно на множестве  $X$ . Тогда сумма  $S(x)$  ряда (39) непрерывна на  $X$ .

*Задача.* Доказать, что функция

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{n^2 + x^4}$$

непрерывна на всей числовой оси.

*Решение.* Имеем для всех  $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{\operatorname{arctg} x}{n^2 + x^4} \right| \leq \frac{\pi}{2n^2},$$

следовательно, ряд сходится равномерно на  $\mathbb{R}$ . Кроме того, члены ряда являются непрерывными на  $\mathbb{R}$  функциями. Таким образом, из теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда заключаем, что  $S(x)$  — непрерывна на всей числовой оси.

## 2.4. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных рядов

В этом параграфе сформулируем и докажем достаточные условия, позволяющие почленно дифференцировать и интегрировать функциональные ряды.

Будем считать, что множество  $X$  есть отрезок  $[a, b]$  числовой прямой.

**Теорема 2.8** Пусть ряд (39) сходится равномерно на отрезке  $[a, b]$  к своей сумме  $S(x)$ . Пусть функции  $u_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , непрерывны на  $[a, b]$ . Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(t) dt \tag{41}$$

сходится и справедливо равенство

$$\int_a^b S(t)dt \equiv \int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_a^b u_n(t)dt \right). \quad (42)$$

**Доказательство.** Сначала заметим, что функция  $S(x)$  является интегрируемой на отрезке  $[a, b]$ . Действительно, т.к. функции  $u_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , непрерывны на  $[a, b]$ , а ряд (39) сходится равномерно на  $[a, b]$ , то сумма  $S(x)$  — непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция, и значит, она интегрируема на этом отрезке.

Пусть  $S_n(x)$  —  $n$ -ая частичная сумма ряда (39). Так как ряд (39) сходится равномерно к  $S(x)$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует натуральное  $N$  такое, что для всех  $n \geq N$  и для всех  $x \in [a, b]$  имеет место неравенство

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и оценим

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b S_n(x)dx - \int_a^b S(x)dx \right| &= \left| \int_a^b (S_n(x) - S(x))dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |S_n(x) - S(x)|dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)dx,$$

т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx.$$



□

**Следствие.** Если функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}$  непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций сходится к функции  $f(x)$  равномерно на  $[a, b]$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx. \quad (43)$$

**Замечание.** Условие равномерной сходимости является существенным условием. Действительно, рассмотрим следующую последовательность непрерывных функций:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}], \\ -n^2 x + 2n, & x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0, & x \in (\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

определенных на отрезке  $[0, 1]$ . Для любой точки  $x \in [0, 1]$  имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

и, следовательно, интеграл от предельной функции по отрезку  $[0, 1]$  равен нулю. Но, в то же время, интеграл от  $f_n(x)$  по отрезку  $[0, 1]$  равен единицы для любого натурального  $n \geq 1$ . Поэтому равенство (43) в этом случае неверно. Это связано с тем, что последовательность  $\{f_n(x)\}$  не сходится равномерно на множестве  $[0, 1]$ .

Сформулируем без доказательства теоремы о почленном дифференцировании рядов и последовательностей.

**Теорема 2.9** Пусть функции  $u_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , непрерывны вместе со своими производными  $u'_n(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \quad (44)$$

сходится равномерно на  $[a, b]$ . Пусть, кроме того, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (45)$$

сходится хотя бы в одной точке  $x_0 \in [a, b]$ . Тогда ряд (45) сходится равномерно на отрезке  $[a, b]$ , его сумма

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

является дифференцируемой функцией и

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x),$$

т.е. справедливо равенство

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

**Теорема 2.10** Пусть задана последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[a, b]$  функций  $f_n(x)$ . Пусть последовательность их производных  $f'_n(x)$  сходится к некоторой функции  $\varphi(x)$  равномерно на отрезке  $[a, b]$ . Пусть, кроме того, последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится в некоторой точке  $x_0 \in [a, b]$ . Тогда последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится равномерно на  $[a, b]$  к некоторой функции  $f(x)$  и  $f'(x) = \varphi(x)$  для всех  $x \in [a, b]$ .

**Пример.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad x > 1. \quad (46)$$

Как известно из теории числовых рядов, ряд, стоящий в правой части равенства (46) сходится при  $x > 1$ .

Составим ряд из производных

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x} \quad (47)$$

и зафиксируем  $a > 1$ . Тогда по признаку Вейерштрасса получаем, что ряды (46) и (47) сходятся равномерно на  $[a, +\infty)$ . Следовательно, для любого  $x > a$  справедливо равенство

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \right)' = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x},$$

а поскольку  $a > 1$  выбирается произвольно, то последнее равенство справедливо для всех  $x > 1$ .

*Задача.* Для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + x^2}$$

проверить теорему о почленном интегрировании равномерно сходящихся рядов на отрезке  $[0, x]$ .

*Решение.* Каждый из членов данного функционального ряда является непрерывной на всей числовой оси. Кроме того, из оценки

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

для всех  $x \in \mathbb{R}$  следует его равномерная сходимость. Таким образом, заключаем, что данный функциональный ряд можно почленно интегрировать на отрезке  $[0, x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , т.е. справедливо равенство

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\cos nx}{n^2 + x^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\cos nx}{n^2 + x^2} dx.$$

*Задача.* Можно ли к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n\sqrt{n}}$$

применить теорему о почленном дифференцировании?

*Решение.* Все члены ряда  $u_n(x)$  являются непрерывными функциями, и их производные

$$u'_n(x) = \frac{n\sqrt{n}}{x^2 + n^3}$$

тоже непрерывны для всех натуральных  $n$ . Кроме того, справедлива следующая оценка:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{x^2 + n^3} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

для всех  $x \in \mathbb{R}$ . Следовательно, ряд составленный из производных  $u'_n(x)$  сходится равномерно на  $\mathbb{R}$ . Наконец, исходный ряд в точке  $x = 0$  сходится, т.к. все его члены равны нулю в этой точке.

Таким образом, заключаем, что к исходному функциональному ряду применима теорема о почленном дифференцировании, и имеет место равенство

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n\sqrt{n}} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{x^2 + n^3}$$

для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

### **Упражнения.**

2.4.1. Найти область сходимости следующих функциональных рядов:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx^2}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 + x^2)},$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \left( \frac{2x+1}{x+2} \right)^n, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 + x^4},$$

$$д) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3x+1}{x^2 + 3x + 2} \right)^n.$$

2.4.2. Исследовать равномерную сходимость ряда на множестве  $E$ :

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nx}}, \quad E = [0, 1], \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 2^n}, \quad E = [-2, 2],$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}, \quad E = (-\infty, +\infty),$$

$$г)* \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-xn}, \quad E = [0, +\infty).$$

2.4.3. Исследовать непрерывность следующих функций на указанных промежутках:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^x}{n!}, \quad x \in [-1, 1],$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{x}{n}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$г)* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

2.4.4. Можно ли применить теорему о почленном интегрировании на промежутке  $[-a, a]$ ,  $a > 0$ , к указанным рядам

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n^2}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} x e^{-nx} \sin nx,$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^4 + x^2}.$$

2.4.5. Можно ли применить теорему о почленном дифференцировании к указанным рядам

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} n(x^2 + 1)^n, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}.$$

### 3. Степенные ряды

Одним из важных частных случаев функциональных рядов являются степенные ряды. Они используются во многих приложениях, в частности, для приближенного вычисления значений функций.

#### 3.1. Радиус сходимости степенных рядов

**Определение.** Функциональный ряд вида

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (48)$$

называется степенным рядом. Числа  $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{R}$  называются коэффициентами степенного ряда (48).

Выясним, как устроена область сходимости степенных рядов. Сразу можно заметить, что при  $x = 0$  степенной ряд (48) сходится.

**Теорема 3.1** (Коши-Адамар). Рассмотрим последовательность

$$\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}_{n=1}^{\infty}. \quad (49)$$

Справедливы следующие утверждения:

1. Если последовательность (49) неограничена, то ряд (48) сходится только при  $x = 0$ .

2. Если последовательность (49) ограничена и имеет верхний предел  $L > 0$ , то ряд (48) сходится абсолютно для всех  $x$  таких, что  $|x| < 1/L$  и расходится для всех  $x$  таких, что  $|x| > 1/L$ .

3. Если последовательность (49) ограничена и ее верхний предел равен 0, то ряд (48) сходится абсолютно для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

**Доказательство.** 1. Возьмем число  $x$  отличное от нуля и зафиксируем его. Так как последовательность (49) неограничена,

то последовательность

$$\left\{ |x| \sqrt[n]{|a_n|} \right\}_{n=1}^{\infty} \equiv \left\{ \sqrt[n]{|a_n x^n|} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

так же будет неограничена. В этом случае нарушается необходимое условие сходимости числовых рядов ( $n$ -ый член ряд не стремится к нулю). Следовательно, ряд (48) расходится.

2. Пусть последовательность (49) ограничена и ее верхний предел равен  $L > 0$ . Зафиксируем  $x$  такое, что  $|x| < 1/L$ . Тогда найдется такое число  $\delta > 0$ , что

$$|x| < \frac{1}{L + \delta}.$$

В силу свойств верхнего предела числовой последовательности существует  $N \in \mathbb{N}$  такое, что

$$\sqrt[n]{|a_n|} < L + \frac{\delta}{2}$$

для всех  $n \geq N$ . Таким образом, получаем, что начиная с номера  $N$  справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{L + \frac{\delta}{2}}{L + \delta} < 1.$$

Следовательно, по теореме Коши о сходимости числовых рядов ряд (48) будет сходиться абсолютно.

Пусть теперь  $x$  такое, что  $|x| > 1/L$ . Покажем, что в этом случае ряд (48) расходится. Так как  $|x| > 1/L$ , то существует  $\delta > 0$  такое, что

$$|x| > \frac{1}{L - \delta} > 0.$$

По определению верхнего предела существует подпоследовательность

$$\left\{ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{n_k}|} = L.$$

Следовательно, начиная с некоторого номера  $K$ , для всех оставшихся членов подпоследовательности справедливо неравенство

$$L - \delta < \sqrt[k]{|a_{n_k}|} < L + \delta.$$

Таким образом, получаем, что для всех  $k \geq K$  верно неравенство

$$\sqrt[k]{|a_{n_k} x^{n_k}|} = |x| \sqrt[k]{|a_{n_k}|} > \frac{L - \delta}{L - \delta} = 1.$$

Это означает, что не выполняется необходимое условие сходимости числовых рядов и, следовательно, степенной ряд (48) расходится.

3. Пусть последовательность (49) ограничена и ее верхний предел  $L = 0$ . Это означает, что последовательность (49) сходится и ее предел есть 0. Возьмем произвольное  $x \in \mathbb{R}$  отличное от нуля и зафиксируем его. Так как последовательность (49) сходится к нулю, то начиная с некоторого номера  $N$  все оставшиеся члены этой последовательности будут меньше, чем  $1/(|x|)$ , т.е.

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x|} \quad \forall n \geq N.$$

Отсюда получаем, что

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2} < 1.$$

Поэтому по теореме Коши сходимости числовых рядов степенной ряд (48) сходится абсолютно для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

□

Доказанная теорема приводит к следующему фундаментальному утверждению.

**Теорема 3.2** Для каждого степенного ряда (48), если он не является рядом, сходящимся лишь в точке  $x = 0$ , существует



число  $R > 0$ ,  $R \in \overline{\mathbb{R}}$  такое, что ряд (48) сходится абсолютно для всех  $x \in \{x \mid |x| < R\}$  и расходится для всех  $x \in \{x \mid |x| > R\}$ . При этом справедлива следующая формула:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (50)$$

**Замечание.** В случае, когда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0,$$

считаем, что  $R = \infty$ , т.е. степенной ряд сходится на всей числовой оси.

**Определение.** Число  $R$  называется радиусом сходимости, а интервал  $(-R, R)$  — интервалом сходимости степенного ряда (48).

*Задача.* Найти радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

*Решение.* Воспользуемся формулой (50):

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Следовательно, радиус сходимости  $R = e^{-1}$ .

**Замечание.** Для точек  $x = R$  или  $x = -R$  сходимость каждого степенного ряда нужно исследовать отдельно, т.к. существуют степенные ряды как сходящиеся, так и расходящиеся в этих точках.

**Пример.** Рассмотрим ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Очевидно, что его радиус сходимости равен 1. При  $x = 1$  и при  $x = -1$  ряд расходится.

**Пример.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Найдем его радиус сходимости  $R$ :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Следовательно,  $R = 1$ . При  $x = -1$  получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

который, как известно, сходится. При  $x = 1$  получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который расходится.

**Пример.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Очевидно, что его радиус сходимости равен 1. По признаку сравнения при  $x = \pm 1$  ряд сходится абсолютно.

*Задача.* Определить радиус, интервал сходимости и выяснить поведение на концах интервала сходимости следующего ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}.$$

*Решение.* Из формулы (50) следует, что радиус сходимости равен

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = 2.$$

Поэтому интервал  $(-2, 2)$  есть интервал сходимости. Исследуем поведение ряда в точках  $x = 2$  и  $x = -2$ . При  $x = 2$  получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = 1 + 1 + \dots,$$

который расходится. При  $x = -1$  тоже получаем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

В заключении параграфа приведем еще одну формулу для вычисления радиуса сходимости степенных рядов. Из теории числовых последовательностей известно, что если для некоторой последовательности  $\{a_n\}$  существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (51)$$

то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

и справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Поэтому в этом случае

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (52)$$

Отметим, что если предел (51) не существует, то радиус сходимости необходимо вычислять по формуле (50).

*Задача.* Определить множество сходимости следующего ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n(n+1)(n+2)}.$$

*Решение.* Сделаем замену переменной  $y = x + 1$ . В результате получим степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{2^n(n+1)(n+2)}. \quad (53)$$

Его радиус сходимости вычислим по формуле (52):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{2^{n+1}(n+2)(n+3)}{2^n(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+3)}{n+1} = 2.$$

Поэтому  $(-2, 2)$  — его интервал сходимости. Исследуем сходимость в точках  $y = 2$  и  $y = -2$ . При  $y = 2$  имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

а при  $y = -2$  — ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)},$$

которые сходятся. Следовательно, ряд (53) сходится на множестве  $-2 \leq y \leq 2$ . Поэтому исходный ряд сходится при значениях  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $-2 \leq x + 1 \leq 2$ , что равносильно  $-3 \leq x \leq 1$ . Таким образом, множество сходимости исходного ряда есть отрезок  $[-3, 1]$ .

**Упражнения.**

3.1.1. Определить радиус сходимости и интервал сходимости следующих рядов:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, & \text{б)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n, \\ \text{в)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n!}, & \text{г)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^{n-1}}. \end{aligned}$$

3.1.2\*. Определить радиус сходимости и интервал сходимости следующих рядов:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}, & \text{б)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n^n}, \\ \text{в)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \frac{x^{3n}}{3^n}, & \text{г)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n. \end{aligned}$$

3.1.3. Определить радиус, интервал сходимости и выяснить поведение следующих рядов на концах интервала сходимости:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} n x^n, & \text{б)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} x)^n, \\ \text{в)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}, & \text{г)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n x^n. \end{aligned}$$

## 3.2. Непрерывность суммы степенного ряда

Покажем, что степенной ряд (48) является непрерывной функцией на своем интервале сходимости.

**Лемма.** Пусть  $R$  — радиус сходимости степенного ряда (48). Тогда для любого  $r$  такого, что  $0 < r < R$  степенной ряд (48) сходится равномерно на множестве  $[-r, r]$ .

**Доказательство.** В силу теоремы Коши-Адамара ряд (48) сходится абсолютно при  $x = r$ . Из теоремы Вейерштрасса следует равномерная сходимость степенного ряда (48) на отрезке  $[-r, r]$ .

□

**Теорема 3.3** Сумма степенного ряда (48) является непрерывной функцией на интервале сходимости  $(-R, R)$ .

**Доказательство.** Пусть точка  $x_0$  принадлежит  $(-R, R)$ . Тогда существует  $\delta > 0$  такое, что  $|x_0| + \delta < R$ . Тогда в силу предыдущей леммы, степенной ряд (48) сходится равномерно на отрезке  $[-|x_0| - \delta, |x_0| + \delta]$ .

Далее, так как  $x^n$  — непрерывная функция на отрезке  $[-|x_0| - \delta, |x_0| + \delta]$  для всех натуральных  $n \geq 1$ , то сумма степенного ряда (48) непрерывна на  $[-|x_0| - \delta, |x_0| + \delta]$  и, в том числе, в точке  $x_0$ . Так как точка  $x_0$  — произвольная точка интервала  $(-R, R)$ , то заключаем, что сумма степенного ряда непрерывна на  $(-R, R)$ .

□

### 3.3. Почленное интегрирование степенных рядов

**Теорема 3.4** Пусть  $R$  — радиус сходимости степенного ряда (48). Пусть  $x$  произвольная точка интервала  $(-R, R)$ . Тогда ряд (48) можно почленно интегрировать на отрезке  $[0, x]$ . При этом полученный почленным интегрированием ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный.

**Доказательство.** Так как  $x$  принадлежит интервалу  $(-R, R)$ , то найдется такое число  $r > 0$ , что  $|x| < r < R$ . Ряд (48) сходится равномерно на  $[-r, r]$  и, следовательно, сходится равномерно и на  $[0, x]$ . Тогда по теореме о почленном интегрировании функциональных рядов ряд (48) можно проинтегрировать почленно. В результате этого получим степенной ряд

$$a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \dots \quad (54)$$

Найдем радиус сходимости  $R_1$  ряда (54). По формуле (50) получим

$$\frac{1}{R_1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}}. \quad (55)$$

Так как

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R},$$

то существует подпоследовательность  $\{a_{n_k}\}$  такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \frac{1}{R}.$$

Имеем

$$\sqrt[n]{|a_{n-1}|} = \frac{\sqrt[n-1]{|a_{n-1}|}}{\left(\sqrt[n-1]{|a_{n-1}|}\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Возьмем подпоследовательность номеров  $\{n_k\}$  и рассмотрим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}}{\left(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\right)^{\frac{1}{n_k+1}}} = \frac{1}{R}.$$

Это означает, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n-1}|} = \frac{1}{R}.$$

Учитывая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

из (55) окончательно получаем  $R_1 = R$ .

□

### 3.4. Почленное дифференцирование степенных рядов

**Теорема 3.5** Степенной ряд (48) можно почленно дифференцировать в любой точке интервала сходимости. При этом полученный почленным дифференцированием ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный.

**Доказательство.** Покажем, что степенной ряд удовлетворяет теореме о почленном дифференцировании функциональных рядов. Рассмотрим ряд, составленный из производных членов ряда (48):

$$a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \quad (56)$$

Ряд (56) — степенной ряд. Найдем его радиус сходимости:

$$\frac{1}{R_1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \frac{1}{R}.$$

Таким образом, получили, что радиус сходимости ряда (56) совпадает с радиусом сходимости исходного ряда.

Пусть точка  $x$  такая, что  $|x| < R$ . Тогда существует  $r$ :  $|x| < r < R$  и ряд (56) сходится равномерно на  $[-r, r]$ . Кроме того, степенной ряд (48) сходится при  $x = 0$ . Следовательно, по теореме о почленном дифференцировании функциональных рядов получаем, что

$$(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots)' = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

□

**Следствие.** Степенной ряд внутри интервала сходимости можно дифференцировать любое количество раз (в этом случае говорят, что ряд дифференцируем бесконечное число раз). Ряд, полученный  $k$ -кратным почленным дифференцированием имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

*Задача.* Найти сумму ряда

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

*Решение.* Радиус сходимости данного ряда равен

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1.$$



Поэтому мы можем почленно интегрировать его на отрезке  $[0, x]$ , где  $x \in (-1, 1)$ . Обозначим через  $S(x)$  его сумму, тогда

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t) dt &= \int_0^x 1 \cdot dt + \int_0^x 2t dt + \int_0^x 3t^2 dt + \dots + \int_0^x nt^{n-1} dt + \dots = \\ &= x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \end{aligned}$$

Известно, что сумма геометрической прогрессии

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x},$$

поэтому

$$\int_0^x S(t) dt = x + x^2 + x^3 + \dots + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x} - 1.$$

Отсюда следует, что

$$S(x) = \frac{d}{dx} \left( \int_0^x S(t) dt \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

т.е.

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

### Упражнения.

3.4.1. Найти суммы следующих рядов:

а)  $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots,$

б)  $\frac{1}{2} + \frac{2x}{2^2} + \frac{3x}{2^3} + \dots + \frac{nx^{n-1}}{2^n} + \dots,$

в)  $\frac{x^2}{2 \cdot 5} + \frac{x^3}{3 \cdot 5^2} + \frac{x^4}{4 \cdot 5^3} + \dots + \frac{x^n}{n \cdot 5^{n-1}} + \dots,$

г)  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \dots + n(n+1)x^{n-1} + \dots,$

д)\*  $-2x + 4x^3 - 6x^5 + \dots + (-1)^n 2nx^{2n-1} + \dots$

## 4. Ряды Тейлора

Возможность почленного дифференцирования и интегрирования степенных рядов в области определения, а также их относительная простота делают степенные ряды незаменимыми как в теоретических, так и в практических исследованиях.

### 4.1. Разложение функций в степенной ряд

**Определение.** Говорят, что функция  $f(x)$  может быть разложена в степенной ряд на множестве  $X$ , если существует степенной ряд, сходящийся в каждой точке  $x$  множества  $X$  к  $f(x)$ .

**Замечание.** Если функция может быть разложена в степенной ряд, то эта функция бесконечно дифференцируема. Это утверждение непосредственно следует из теоремы о дифференцируемости степенного ряда.

**Теорема 4.1** Если функция  $f(x)$  может быть разложена в степенной ряд, то такое разложение единственно.

**Доказательство.** Пусть функция  $f(x)$  может быть разложена в степенной ряд на некотором интервале  $(-R, R)$ , т.е.

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots, \quad \forall x \in (-R, R). \quad (57)$$

Степенной ряд, стоящий в правой части (57) дифференцируем бесконечное число раз. Следовательно, дифференцируя равенство (57)  $n$  раз, получим

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + \frac{(n+1)!}{1!}x + \frac{(n+2)!}{2!}x^2 + \dots$$

Отсюда при  $x = 0$  найдем

$$f^{(n)}(0) = n! a_n$$

или

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \quad (58)$$

Следовательно, коэффициенты степенного ряда (57) однозначно определяются по формуле (58).

□

**Определение.** Степенной ряд вида

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

называется рядом Тейлора функции  $f(x)$ .

**Замечание.** Из последней теоремы непосредственно следует, что если функция  $f(x)$  может быть разложена в степенной ряд на интервале  $(-R, R)$ , то этот ряд является рядом Тейлора.

В заключении параграфа приведем пример бесконечно дифференцируемой функции в точке  $x = 0$ , которая не может быть разложена в ряд Тейлора ни в одной окрестности точки  $x = 0$ .

**Пример.** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Вычислим производные функции  $f(x)$  в произвольной точке  $x$  отличной от нуля:

$$f'(x) = \frac{2}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Не сложно показать по индукции, что

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad (59)$$

где  $P_n(t)$  — некоторый многочлен ( $n$  — его порядковый номер, а не степень). Найдем теперь производные функции  $f(x)$  в точке  $x = 0$ . Имеем,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = 0,$$

$$f''(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(\Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(-\frac{6}{(\Delta x)^4} + \frac{4}{(\Delta x)^6}\right) e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = 0.$$

Из (59) по индукции заключаем, что  $f^{(n)}(0) = 0$ .

Таким образом, ряд Тейлора функции  $f(x)$  равен

$$0 + 0 + \dots + 0 + \dots,$$

но функция  $f(x)$  не равна нулю при  $x \neq 0$ . Следовательно, функция  $f(x)$  не может быть разложена в ряд Тейлора ни в какой окрестности точки  $x = 0$ .

Напомним следующую теорему.

**Теорема 4.2** Если функция  $f(x)$  непрерывно дифференцируема  $(n+1)$  раз на интервале  $(-R, R)$ ,  $R > 0$ , то справедлива формула Маклорена:

$$f(x) = \sum_{n=0}^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x),$$

где  $r_n(x)$  остаточный член, который можно записать в следующем виде:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

где точка  $\xi$  лежит между  $x$  и  $0$ .

Из данного утверждения легко следует необходимое и достаточное условие, когда функция может быть разложена в ряд Тейлора.

**Теорема 4.3** Функция  $f(x)$  может быть разложена в ряд Тейлора на интервале  $(-R, R)$  тогда и только тогда, когда она бесконечно дифференцируема на этом интервале и остаточный член в формуле Маклорена стремится к нулю в любой точке  $x \in (-R, R)$ .

**Следствие.** Если функция  $f(x)$  имеет все производные на интервале  $(-R, R)$ , которые ограничены на этом интервале,

то функция раскладывается в ряд Тейлора в точке  $x = 0$  на  $(-R, R)$ .

*Задача.* Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \sin^2 x.$$

*Решение.* Найдем производные функции  $f(x)$ :

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x,$$

$$f''(x) = 2 \cos 2x = 2 \sin \left( 2x + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$f'''(x) = -2^2 \sin 2x = 2^2 \sin \left( 2x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$f^{IV}(x) = -2^3 \cos 2x = 2^3 \sin \left( 2x + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

.....

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \sin \left( 2x + (n-1) \frac{\pi}{2} \right).$$

Найдем значение функции  $f(x)$  и ее производных в точке  $x = 0$ :

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = 0, \quad f^{IV}(0) = -2^3, \dots$$

$$f^{(n)}(0) = 2^{n-1} \sin \frac{\pi(n-1)}{2}.$$

Выпишем остаточный член в формуле Маклорена для функции  $\sin^2 x$ :

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{2^n \sin \left( 2\xi + \frac{\pi n}{2} \right)}{(n+1)!} x^{n+1} = \\ &= \frac{(2x)^n}{2(n+1)!} \sin \left( 2\xi + \frac{\pi n}{2} \right). \end{aligned}$$

Для каждого фиксированного  $x \in \mathbb{R}$  остаточный член  $r_n(x)$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Таким образом, справедлива формула

$$\sin^2 x = \frac{2}{2!} x^2 - \frac{2^3}{4!} x^4 + \frac{2^5}{6!} x^6 + \dots$$

### Упражнения.

4.1.1. Разложить в ряды по степеням  $x$  следующие функции

$$а) f(x) = 7^x, \quad б) f(x) = e^{-2x}, \quad в) \cos^2 x,$$

$$г) \ln(x+2), \quad д) \operatorname{tg} x, \quad е) \cos^2 x^2.$$

4.1.2. Разложить в ряд Тейлора следующие функции в окрестности точки  $x_0$ :

$$а) f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1, \quad б) f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1,$$

$$в) f(x) = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad г) f(x) = e^x, \quad x_0 = 1.$$

## 4.2. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Разложение  $f(x) = e^x$ . В силу того, что  $f^{(n)}(x) = e^x$  для всех  $x \in \mathbb{R}$  и  $n \in \mathbb{N}$ , то для фиксированного  $a > 0$  и для всех  $x \in (-a, a)$  выполняется неравенство

$$0 < f^{(n)}(x) < e^a.$$

Следовательно, функция  $e^x$  разлагается в ряд Тейлора на интервале  $(-a, a)$ , а в силу произвольности  $a$  — и на всей числовой оси. Поскольку  $f^{(n)}(0) = 1$ , то

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Разложение  $f(x) = \sin x$ . По индукции легко показать, что  $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Следовательно, все производные ограничена на числовой оси. Поэтому

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Разложение  $f(x) = \cos x$ . Аналогичные рассуждения для  $f(x) = \cos x$  приводят к формуле

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Разложение  $f(x) = \ln(1+x)$ . Так как

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n},$$

то остаточный член  $r_n(x)$  в формуле Маклорена будет иметь вид

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}},$$

где  $\xi$  лежит между 0 и  $x$ . Если  $x \in [0, 1]$ , то

$$0 < \frac{1}{1+\xi} \leq 1.$$

Поэтому  $|r_n(x)| \leq 1/(n+1)$  для всех  $x \in [0, 1]$ . Пусть теперь  $x \in (-1, 0)$ . Тогда точка  $\xi \in [x, 0]$  и, следовательно,

$$\left| \frac{1}{1+\xi} \right| = \frac{1}{1-|\xi|} < \frac{1}{1-|x|}.$$

Поэтому

$$|r_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)} < \frac{1}{(n+1)(1-|x|)} \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$  для всех  $x \in (-1, 0)$ . Таким образом, получаем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \quad \forall x \in (-1, 1].$$

Разложение бинома  $f(x) = (1+x)^\alpha$ . Формула Маклорена для бинома имеет следующий вид

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n + r_n(x).$$

Можно показать, что для всех  $x \in (-1, 1)$  остаточный член  $r_n(x)$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  (мы этого делать не будем, заметим лишь, что в случае, когда  $n$  — натуральное число, это очевидно, т.к.  $f^{(k)}(x) = 0$  для всех  $k \geq n + 1$ ). Таким образом, ряд Тейлора для бинорма

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n.$$

Разложение  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ . Разложение  $f(x)$  можно искать, используя формулу Маклорена, но в данном случае значительно проще это сделать, основываясь на свойствах степенных рядов.

Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

В свою очередь, используя формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}. \quad (60)$$

Радиус сходимости степенного ряда, стоящего в (60) равен 1. Поэтому его можно почленно интегрировать на любом отрезке  $[0, x]$ , содержащемся в интервале  $(-1, 1)$ :

$$\int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \int_0^x t^{2n} dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x \in (-1, 1).$$



*Задача. Разложить  $e^{x^2}$  в ряд по степеням  $x$ .*

*Решение. В разложении*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

*заменим  $x$  на  $x^2$ . В результате получим формулу*

$$e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots,$$

*которая справедлива для всех  $x \in \mathbb{R}$ .*

*Задача. Вычислить*

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}.$$

*Решение. Воспользуемся разложением  $e^x$  и  $\sin x$  в степенной ряд в окрестности точки  $x = 0$ . В результате получим*

$$\begin{aligned} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} &= \frac{2 \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) - 2 - 2x - x^2}{x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)} = \\ &= \frac{\frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \dots}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots} = \frac{\frac{2}{3!} + \frac{2x}{4!} + \dots}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots}. \end{aligned}$$

*Таким образом,*

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3!} + \frac{2x}{4!} + \dots}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots} = 2.$$

*Задача. Разложить в ряд Тейлора функцию*

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

*в окрестности точки  $x = 0$  и найти радиус сходимости полученного ряда.*

Решение. Воспользуемся разложением

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \dots$$

Очевидно, что радиус сходимости последнего ряда равен бесконечности. Следовательно, ряд можно почленно интегрировать на отрезке  $[0, x]$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ . После интегрирования будем иметь

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x dt - \int_0^x \frac{t^2}{3!} dt + \int_0^x \frac{t^4}{5!} dt - \int_0^x \frac{t^6}{7!} dt + \dots = \\ &= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \end{aligned}$$

При этом радиус сходимости полученного ряда тоже равен бесконечности.

### Упражнения.

4.2.1. Используя разложения функций в ряд, вычислить следующие пределы:

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3},$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1 - x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{xe^x - x - x^2}.$$

4.2.2. Разложить в ряд Тейлора следующие функции в окрестности точки  $x = 0$  и найти радиусы сходимости полученных рядов:

$$а) f(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt, \quad б) \int_0^x \cos t^2 dt,$$

$$6) \int_0^x \frac{\arcsin t}{t} dt, \quad 2) \int_0^x \sqrt{1+t^5} dt.$$

## 5. Примеры контрольных работ

### 5.1. Контрольная работа №1

1. По определению исследовать сходимость числового ряда и, в случае сходимости, найти его сумму:

$$1.1. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)},$$

$$1.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)},$$

$$1.3. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$$

$$1.4.* \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right),$$

$$1.5.* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

2. Исследовать сходимость ряда:

$$2.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0,01n - 100}{100n + 1},$$

$$2.2. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right),$$

$$2.3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{0,1},$$

$$2.4.* \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{1}{n},$$

$$2.5.* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}.$$

3. Пользуясь признаком сравнения, исследовать сходимость ряда:

$$3.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n^2},$$

$$3.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 10}{n^4 + 3n^2 + 1},$$

$$3.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - 1}{n\sqrt{n} + 1},$$

$$3.4.* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n},$$

$$3.5.* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right).$$

4. Пользуясь признаками Даламбера или Коши, исследовать сходимость ряда:

$$4.1. \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2},$$

$$4.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5 - (-1)^n)^n}{7^n},$$

$$4.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n}{3n-1} \right)^n,$$

$$4.4.* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^2}},$$

$$4.5.* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}.$$

5. Исследовать на абсолютную и условную сходимости ряд:

$$5.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3},$$

$$5.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n+1},$$

$$5.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n},$$

$$5.4.* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n - \sin n},$$

$$5.5.* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + \cos n}.$$

## 5.2. Контрольная работа №2

1. Найти множество сходимости ряда:

$$1.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n+x},$$

$$1.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n},$$

$$1.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+2^n},$$

$$1.4.* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x},$$

$$1.5.* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

2. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость ряда на множестве  $X$ :

$$2.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, \quad X = \mathbb{R}$$

$$2.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2^x}{n^2}, \quad X = \mathbb{R},$$

$$2.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^3}, \quad X = [0, +\infty),$$

$$2.4.* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n+n^2x^2}, \quad X = \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$2.5.* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{n+x^2}, \quad X = (0, +\infty).$$

3. Найти радиус сходимости степенного ряда и исследовать его сходимость в концах интервала сходимости:

$$3.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n},$$

$$3.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{3^n},$$

$$3.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n - 2^n},$$

$$3.4.* \sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^{n^2},$$

$$3.5.* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{3^n}.$$

4. Разложите функцию в ряд Тейлора в окрестности точки  $x = 0$ :

$$4.1. f(x) = \ln(1 - x^2),$$

$$4.2. f(x) = e^{x-1},$$

$$4.3. f(x) = x \sin x^2,$$

$$4.4.* f(x) = x \sin(x - 1),$$

$$4.5.* f(x) = x \cos(x + 1).$$

## Список литературы

1. Ильин, В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. — М.: Наука, 1973. Ч. 2. 448 с.
2. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. Гармонический анализ: Учебник. / Л.Д. Кудрявцев. — М.: Физматлит, 2002. Т. 2. 400 с.
3. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович. — М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2005. 558 с.
4. Виноградова, И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн. Кн. 2. Ряды, несобственные интегралы, кратные и поверхностные интегралы: Учеб. пособие для университетов, ред. вузов / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий; Под ред. В.А. Садовничего — 2-е изд., перераб. — М.: Высшая школа, 2002. 712 с.
5. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: Учеб. пособие для втузов. — 5-е изд., испр. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожесвикова. — М.: Высшая школа, 1999. 416 с.
6. Дюбюк, П.Е. Сборник задач по курсу высшей математики для втузов / П.Е. Дюбюк, Г.И. Кручкович, Н.Н. Глаголева, Н.И. Гутарина, И.А. Панфилова, Б.С. Римский-Корсаков, Р.С. Сенкевич-Бурштейн, Х.Р. Сулейманова, И.А. Чегис. М.: Высшая школа, 1963. 663 с.
7. Ярахмедов, Г.Я. Математический анализ. Суммирование последовательностей / Г.Я. Ярахмедов. Новосибирск: Изд-во НГПУ, 1995.



# Оглавление

1.	Числовые ряды . . . . .	3
1.1.	Понятие числового ряда . . . . .	3
1.2.	Свойства числовых рядов . . . . .	8
1.3.	Критерий Коши сходимости числовых рядов	14
1.4.	Ряды с неотрицательными членами . . . . .	16
1.5.	Абсолютно и условно сходящиеся ряды . . . . .	37
2.	Функциональные ряды . . . . .	43
2.1.	Функциональные последовательности . . . . .	43
2.2.	Функциональные ряды . . . . .	50
2.3.	Непрерывность суммы равномерно сходящихся рядов . . . . .	56
2.4.	Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных рядов . . . . .	60
3.	Степенные ряды . . . . .	67
3.1.	Радиус сходимости степенных рядов . . . . .	67
3.2.	Непрерывность суммы степенного ряда . . . . .	74
3.3.	Почленное интегрирование степенных рядов	75
3.4.	Почленное дифференцирование степенных рядов . . . . .	76
4.	Ряды Тейлора . . . . .	79
4.1.	Разложение функций в степенной ряд . . . . .	79
4.2.	Разложение элементарных функций в ряд Тейлора . . . . .	83
5.	Примеры контрольных работ . . . . .	88
5.1.	Контрольная работа №1 . . . . .	88
5.2.	Контрольная работа №2 . . . . .	90

*Учебное издание*

**Рудой Евгений Михайлович**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.  
ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ**

*Учебное пособие*

*В авторской редакции*

*Компьютерная верстка – Е.М. Рудой*

---

*Подписано в печать 18.11.2010. Формат бумаги 60×84/16.  
Печать RISO. Уч.-изд. л. 5,75. Усл. печ. л. 5,35. Тираж 300  
экз.  
Заказ №*

---

*Педуниверситет, Новосибирск, 126, ул. Вилюйская, 28*