

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ "ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ". 3,5 п.л. АВТОР: К.Ф.-М.Н. ПРОКУДИН Д.А.

Предназначено для студентов 3-го курса специальности 010101 "Математика".

Аннотация

В этом курсе основным объектом изучения является математическая модель двухкомпонентной смеси вязких сжимаемых жидкостей (газов), представляющая собой некоторое обобщение классической модели Навье-Стокса. Вопросы о математической корректности краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, возникающих при моделировании сплошных сред, вызывает неизменный интерес, поскольку их решение встречает существенные трудности в математическом плане, стимулируя тем самым дальнейшее развитие математических методов. В частности, вопросы динамики вязкой жидкости очень трудны с математической точки зрения и не случайно задача о глобальной разрешимости многомерной системы Навье-Стокса включена в список так называемых "проблем тысячелетия".

Целью освоения дисциплины "Точные решения уравнений смесей вязких жидкостей" является знакомство студентов с точными решениями дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих движения смесей вязких жидкостей.

Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: математический анализ, линейная алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных (уравнения математической физики), компьютерные науки, практикум на ЭВМ по ДУ. Программа дисциплины "Точные решения уравнений смесей вязких жидкостей" предусматривает изучение студентами методов нахождения точных решений уравнений смесей вязких жидкостей, актуальных в различных областях практических знаний, связанных с будущей профессиональной деятельностью математиков.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

1) знать: основные формулы векторного и тензорного анализа, основные модели механики смесей вязких жидкостей, основные методы нахождения точных решений данных моделей;

2) уметь: оперировать с векторами и тензорами, используя основные формулы векторного и тензорного анализа, моделировать различные процессы механики смесей вязких жидкостей, находить точные решения этих моделей;

3) владеть: техникой доказательства (вывода) основных формул векторного и тензорного анализа, навыками решения основных задач курса.

УМК, предназначенный для организации учебной работы по дисциплине, содержит аннотацию, рабочую программу курса, текст лекций, педагогические измерительные материалы.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ «ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ»

Организационно-методический раздел

1. Пояснительная записка

Актуальность и значимость учебной дисциплины

Современная газовая динамика представляет собой обширную физико-математическую дисциплину, занимающую прочное место в фундаментальной системе знаний о поведении сплошных сред. Область практических приложений результатов и выводов газовой динамики весьма широка. Она охватывает процессы и явления, происходящие при движении в воздухе летательных аппаратов, снарядов и ракет, при истечении газовых струй, при распространении ударных волн и их воздействии на препятствия.

Курс "Точные решения уравнений смесей вязких жидкостей" посвящен изучению принципов построения точных решений дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих движения смесей вязких жидкостей.

При подготовке студента-математика курс "Точные решения уравнений смесей вязких жидкостей" составляет важную и неотъемлемую часть его профессионального становления.

Соответствие рабочей программы Государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования

Рабочая программа соответствует требованиям, предъявляемым к специализации "Математическое моделирование".

Цели и задачи учебной дисциплины

Целью преподавания дисциплины "Точные решения уравнений смесей вязких жидкостей" является формирование у будущих специалистов современных теоретических знаний в области газовой динамики и практических навыков в исследовании дифференциальных уравнений динамики смесей вязких сред, ознакомление студентов с навыками математического моделирования.

Задачи изучения дисциплины:

- Овладение навыками моделирования практических задач динамики смесей дифференциальными уравнениями;
- Приобретение навыков решения конкретных задач качественного анализа.

Место дисциплины в профессиональной подготовке специалиста

Изучение данной дисциплины базируется на знаниях студентами общих курсов: математический анализ, линейная алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных (уравнения математической физики), компьютерные науки,

практикум на ЭВМ по ДУ. "Точные решения уравнений смесей вязких жидкостей" дают математику одно из мощных средств для анализа явлений и процессов различной природы математическими методами.

Структура учебной дисциплины "Точные решения уравнений смесей вязких жидкостей" состоит из трех основных разделов:

- Наиболее употребительные формулы векторного и тензорного анализа;
- Математические модели динамики смесей вязких жидкостей;
- Случаи точного интегрирования дифференциальных уравнения движения смесей вязких жидкостей.

Особенности изучения учебной дисциплины

Курс "Точные решения уравнений смесей вязких жидкостей" построен с позиции моделирования физических задач дифференциальными уравнениями с частными производными. При изучении данной дисциплины необходимым является владение методами уравнений математической физики и функционального анализа.

Формы организации учебного процесса по данной дисциплине

На основе программы и учебного плана, в ходе проведения занятий по математическим моделям в газовой динамике, используются следующие формы: лекции, самостоятельная работа, зачет.

Взаимосвязь аудиторной и самостоятельной работы

Основные вопросы программы вынесены как на аудиторные, так и на самостоятельные занятия. На лекциях студентам предлагаются для самостоятельного доказательства некоторые следствия теорем.

Требования к уровню освоения содержания дисциплины

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- 1) знать: основные формулы векторного и тензорного анализа, основные модели механики смесей вязких жидкостей, основные методы нахождения точных решений данных моделей;
- 2) уметь: оперировать с векторами и тензорами, используя основные формулы векторного и тензорного анализа, моделировать различные процессы механики смесей вязких жидкостей, находить точные решения этих моделей;
- 3) владеть: техникой доказательства (вывода) основных формул векторного и тензорного анализа, навыками решения основных задач курса.

Виды контроля знаний студентов и их отчетности

По трем основным разделам курса предусмотрены самостоятельные работы. По итогам изучения курса в конце семестра предусмотрен зачет.

Критерии оценки знаний студентов

Для получения зачета по курсу "Точные решения уравнений смесей вязких жидкостей" требуется: посещать лекционные занятия; выполнить самостоятельную работу и тест; выполнить индивидуальное зачетное задание.

Индивидуальное зачетное задание по данной дисциплине включает в себя один теоретический вопрос (список вопросов приведен в перечне вопросов к зачету). Теоретический вопрос соответствует программе данного курса. Зачетное задание считается выполненным, если студент правильно ответил на теоретический вопрос. Дополнительные вопросы задаются для уточнения знаний студента, и, как правило, не выходят за пределы вопросов в зачетном задании.

2. Тематический план

№	Раздел дисциплины	Сем.	Нед.	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			
				Лек	Сем	Сам	Сум
1	Наиболее употребительные формулы векторного и тензорного анализа.	5	1-4	4		8	12
2	Математические модели динамики смесей вязких жидкостей.	5	5-8	8		8	16
3	Случаи точного интегрирования дифференциальных уравнения движения смесей вязких жидкостей.	5	9-18	24		20	44
4	Зачет						
	Всего			36		36	72

3. Содержание дисциплины

№	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1	Наиболее употребительные формулы векторного и тензорного анализа.	Векторная алгебра и векторный анализ. Тензорная алгебра и некоторые формулы тензорного анализа.
2	Математические модели динамики смесей вязких жидкостей.	Уравнения сохранения для составляющих смеси. Многоскоростная модель движения смесей вязких жидкостей. Односкоростная модель движения смесей вязких жидкостей.
3	Случаи точного интегрирования дифференциальных уравнений движения смесей вязких жидкостей.	Стационарное движение двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей между двумя параллельными стенками. Стационарное движение двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей в круглой цилиндрической трубе. Круговое движение двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей между двумя вращающимися цилиндрами.

4. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Нигматулин, Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1 / Р.И. Нигматулин. - М.: Наука, 1987. - 489 с.
2. Кучер, Н.А. Краевые задачи механики смесей жидкостей. Ч. 1 / Н.А. Кучер, Д.А. Прокудин. - Учебное пособие. - ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет». - Кемерово: Кузбассвуиздат, 2010. - 154 с.
4. Слезкин, Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н.А. Слезкин. - М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. - 493 с.
5. Седов, Л.И. Механика сплошной среды. Т.1-2 / Л.И. Седов. - М.: Наука, 1970. - 835 с.

б) дополнительная литература:

1. Антонцев, С.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монахов. - Новосибирск: Наука, 1983. - 361 с.
2. Rajagopal, K. R. Mechanics of mixtures / K. R. Rajagopal, L. Tao. - London: World Scientific Publishing, 1995. - 435 с.
3. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. - М.: Наука, 1982. - 254 с.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

1. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/info/mathwebs.htm> (мир математических уравнений).
2. <http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics> (информационный сайт).

5. Формы текущего, промежуточного и рубежного контроля

Контрольные вопросы для самостоятельного изучения

1. История развития механики жидкости и газа (от гидромеханики древности до установления воззрений ньютоновской эпохи).
2. Основные понятия механики сплошных сред
3. Способы описания движения среды.
4. Стационарные процессы, неустановившиеся движения.
5. Линии тока и траектории.
6. Вихревое и потенциальное движение жидкости.
7. Индексные обозначения. Интервал изменения индексов и соглашение о суммировании.
8. Преобразование координат.
9. Общее понятие тензора.
10. Метрический тензор.
11. Операции с тензорами.
12. Матричные представления тензоров.
13. Главные значения и главные направления симметричных тензоров второго ранга.
14. Степени тензоров второго ранга. Соотношение Гамильтона-Кэли.
15. Ортогональные тензоры в механике и физике.
16. Ковариантное дифференцирование.
17. Криволинейные интегралы. Теорема Стокса. Теорема Гаусса-Остроградского.
18. Напряженное состояние сплошной среды.
14. Распределение массы в сплошной среде.
15. Распределение сил в сплошной среде. Объемные и поверхностные силы.
16. Круги Мора для напряжения.
17. Плоское напряженное состояние.
18. Теория малых деформаций.
19. Инварианты деформации.
20. Плоская деформация. Круги Мора для деформации.
21. Скорость, ускорение.
22. Тензор скоростей деформации.
23. Идеальные среды.
24. Интегралы уравнений движения идеальной среды.
25. Течение жидкостей по трубам.
26. Движение жидкости между вращающимися цилиндрами.
27. Гравитационные волны.

Задачи для самостоятельного решения

1. Векторная алгебра и векторный анализ

1. Дано поле скоростей $v_1 = x_1/(1+t)$, $v_2 = 2x_2/(1+t)$, $v_3 = 3x_3/(1+t)$. Найти компоненты ускорения. Определить линии тока и траектории.

2. Доказать, что для поля скоростей $v_1 = x_1^2x_2 + x_2^3$, $v_2 = -x_1^3 - x_1x_2^2$, $v_3 = 0$ линии тока будут окружности.

3. Найти угол φ между градиентами поля

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

в точках $A(1, 2, 2)$ и $B(-3, 1, 0)$.

4. Найти производную поля $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в данной точке $M(x, y, z)$ в направлении радиуса-вектора r этой точки. В каком случае эта производная будет равна величине градиента?

5. Количество тепла, протекающее в поле температуры u за единицу времени через элемент поверхности dS , равно $dQ = -k\vec{n}\nabla u dS$, где k — коэффициент внутренней теплопроводности \vec{n} — единичный вектор нормали к поверхности S . Определить количество тепла, накопленное телом V за единицу времени. Используя скорость повышения температуры, вывести уравнение, которому удовлетворяет температура тела (уравнение теплопроводности).

2. Тензорная алгебра и некоторые формулы тензорного анализа

1. Матрица коэффициентов, соответствующая тензору T второго ранга имеет вид: $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 7 & -4 & 9 \\ 4 & -6 & 11 \end{pmatrix}$. Представить T в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров.

2. Упростите выражение $A_{ij}B^{ji}$, если A — симметричный, а B — антисимметричный тензор второго ранга.

3. Матрица смешанных компонент тензора T второго ранга имеет вид: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, причем $x^1 = y^3$, $x^2 = y^1 + y^2$, $x^3 = y^1$. Определить контравариантные компоненты данного тензора.

4. Определить вектора ковариантного базиса, если $x^1 = y^2 + y^1$, $x^2 = y^2 - y^1$, $x^3 = y^3 - y^2$.

5. Вычислить $\delta_i^j \delta_j^k \delta_k^i$.

3. Уравнения сохранения для составляющих смеси

1. Написать уравнение неразрывности для потенциального движения сжимаемой и несжимаемой среды в виде уравнения для потенциала.

2. Доказать, что лагранжева форма уравнения неразрывности i -ой компоненты смеси и эйлера его форма эквивалентны.

3. Найти диссипативную функцию диссипативной части тензора напряжений смеси и выразить ее через инварианты тензора скоростей деформаций.

4. Трубка ($0 \leq x \leq l$) постоянного сечения S наполнена газом, начальная (при $t = 0$) концентрация которого $\varphi(x)$. Поверхность и торцы трубки пористые, так что через них происходит обмен концентрацией (по закону, аналогичному закону Ньютона для конвективного теплообмена) с внешней средой. Концентрация газа во внешней среде равна $\vartheta(t)$. Поставить краевую задачу об определении концентрации газа u при $t > 0$ в трубке, когда:

а) частицы газа распадаются (например, неустойчивый газ), причём скорость распада газа в каждой точке полости трубки пропорциональна корню квадратному из его концентрации;

б) частицы газа размножаются со скоростью, пропорциональной произведению uu_t в каждой точке полости трубки.

4. Многоскоростная и односкоростная модели движения смесей вязких сжимаемых жидкостей

1. Выписать уравнение неразрывности i -ой компоненты смеси в ортогональных криволинейных координатах.

2. Выписать уравнение баланса импульса i -ой компоненты смеси в ортогональных криволинейных координатах.

3. Вывести математический эквивалент второго закона термодинамики для "многоскоростной" модели смеси, предписывающего положительность производства энтропии.

4. Вывести математический эквивалент второго закона термодинамики для "односкоростной" модели смеси.

5. Прямолинейно-параллельное движение смесей вязких жидкостей между двумя параллельными стенками

Рассчитать объемный расход, среднюю скорость течения, максимальную скорость течения, силу трения для модели смеси, описывающей движение смесей вязких несжимаемых жидкостей между двумя параллельными стенками.

6. Прямолинейное движение смесей вязких жидкостей в круглой цилиндрической трубе

Рассчитать объемный расход, среднюю скорость течения, максимальную скорость течения, силу трения для модели смеси, описывающей движение смесей вязких несжимаемых жидкостей в круглой цилиндрической трубе.

7. Круговое движение смесей вязких жидкостей между двумя вращающимися цилиндрами

1. Сформулировать задачу о вращении кругового цилиндра, наполненного двухкомпонентной смесью вязких несжимаемых жидкостей. Найти ее решение.

2. Сформулировать задачу о вращении круглого цилиндра в безграничной смеси вязких жидкостей. Найти ее решение.

Примеры тестовых заданий

1. Идеальная среда – это среда
 - а) не способная оказывать сопротивление изменению формы
 - б) не способна оказывать сопротивление изменению объема
 - в) физические свойства которой одинаковы во всех направлениях в пространстве
 - г) индивидуальные частицы которой не получают ускорения.
2. Интенсивность внутренних сил, действующих в данной точке среды на площадке с заданной ориентацией, определяется
 - а) вектором полного напряжения
 - б) средним напряжением
 - в) тензором напряжения
3. Равновесие среды – это когда
 - а) на тело действуют внутренние и внешние силы, которые равны между собой, и любая частица тела движется с постоянным ускорением
 - б) тело не испытывает действия никаких сил
 - в) любая частица тела не испытывает ускорения
4. Условие $\text{rot } \vec{v} = 0$ означает, что движение является
 - а) потенциальным
 - б) безвихревым
 - в) установившимся
5. Главные площадки – это площадки, на которых
 - а) отсутствуют нормальные напряжения
 - б) отсутствуют касательные напряжения
 - в) внешняя нормаль совпадает с положительным направлением одной из координатных осей
 - г) интенсивность напряжения максимальна
6. Уравнение неразрывности выражает закон сохранения
 - а) импульса
 - б) энергии
 - в) массы
7. Из приведенных сил выберите поверхностные
 - а) сила трения
 - б) сила тяжести
 - в) электромагнитная сила
8. Из перечисленных сред выберите изотропные
 - а) ткань
 - б) воздух
 - в) дерево
9. Линия тока – это
 - а) кривая, в каждой точке которой вектор скорости направлен по касательной к ней
 - б) линия в пространстве, по которой движется частица
 - в) вектор скорости, лежащий в касательной плоскости

Вариант самостоятельной работы

- 1) Привести примеры полезного и вредного проявлений сил трения в технике.
- 2) Какие виды деформации испытывают: пласт земли при вспашке; стебли растений при скашивании; клубни картофеля при прохождении между комбайнерами комбайна?
- 3) Вектор скорости задан в эйлеровых координатах: $v_1 = x^2$, $v_2 = x^3$, $v_3 = 0$. Определить координаты ускорения в лагранжевых координатах.
- 4) Задано поле скоростей $v_i = \xi_i e^t$, $i=1,2,3$. Является ли это движение установившимся, потенциальным?
- 5) Привести пример процесса, который можно считать установившимся.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Уравнения сохранения для составляющих смеси. Уравнение неразрывности.
2. Уравнения сохранения для составляющих смеси. Уравнение сохранения импульса.
3. Уравнения сохранения для составляющих смеси. Уравнение сохранения энергии.
4. Многоскоростная модель движения смесей вязких жидкостей.
5. Односкоростная модель движения смесей вязких жидкостей.
6. Прямолинейно-параллельное движение смесей вязких жидкостей между двумя параллельными стенками.
7. Прямолинейное движение смесей вязких жидкостей в цилиндрической трубе.
8. Круговое движение смесей вязких жидкостей между двумя вращающимися цилиндрами.

Текст лекций

Содержание

1	Введение	12
2	Наиболее употребительные формулы векторного и тензорного анализа	13
2.1	Векторная алгебра и векторный анализ	13
2.2	Тензорная алгебра и некоторые формулы тензорного анализа .	17
2.3	Упражнения	20
3	Математические модели динамики смесей вязких сжимаемых жидкостей	21
3.1	Уравнения сохранения для составляющих смеси	21
3.2	Многоскоростная модель движения смесей вязких сжимаемых жидкостей	24
3.3	Односкоростная модель движения смесей вязких сжимаемых жидкостей	25
3.4	Упражнения	28
4	Стационарное движение двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей между двумя параллельными стенками	28
4.1	Упражнения	35
5	Стационарное движение двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей в круглой цилиндрической трубе	35
5.1	Упражнения	49
6	Круговое движение двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей между двумя вращающимися цилиндрами	49
6.1	Упражнения	56

1 Введение

Реальные среды в природных процессах и различных областях человеческой деятельности – смеси двух или более компонентов. Гомогенная (иногда многокомпонентная) смесь состоит из компонентов, одинаковых по своему фазовому составу. Если же в смеси имеются компоненты, различающиеся друг от друга по фазе, то среда называется гетерогенной (или многофазной). К последним можно отнести, например, жидкости с твердыми или газовыми включениями. Сейчас трудно указать область техники, не использующую неоднородные среды (смеси). Это, прежде всего, – ракетная техника со сложными по физическому и химическому составу потоками в соплах ракетных двигателей. Это – современные химические технологии, использующие в промышленном производстве многокомпонентные и многофазные потоки сложных смесей реагирующих между собой веществ. Это – энергетика, применяющая потоки разнообразных парожидкостных смесей для снятия тепла с поверхностей нагрева парогенераторов и реакторов. Это – гидротехника, занимающаяся заиленными или несущими шугу речными потоками, санитарная техника, борющаяся с запылением атмосферы и водных бассейнов, и многие другие области техники.

Теоретическое описание неоднородных потоков, независимо от того, будет ли поток гомогенным или гетерогенным, требует принятия основного допущения о сплошности всех совместно движущихся совокупностей частиц, как отдельных составляющих, так и смеси их в целом. Подобно тому, как это принимается в механике однородной среды, предполагается, что в элементарном объеме смеси, так же как и в элементарных объемах составляющих, несмотря на малость этих объемов, содержится достаточно большое число частиц, для того чтобы можно было в допустимом приближении применять статистическое осреднение физических параметров этих частиц по их множеству.

В этом курсе основным объектом изучения является математическая модель двухкомпонентной смеси вязких сжимаемых жидкостей (газов), представляющая собой некоторое обобщение классической модели Навье-Стокса. Вопросы о математической корректности краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, возникающих при моделировании сплошных сред, вызывает неизменный интерес математиков, поскольку их решение встречает существенные трудности в математическом плане, стимулируя тем самым дальнейшее развитие математических методов. В частности, вопросы динамики вязкой жидкости очень трудны с математической точки зрения и не случайно задача о глобальной разрешимости многомерной системы Навье-Стокса включена в список так называемых "проблем тысячелетия".

Основной целью освоения дисциплины "Точные решения уравнений смесей вязких жидкостей" является знакомство студентов с точными решениями дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих движения смесей вязких жидкостей.

2 Наиболее употребительные формулы векторного и тензорного анализа

Методы векторного и тензорного исчислений играют важную роль в механике сплошной среды и некоторых других разделах теоретической и математической физики, непосредственно связанных с теорией поля. Объясняется это тем, что используемая в этих методах математическая символика полностью отражает и обобщает действительные связи между физическими величинами. В настоящем разделе приведем наиболее употребительные формулы векторного и тензорного исчислений в прямоугольных декартовых координатах. Пользование в дальнейшем ссылками на эти формулы (без их вывода) значительно облегчает изложение математической стороны курса и позволяет более выпукло показать физическую сущность его содержания.

2.1 Векторная алгебра и векторный анализ

Введем следующие общепринятые обозначения.

Скаляры будем задавать латинскими или греческими буквами, строчными, иногда заглавными, например, $a, b, U, V, \alpha, \beta$.

Векторы задаются теми же буквами, что и скаляры, но со стрелкой сверху, например, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{U}, \vec{V}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}$. Модуль (величина) вектора обозначается $|\vec{a}|$. Единичный вектор (орт) \vec{u} , направленный вдоль \vec{a} , записывается как $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{u}$.

Оси прямоугольной декартовой системы координат: Ox, Oy, Oz или Ox_1, Ox_2, Ox_3 . Проекции вектора \vec{a} на оси координат обозначаются a_x, a_y, a_z или a_1, a_2, a_3 .

Знаки математических операций сложения и вычитания обычные. Знак скалярного произведения векторов – точка между сомножителями, например, $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Знак векторного произведения – наклонный крест, например, $\vec{a} \times \vec{b}$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a}, \\ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}, \\ \lambda(\vec{a} + \vec{b}) &= \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}. \end{aligned} \quad (1)$$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ имеет свойства:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a}, \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, \\ \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}), \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \text{ при } |\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0, \text{ только если } \vec{a} \perp \vec{b}, \\ \vec{a} \cdot \vec{a} &= |\vec{a}|^2, \\ (\vec{a} \pm \vec{b})^2 &= |\vec{a}|^2 \pm 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Векторное произведение двух векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ равно по величине площади параллелограмма

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}), \quad (3)$$

построенного на векторах-сомножителях, и обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a}, \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \\ \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) &= (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}), \\ \vec{a} \times \vec{b} &= 0 \text{ при } |\vec{a}| \neq |\vec{b}| \neq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Смешанное скалярно-векторное произведение трех векторов равно \pm объему параллелепипеда

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \quad (5)$$

построенного на векторах-сомножителях, и обладает свойством

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \text{ при } |\vec{a}| \neq |\vec{b}| \neq |\vec{c}| \neq 0. \quad (6)$$

Двойное векторное произведение трех векторов

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}, \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}. \end{aligned} \quad (7)$$

В системе координат (x, y, z) или (x_1, x_2, x_3) скалярное или векторное поля физических величин задаются функциями

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda(x, y, z) = \lambda(x_1, x_2, x_3), \\ a_x &= a_x(x, y, z), a_y = a_y(x, y, z), a_z = a_z(x, y, z) \\ \text{или } a_p &= a_p(x_1, x_2, x_3), \text{ где } p = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (8)$$

В дальнейшем, если индекс в одночленном выражении повторяется два раза, то подразумевается суммирование по этому индексу от 1 до 3, а знак суммы опускается, исключения оговариваются. Формулы перехода от одной системы координат $(x_p; p = 1, 2, 3)$ к другой $(x'_q; q = 1, 2, 3)$ имеют вид

$$\begin{aligned} x_p &= \sum_{q=1}^3 \alpha_{pq} x'_q = \alpha_{pq} x'_q, \quad x'_q = \sum_{p=1}^3 \alpha_{qp} x_p = \alpha_{qp} x_p, \\ \alpha_{pq} &= \cos(\widehat{x_p, x'_q}), \quad \sum_{s=1}^3 \alpha_{ps} \alpha_{qs} = \alpha_{ps} \alpha_{qs} = \begin{cases} 0 & \text{при } q \neq p, \\ 1 & \text{при } q = p, \end{cases} \\ \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} &= \det(\alpha_{pq}) = \pm 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Верхний знак в величине определителя $\det(\alpha_{pq})$ соответствует сонаправленным системам координат, нижний – противоположному случаю.

Если при переходе от одной системы координат к любой другой (безразлично, сонаправленной или нет) функция λ сохраняет свое значение, т. е.

$$\lambda(x, y, z) = \lambda(x', y', z'), \quad (10)$$

то она определяет физический, или истинный, скаляр.

Проекции физического (истинного) вектора при переходе от одной системы координат к другой изменяются по тем же формулам (9), что и сами координаты.

$$a_p = \alpha_{pq} a'_q, \quad a'_q = \alpha_{qp} a_p. \quad (11)$$

Единичные векторы, орты осей координат обозначаются следующим образом: ось Ox , Ox_1 - орт \vec{i} , \vec{e}_1 , ось Oy , Ox_2 - орт \vec{j} , \vec{e}_2 , ось Oz , Ox_3 - орт \vec{k} , \vec{e}_3 . Основные соотношения между ортами осей координат:

$$\vec{e}_p \cdot \vec{e}_q = \cos(\widehat{x_p, x_q}) = \begin{cases} 0 & \text{при } q \neq p, \\ 1 & \text{при } q = p, \end{cases} \quad (12)$$

$$\vec{e}_p \times \vec{e}_q = \vec{e}_r.$$

(порядок расположения индексов p, q, r соответствует круговой перестановке $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$). Разложение вектора по ортам осей координат:

$$\vec{a} = a_p \vec{e}_p, \quad |\vec{a}|^2 = a_p a_p = \sum_{p=1}^3 a_p^2, \quad (13)$$

$$a_p = \vec{a} \cdot \vec{e}_p = |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{e}_p}).$$

Аналитическая форма некоторых простейших операций над векторами:

$$(\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c} \pm \dots)_p = a_p \pm b_p \pm c_p \pm \dots \quad (p = 1, 2, 3),$$

$$(\lambda \vec{a})_p = \lambda a_p, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (14)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad (\vec{a} \times \vec{b})_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad (\vec{a} \times \vec{b})_z = a_x b_y - a_y b_x,$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Производная вектор-функции $\vec{a}(s)$ по скалярному аргументу s обозначается $\frac{d\vec{a}}{ds}$, производные от скалярной φ и векторной функции \vec{a} по направлению l - $\frac{d\varphi}{dl}$, $\frac{d\vec{a}}{dl}$. Для пространственных производных используются общепринятые обозначения: градиент скалярного поля функции φ - $\nabla \varphi$, дивергенция (расходимость) векторного поля \vec{a} - $\text{div } \vec{a}$, вихрь (ротатор) - $\text{rot } \vec{a}$. Элемент дуги кривой обозначен dl , поверхности - $d\sigma$, объема - dx . Символы интегрирования по кривой C - $\int_C (\dots) dl$, по поверхности $\partial\Omega$ - $\int_{\partial\Omega} (\dots) d\sigma$, по объему Ω - $\int_{\Omega} (\dots) dx$.

Производная вектор-функции \vec{a} по скалярному аргументу s , при условии существования указанного ниже предела, равна

$$\frac{d\vec{a}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(s + \Delta s) - \vec{a}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta s}. \quad (15)$$

Правила дифференцирования:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{a}}{dt} &= \frac{d\vec{a}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{a}}{ds} f'(t), \quad s = f(t), \\
\frac{d}{ds}(\vec{a} \pm \vec{b} \pm \dots) &= \frac{d\vec{a}}{ds} \pm \frac{d\vec{b}}{ds} \pm \dots, \\
\frac{d}{ds}(\varphi\vec{a}) &= \frac{d\varphi}{ds} \vec{a} + \varphi \frac{d\vec{a}}{ds}, \\
\frac{d}{ds}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \frac{d\vec{a}}{ds} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{ds}, \quad \frac{d}{ds}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{ds} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{ds}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Производные по заданному направлению l с ортом \vec{l} выражаются следующим образом:

$$\frac{d}{dl} = \vec{l} \cdot \nabla, \quad \frac{d\varphi}{dl} = \vec{l} \cdot \nabla \varphi, \quad \frac{d\vec{a}}{dl} = (\vec{l} \cdot \nabla) \vec{a}. \tag{17}$$

Некоторые часто встречающиеся интегральные соотношения:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \vec{n} \varphi d\sigma &= \int_{\Omega} \nabla \varphi dx, \quad \int_{\partial\Omega} \vec{a}_n d\sigma = \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \vec{a} d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} dx, \\
\int_{\partial\Omega} \vec{n} \times \vec{a} d\sigma &= \int_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{a} dx.
\end{aligned} \tag{18}$$

Наиболее употребительные дифференциальные формулы векторного анализа:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\varphi\vec{a}) &= \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \nabla \varphi, \\
\operatorname{rot}(\varphi\vec{a}) &= \varphi \operatorname{rot} \vec{a} + \nabla \varphi \times \vec{a}, \\
\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}, \\
\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{b}) &= (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + \vec{a} \operatorname{div} \vec{b} - \vec{b} \operatorname{div} \vec{a}, \\
\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + \vec{a} \times \operatorname{rot} \vec{b} + \vec{b} \times \operatorname{rot} \vec{a}, \\
(\vec{a} \cdot \nabla) \vec{a} &= \nabla \left(\frac{|\vec{a}|^2}{2} \right) + \operatorname{rot} \vec{a} \times \vec{a}, \\
\operatorname{div} \nabla \varphi = \Delta \varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad \operatorname{rot} \nabla \varphi \equiv 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} \equiv 0, \\
\nabla \operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} + \Delta \vec{a}, \quad \Delta \vec{a} &= \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial z^2}, \\
(\Delta \vec{a})_x = \Delta a_x, \quad (\Delta \vec{a})_y = \Delta a_y, \quad (\Delta \vec{a})_z = \Delta a_z.
\end{aligned} \tag{19}$$

Пространственные производные от скалярных и векторных функций выражаются равенствами

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (\nabla \varphi)_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (\nabla \varphi)_y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = (\nabla \varphi)_z,$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad (20)$$

$$(\operatorname{rot} \vec{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad (\operatorname{rot} \vec{a})_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad (\operatorname{rot} \vec{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

Интегральные формулы векторного анализа в прямоугольных декартовых координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} n_x \varphi \, d\sigma &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, d\sigma, \quad \int_{\partial\Omega} n_y \varphi \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \, d\sigma, \quad \int_{\partial\Omega} n_z \varphi \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \, d\sigma, \\ \int_{\partial\Omega} n_x \vec{a} \, d\sigma &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} \, d\sigma, \quad \int_{\partial\Omega} n_y \vec{a} \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} \, d\sigma, \quad \int_{\partial\Omega} n_z \vec{a} \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \vec{a}}{\partial z} \, d\sigma, \\ \int_{\partial\Omega} (n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z) \, d\sigma &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx, \quad (21) \\ \int_{\partial\Omega} (n_x a_y - n_y a_x) \, d\sigma &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx, \\ \int_{\partial\Omega} (n_y a_z - n_z a_y) \, d\sigma &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dx, \\ \int_{\partial\Omega} (n_z a_x - n_x a_z) \, d\sigma &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) dx. \end{aligned}$$

2.2 Тензорная алгебра и некоторые формулы тензорного анализа

Тензоры обозначаются заглавными латинскими или греческими буквами, иногда строчными, например, P, Q, S, T, σ . Компоненты тензоров – теми же буквами с индексами. Число индексов при компоненте определяет ранг тензора. Вектор по числу индексов можно рассматривать как тензор первого ранга, скаляр – как тензор нулевого ранга. В дальнейшем будут применяться тензоры второго ранга (диады), у компонент которых два индекса – P_{pq}, Q_{rs} и т. д.

Тензор второго ранга T задается совокупностью девяти величин (компонент), располагаемых в матрице (первый индекс – номер строки, второй – столбца):

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = (T_{pq}), \quad p, q = 1, 2, 3. \quad (22)$$

Тензор T^* называется сопряженным с T , если $T_{pq}^* = T_{qp}$. Тензор S , обладающий свойством $S = S^*$, $S_{pq} = S_{qp}^*$, называется самосопряженным, или симметричным. Значения компонента такого тензора не зависят от порядка расположения индексов, т. е. $S_{pq} = S_{qp}$. Тензор A антисимметричен, если $A^* = -A$ или $A_{pq}^* = -A_{pq}$ и, следовательно, $A_{pp} = 0$, $p = 1, 2, 3$ (суммирование по p здесь не предполагается).

Часто употребляется так называемая тензорная единица I – симметричный сферический тензор с компонентами, не зависящими от выбора осей координат:

$$I_{pq} = \begin{cases} 0 & \text{при } q \neq p, \\ 1 & \text{при } q = p, \end{cases} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Знаки операций сложения и вычитания тензоров, умножения тензора на скаляр – обычные. Различные виды произведений двух тензоров обозначаются следующим образом: скалярное – двумя точками между сомножителями, векторное – наклонным крестом, тензорное произведение двух векторов – смежным расположением сомножителей, без знака между ними.

При переходе от одной системы координат x_1, x_2, x_3 к другой x'_1, x'_2, x'_3 компоненты тензора преобразуются подобно произведениям компонент (проекций) двух векторов:

$$T_{pq} = \alpha_{pr}\alpha_{qs}T'_{rs}, \quad T'_{pq} = \alpha_{rp}\alpha_{sq}T_{rs}.$$

Сложение, вычитание тензоров, умножение тензора на скаляр производится по формулам

$$\begin{aligned} (P \pm Q \pm \dots)_{pq} &= P_{pq} \pm Q_{pq} \pm \dots, \\ (\lambda P)_{pq} &= (P\lambda)_{pq} = \lambda P_{pq}. \end{aligned} \quad (24)$$

Разложение тензора на симметричную и антисимметричную части:

$$\begin{aligned} T &\equiv \frac{1}{2}(T + T^*) + \frac{1}{2}(T - T^*) = S + A, \quad S = \frac{1}{2}(T + T^*), \\ A &= \frac{1}{2}(T - T^*), \quad S_{pq} = S_{qp} = \frac{1}{2}(T_{pq} + T_{qp}), \\ A_{pq} &= -A_{qp} = \frac{1}{2}(T_{pq} - T_{qp}). \end{aligned} \quad (25)$$

Умножение вектора на тензор или тензора на вектор образует соответственно векторы $\vec{a}T$ и $T\vec{a}$ с проекциями (компонентами)

$$(\vec{a}T)_p = a_q T_{qp}, \quad (T\vec{a})_p = T_{pq} a_q, \quad p = 1, 2, 3. \quad (26)$$

(при сохранения порядка расположения сомножителей в левой в правой частях индексы суммирования q расположены по соседству). Из определения операций (26) вытекают следующие свойства:

$$\begin{aligned} \vec{a}I &= I\vec{a} = \vec{a} - \text{"единичное" свойство,} \\ S\vec{a} &= \vec{a}S, \quad (S - \text{симметричный тензор}), \end{aligned} \quad (27)$$

$$T\vec{a} = \vec{a}T^*, \quad \vec{a}T = T^*\vec{a}, \quad A\vec{a} = \vec{c} \times \vec{a}, \quad \vec{a}A = \vec{a} \times \vec{c},$$

где вектор \vec{c} , эквивалентный антисимметричному тензору A , имеет компоненты

$$c_1 = A_{32} = A_{23}^*, \quad c_2 = A_{13} = A_{31}^*, \quad c_3 = A_{21} = A_{12}^*. \quad (28)$$

Скалярное произведение двух тензоров $P : Q$ дает скаляр

$$P : Q = P_{pq}Q_{pq},$$

$$P : I = I : P = P_{pp} = P_{11} + P_{22} + P_{33}, \quad (29)$$

$$P : P = P_{pq}P_{pq} = P^2 = |P|^2 \quad \text{— квадрат модуля тензора } P.$$

Векторное произведение двух тензоров $P \times Q$ определяет вектор с проекциями

$$(P \times Q)_p = P_{qs}Q_{sr} - P_{rs}Q_{sq} \quad (30)$$

(круговая перестановка индексов $p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow p \rightarrow \dots$, суммирование по s).

Условие симметрии тензора P :

$$P \times I = 0. \quad (31)$$

Мультипликативный тензор, диада $\vec{a} \otimes \vec{b}$ получается в результате диадного умножения двух векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}, \quad (\vec{a} \otimes \vec{b})^* = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Тензорное произведение двух тензоров PQ определяет тензор

$$(PQ)_{pq} = P_{pr}Q_{rq}, \quad p, q = 1, 2, 3 \quad (\text{суммирование по } r), \quad (33)$$

$$(PI)_{pq} = P_{pr}I_{rq} = P_{pq}, \quad PI = IP = P.$$

Инварианты тензора 2-го ранга:

$$I_1 = T_{pp} = T_{11} + T_{22} + T_{33} \quad \text{— первый, линейный, инвариант,}$$

$$I_2 = T_{pq}T_{pq} = |T|^2 \quad \text{— второй, квадратичный, инвариант,} \quad (34)$$

$$I_3 = \det(T_{pq}) \quad \text{— третий, кубичный, инвариант.}$$

Разложение тензора T на сферическую $T^{(s)}$ и девиаторную $T^{(d)}$ части:

$$T \equiv \frac{1}{3}I_1I + \left(T - \frac{1}{3}I_1I\right) = T^{(s)} + T^{(d)}, \quad (35)$$

$$\frac{1}{3}I_1I = T^{(s)}, \quad T - \frac{1}{3}I_1I = T^{(d)}.$$

Дифференциальная диада, или дифференциальный тензор обозначается $\nabla \vec{a}$ (условно — градиент вектора), сопряженная с нею диада — $(\nabla \vec{a})^*$, дивергенция поля тензора T — $\text{div } T$.

Дифференциальная диада $\nabla \vec{a}$ и сопряженная с ней диада $(\nabla \vec{a})^*$ определены следующим образом:

$$\nabla \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad (\nabla \vec{a})^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Тензоры $\nabla \vec{a}$ и $(\nabla \vec{a})^*$ можно разложить на симметричную и антисимметричную части:

$$\begin{aligned}\nabla \vec{a} &\equiv \frac{1}{2} (\nabla \vec{a} + (\nabla \vec{a})^*) + \frac{1}{2} (\nabla \vec{a} - (\nabla \vec{a})^*) = S + A, \\ (\nabla \vec{a})^* &\equiv \frac{1}{2} ((\nabla \vec{a})^* + \nabla \vec{a}) + \frac{1}{2} ((\nabla \vec{a})^* - \nabla \vec{a}) = S + A^*.\end{aligned}\quad (37)$$

Симметричная часть S называется тензором скоростей деформаций $D(\vec{a})$ поля вектора \vec{a} и выражается равенством

$$S = D(\vec{a}) = \frac{1}{2} (\nabla \vec{a} + (\nabla \vec{a})^*), \quad S_{pq} = (D(\vec{a}))_{pq} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_q}{\partial x_p} + \frac{\partial a_p}{\partial x_q} \right). \quad (38)$$

Дивергенция тензора $\operatorname{div} T$ определена равенствами

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} T)_x &= \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z}, \\ (\operatorname{div} T)_y &= \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z}, \\ (\operatorname{div} T)_z &= \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}, \\ \operatorname{div} (\vec{a} \otimes \vec{b}) &= (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + \vec{b} \operatorname{div} \vec{a}.\end{aligned}\quad (39)$$

Тензорные аналоги интегральных формул раздела 1.1.1.2 имеют вид

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \vec{n} T d\sigma &= \int_{\Omega} \operatorname{div} T dx, \\ \int_{\partial\Omega} (n_x T_{xx} + n_y T_{yx} + n_z T_{zx}) d\sigma &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} \right) dx, \\ \int_{\partial\Omega} (n_x T_{xy} + n_y T_{yy} + n_z T_{zy}) d\sigma &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} \right) dx, \\ \int_{\partial\Omega} (n_x T_{xz} + n_y T_{yz} + n_z T_{zz}) d\sigma &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) dx.\end{aligned}\quad (40)$$

2.3 Упражнения

1. Выписать операции ∇ , Δ над скалярной функцией φ в ортогональных криволинейных координатах.
2. Выписать операции div , rot над векторным полем \vec{a} в цилиндрической системе координат.
3. Сколько различных составляющих содержится в симметричном тензоре третьего ранга?
4. Показать, что антисимметричный тензор третьего ранга имеет только шесть отличных от нуля составляющих, одинаковых по величине.

5. Как будут выглядеть компоненты векторного поля, образованного в результате применения операции div к диаде T в ортогональных криволинейных координатах?
6. Выписать компоненты тензора скоростей деформаций $D(\vec{a})$ поля вектора \vec{a} в цилиндрической системе координат.

3 Математические модели динамики смесей вязких сжимаемых жидкостей

Система динамических уравнений, описывающих движение многокомпонентных смесей жидкостей, состоит из следующих законов сохранения для каждой компоненты смеси:

- 1) уравнения сохранения массы (уравнения неразрывности),
- 2) закона сохранения импульса,
- 3) закона сохранения энергии.

Эта совокупность уравнений, как правило, оказывается незамкнутой, и для того чтобы на ее основе изучать различные задачи о движении смесей жидкостей, необходимо ее дополнять соотношениями, характеризующими определенные свойства данной среды.

Рассмотрим указанные выше законы сохранения в интегральной и дифференциальной формах.

3.1 Уравнения сохранения для составляющих смеси

Многокомпонентную среду образуют N сред (компонентов), перемешанных так, что в каждом элементарном объеме присутствуют частицы, принадлежащие всем компонентам (составляющим). Для каждой из этих компонент в каждой точке объема можно ввести в рассмотрение приведенную плотность ρ_i (масса i -ой компоненты в единице объема среды), скорость $\vec{u}^{(i)}$ ($i = 1, \dots, N$) и другие кинематические и динамические параметры, относящиеся к своей составляющей смеси. Таким образом, в каждой точке объема, занятого смесью, будут определены N плотностей ρ_i , N скоростей $\vec{u}^{(i)}$ и т. д.

Уравнения неразрывности. Феноменологический подход к описанию многокомпонентных смесей связан с представлением средних величин (ρ_i , $\vec{u}^{(i)}$ и др.) как непрерывно распределенных в занимаемом объеме Ω (ограниченная область евклидова пространства \mathbb{R}^3), ограниченном поверхностью $\partial\Omega$ с единичной внешней нормалью \vec{n} .

Тогда уравнения сохранения массы для i -ой составляющей смеси можно записать следующим образом:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} dx = - \int_{\partial\Omega} \rho_i (\vec{u}^{(i)} \cdot \vec{n}) d\sigma + \int_{\Omega} h_i dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (41)$$

где t – время, h_i характеризует интенсивность перехода массы из одной компоненты смеси в другую в единицу объема и в единицу времени в результате

процессов смешения, ионизации, химических реакций и т. п., причем из закона сохранения массы при различных физико-химических превращениях следует, что

$$\sum_{i=1}^N h_i = 0. \quad (42)$$

Применяя к первому интегралу в правой части (41) формулу Гаусса-Остроградского (см. формулу (18)):

$$\int_{\partial\Omega} \rho_i(\vec{u}^{(i)} \cdot \vec{n}) d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)}) dx, \quad (43)$$

ввиду произвольности объема Ω , получаем дифференциальные уравнения сохранения массы для каждой составляющей смеси:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = h_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (44)$$

В частном случае $h_i = 0$, $i = 1, \dots, N$ уравнения (44) известны в механике как уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (45)$$

Уравнения сохранения импульсов. Уравнения баланса импульсов каждой составляющей смеси можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \vec{u}^{(i)}) dx &= - \int_{\partial\Omega} \rho_i \vec{u}^{(i)} (\vec{u}^{(i)} \cdot \vec{n}) d\sigma + \int_{\partial\Omega} (P^{(i)} \cdot \vec{n}) d\sigma + \\ &+ \int_{\Omega} \rho_i \vec{f}^{(i)} dx + \int_{\Omega} \vec{J}^{(i)} dx, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (46)$$

где первое слагаемое в правой части (46) соответствует притоку импульса i -ой составляющей через поверхность $\partial\Omega$; второе и третье слагаемые – воздействию внешних поверхностных и массовых сил, приходящихся на i -ую компоненту и характеризующихся тензором $P^{(i)}$ и вектором $\vec{f}^{(i)}$; наконец, $\vec{J}^{(i)}$ представляет интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси, причем из закона сохранения импульса при различных взаимодействиях, аналогично (42), имеет место

$$\sum_{i=1}^N \vec{J}^{(i)} = 0. \quad (47)$$

Интегральным соотношениям (46), после применения формулы Гаусса-Остроградского, соответствуют дифференциальные уравнения сохранения импульсов каждой составляющей:

$$\frac{\partial(\rho_i \vec{u}^{(i)})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}) = \operatorname{div} P^{(i)} + \rho_i \vec{f}^{(i)} + \vec{J}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (48)$$

С учетом уравнений неразрывности (45), уравнения (48) можно переписать в следующем виде:

$$\rho_i \frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{\partial t} + \rho_i (\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla) \vec{u}^{(i)} = \operatorname{div} P^{(i)} + \rho_i \vec{f}^{(i)} + \vec{J}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (49)$$

Уравнения сохранения энергий. Рассмотрим теперь уравнения баланса энергий каждой компоненты смеси. Обозначим через U_i удельную (отнесенную к единице массы) внутреннюю энергию i -ой составляющей смеси, $i = 1, \dots, N$. Сумма внутренней энергии и кинетической

$$E_i = \frac{1}{2} |\vec{u}^{(i)}|^2 + U_i \quad (50)$$

называется полной энергией i -ой компоненты смеси, $i = 1, \dots, N$. Тогда, уравнения сохранения энергии i -ой компоненты смеси могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i E_i) dx &= - \int_{\partial\Omega} \rho_i E_i (\vec{u}^{(i)} \cdot \vec{n}) d\sigma + \int_{\partial\Omega} \vec{c}^{(i)} \cdot \vec{n} d\sigma + \\ &+ \int_{\Omega} \rho_i \vec{f}^{(i)} \cdot \vec{u}^{(i)} dx + \int_{\Omega} \vec{J}^{(i)} \cdot \vec{u}^{(i)} dx + \int_{\Omega} \Gamma_i dx - \\ &- \int_{\partial\Omega} \vec{q}^{(i)} \cdot \vec{n} d\sigma, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (51)$$

где первое слагаемое в правой части (51) соответствует притоку энергии i -ой составляющей через поверхность $\partial\Omega$; второе и третье слагаемые – работе внешних поверхностных (характеризуемой вектором $\vec{c}^{(i)}$) (в частном случае $\vec{c}^{(i)} \cdot \vec{n} = (P^{(i)} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u}^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$) и массовых сил, приходящихся на i -ую составляющую смеси; далее, Γ_i представляет интенсивность обмена энергией между компонентами; пятое слагаемое представляет приток тепла через поверхность $\partial\Omega$, характеризуемый вектором $\vec{q}^{(i)}$. Аналогично (42) и (47), из закона сохранения энергии при различных взаимодействиях имеет место формула

$$\sum_{i=1}^N (\Gamma_i + \vec{J}^{(i)} \cdot \vec{u}^{(i)}) = 0. \quad (52)$$

Интегральным соотношениям (51), после применения формулы Гаусса-Остроградского, соответствуют дифференциальные уравнения сохранения полных энергий каждой составляющей смеси:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_i E_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i E_i \vec{u}^{(i)}) &= \operatorname{div}(P^{(i)} \cdot \vec{u}^{(i)}) + \rho_i \vec{f}^{(i)} \cdot \vec{u}^{(i)} + \\ &+ \vec{J}^{(i)} \cdot \vec{u}^{(i)} + \Gamma_i - \operatorname{div} \vec{q}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (53)$$

С учетом обозначений (50) и уравнений (45) и (49), получаем из (53) дифференциальные уравнения сохранения внутренних энергий каждой компоненты смеси:

$$\frac{\partial(\rho_i U_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i U_i \vec{u}^{(i)}) = P^{(i)} : \nabla \vec{u}^{(i)} + \Gamma_i - \operatorname{div} \vec{q}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (54)$$

Тем самым, получены уравнения (45), (48) и (54), которые математически описывают перечисленные в начале раздела законы сохранения. При изучении движения определенной сплошной среды уравнения (44), (48) и (54) конкретизируются заданием вектора массовых сил $\vec{f}^{(i)}$ для i -ой компоненты смеси и определяющих термодинамических и реологических соотношений, замыкающих систему уравнений (44), (48) и (54).

Следует отметить, что единого подхода в конкретизации термодинамических и реологических соотношений при моделировании движения смесей жидкостей на сегодняшний день нет. Поэтому, выделим два основных – это так называемые "многоскоростной" и "односкоростной" подходы.

В данном курсе будем рассматривать модели движения двухкомпонентных (бинарных) смесей. Обобщение результатов для случая смесей из трех и более компонент принципиальных трудностей не вызывает.

3.2 Многоскоростная модель движения смесей вязких сжимаемых жидкостей

Одним из вариантов реологических соотношений в многоскоростной модели смеси являются равенства

$$P^{(i)} = -p_i I + \sigma^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

$$\sigma^{(i)} = \sum_{j=1}^2 \left(2\mu_{ij} D(\vec{u}^{(j)}) + \lambda_{ij} \operatorname{div} \vec{u}^{(j)} I \right), \quad i = 1, 2,$$
(55)

где p_i – давление i -ой составляющей смеси, $\sigma^{(i)}$ – вязкая часть тензора напряжений i -ой компоненты смеси, D – тензор скоростей деформаций $\left(D(\vec{w}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial x} \right)^* \right) \right)$, I – единичный тензор, коэффициенты вязкости λ_{ij} и μ_{ij} в общем случае могут зависеть от термодинамических переменных.

Принимая гипотезу локального равновесия каждой составляющей смеси, мы можем ввести в рассмотрение температуру θ_i i -ой компоненты смеси и, наряду с внутренней энергией U_i , использовать и другие термодинамические функции для каждой компоненты: энтропию s_i , энтальпию i_i и т. д. Составляющие компоненты смеси представляют собой двухпараметрические среды (термодинамические функции компоненты зависят только от двух термодинамических параметров состояния), т. е.

$$U_i = U_i(\rho_i, \theta_i), \quad p_i = p_i(\rho_i, \theta_i), \quad s_i = s_i(\rho_i, \theta_i), \quad i = 1, 2,$$
(56)

причем справедливы соотношения Гиббса

$$\theta_i ds_i = dU_i + p_i d \left(\frac{1}{\rho_i} \right), \quad i = 1, 2.$$
(57)

Из равенств (57), с учетом предположений (56), следуют соотношения

$$p_i = \theta_i \frac{\partial p_i}{\partial \theta_i} + \rho_i^2 \frac{\partial U_i}{\partial \rho_i}, \quad i = 1, 2.$$
(58)

Далее, в соответствии с обобщенным законом Фурье, зададим вектор теплового потока $\vec{q}^{(i)}$ i -ой составляющей смеси

$$\vec{q}^{(i)} = -k_i \nabla \theta_i, \quad i = 1, 2, \quad (59)$$

где $k_i = k_i(\rho_i, \theta_i)$ – теплопроводность i -ой компоненты смеси.

Что касается выражений, определяющих интенсивность обмена импульсом $\vec{J}^{(i)}$ и энергией Γ_i между составляющими смеси, то их обычно считают пропорциональными разности скоростей и температур:

$$\vec{J}^{(i)} = (-1)^{i+1} c (\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}), \quad c = const > 0, \quad i = 1, 2, \quad (60)$$

$$\Gamma_i = (-1)^{i+1} b (\theta_2 - \theta_1) + \frac{c}{2} |\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)}|^2, \quad i = 1, 2, \quad b = const > 0. \quad (61)$$

Таким образом, замкнутая модель для описания движения двухкомпонентных смесей жидкостей может быть образована из уравнений (45), (48), (53), (55)-(56), (58)-(61), к которым нужно добавить выражения для k_i , λ_{ij} и $\mu_{i,j}$, $i, j = 1, 2$.

3.3 Односкоростная модель движения смесей вязких сжимаемых жидкостей

Так называемый "односкоростной" подход обычно используется при описании так называемых гомогенных смесей, состоящих из хорошо перемешанных компонент в жидкой или газообразной фазе, а также растворов.

Параметры, характеризующие смесь в целом, принято определять следующим образом:

плотность смеси:
$$\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i,$$

скорость (барицентрическая) центра масс смеси:
$$\rho \vec{u} = \sum_{i=1}^N \rho_i \vec{u}^{(i)}.$$

Тогда концентрация i -ой составляющей смеси определяется формулой:
$$c_i = \frac{\rho_i}{\rho}, \quad i = 1, \dots, N.$$

В случае бинарной ($N = 2$) смеси положим $c_1 = c$. С учетом равенств $c_1 + c_2 = 1$ получим, что $c_2 = 1 - c$.

Иногда удобно пользоваться так называемыми диффузионными скоростями

$$\vec{v}^{(i)} = \vec{u}^{(i)} - \vec{u}, \quad i = 1, \dots, N,$$

представляющими собой скорости движения составляющих относительно центра масс или среды в целом.

Суммируя уравнения сохранения массы для компонент (44), с учетом соотношения (42) получим закон сохранения массы для смеси в целом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0. \quad (62)$$

Таким образом, уравнение неразрывности для смеси в целом имеет обычный вид, то есть оно "не чувствует" относительного движения составляющих.

Распределение концентрации (для простоты рассматривается бинарная смесь), характеризующей состав смеси, с течением времени изменяется. Изменение концентрации происходит двумя путями. Во-первых, при микроскопическом движении жидкости каждый данный ее участок передвигается как целое с неизменным составом. Этим путем осуществляется чисто механическое перемешивание жидкости; хотя состав каждого передвигающегося участка жидкости не меняется, но в каждой данной неподвижной точке пространства концентрация находящейся в этом месте жидкости будет со временем меняться. Такое изменение концентрации является термодинамически обратимым процессом и не ведет к диссипации энергии. Во-вторых, изменение состава может происходить путем молекулярного переноса веществ смеси из одного участка жидкости в другой. Выравнивание концентрации путем такого непосредственного изменения состава каждого из участков жидкости называется диффузией. Диффузия является процессом необратимым и представляет собой наряду с теплопроводностью и вязкостью один из источников диссипации энергии в жидкой смеси.

При отсутствии диффузии состав каждого данного элемента жидкости оставался бы неизменным при его передвижении. Это означает, что полная производная $\frac{dc}{dt}$ была бы равна нулю, т. е. имело бы место уравнение

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla c = 0,$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$ – барицентрическая субстанциональная производная. Это уравнение можно записать, используя (62) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c) + \operatorname{div}(\rho c \vec{u}) = 0,$$

т. е. в виде уравнения неразрывности для одного из веществ смеси (ρc есть масса одного из веществ смеси в единице объема). Интегрируя это уравнение по произвольному объему Ω , получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho c \, dx = - \int_{\partial\Omega} \rho c \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\sigma,$$

которое означает, что изменение количества данного вещества в объеме Ω равно количеству этого вещества, переносимому движущейся жидкостью через границу объема.

При наличии диффузии, наряду с потоком $\rho c \vec{u}$ данного вещества вместе со всей жидкостью имеется еще и другой поток, который приводит к переносу веществ в смеси даже при отсутствии движения жидкости в целом. Обозначим через \vec{J} плотность этого диффузионного потока, т. е. количество рассматриваемого вещества, переносимого путем диффузии в единицу времени через единицу поверхности (сумма плотностей потоков обоих веществ должна быть равна $\rho \vec{u}$, поэтому, если плотность потока одного из них есть $\rho c \vec{u} + \vec{J}$, то другого – $\rho(1-c)\vec{u} - \vec{J}$).

Тогда закон изменения количества этого вещества в произвольном объеме Ω имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho c \, dx = - \int_{\partial\Omega} \rho c \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\sigma - \int_{\partial\Omega} \vec{J} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c) + \operatorname{div}(\rho c \vec{u}) = -\operatorname{div} \vec{J}. \quad (63)$$

Обращаясь к уравнению неразрывности (45) для данной компоненты смеси, видим, что

$$\vec{J} = \rho c(\vec{u}^{(1)} - \vec{u}).$$

Если скорость $\vec{u}^{(1)}$ данной компоненты определить через среднюю скорость \vec{u} с помощью закона Фика:

$$\vec{u}^{(i)} = \vec{u} - \frac{D}{c} \nabla c, \quad (64)$$

то

$$\vec{J} = -\rho D \nabla c, \quad (65)$$

где $D > 0$ называют коэффициентом диффузии; он определяет диффузионный поток при наличии одного только градиента концентрации компоненты c .

Таким образом, вместо системы (44) (или (45)), описывающей закон сохранения массы для каждой из компонент смеси, в случае бинарной смеси используется эквивалентная ей система, состоящая из уравнения неразрывности для смеси в целом (62) и уравнения для концентрации (63).

Закон сохранения импульса смеси в целом рассматривается в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \operatorname{div} P' + \rho \vec{F}, \quad (66)$$

$$P' = -pI + 2\mu D(\vec{u}) + \lambda \operatorname{div} \vec{u} I, \quad (67)$$

где p – давление, I – единичный тензор, $D(\vec{u})$ – тензор скоростей деформаций, определяемый вектором барицентрической скорости \vec{u} .

Закон сохранения энергии пишется в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E \vec{u}) = \operatorname{div}(\vec{u} P') - \operatorname{div} \vec{q}, \quad (68)$$

где $E = \rho \left(U + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 \right)$ – полная энергия смеси, U – удельная внутренняя энергия, \vec{q} – вектор теплового потока, возникающий (как и диффузионный поток \vec{J}) в результате наличия в жидкости градиентов концентрации и температуры.

Один из вариантов задания вектора \vec{q} :

$$\vec{q} = -k \nabla \theta,$$

где $\theta > 0$ – температура смеси, $k > 0$ – коэффициент теплопроводности смеси.

Уравнение энергии (68) может быть преобразовано, если воспользоваться термодинамическим соотношением для смеси двух веществ:

$$dU = \theta ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho + mdc. \quad (69)$$

Здесь m – соответствующим образом определенный химический потенциал смеси, s – энтропия.

В силу уравнений неразрывности (62) и импульса (66) из уравнения (68) следует уравнение для внутренней энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \operatorname{div}(\rho U \vec{u}) = P' : \nabla \vec{u} - \operatorname{div} \vec{q} - \rho \vec{u} \cdot \vec{F}. \quad (70)$$

Из (69) и (70) получаем уравнение, определяющее изменение энтропии

$$\rho \theta \frac{\partial s}{\partial t} + \theta(\rho \vec{u} \cdot \nabla) s = p \operatorname{div} \vec{u} + P' : \nabla \vec{u} - \operatorname{div} \vec{q} + m \operatorname{div} \vec{J} - \rho \vec{u} \cdot \vec{F}. \quad (71)$$

Мы получили, таким образом, полную систему гидродинамических уравнений для жидких смесей. Этими уравнениями являются: уравнение неразрывности (закон сохранения массы) (62), уравнения движения (закон сохранения импульса) (66), (67), уравнение неразрывности для одной из компонент смеси (63), уравнение, описывающее изменение энтропии (71). Отметим, что уравнения (63) и (71) становятся определенными при подстановке \vec{J} и \vec{q} , выраженных через градиенты температуры и концентрации.

3.4 Упражнения

1. Доказать, что лагранжева форма уравнения неразрывности i -ой компоненты смеси и эйлера его форма эквивалентны.
2. Выписать уравнение неразрывности i -ой компоненты смеси в ортогональных криволинейных координатах, если обе компоненты несжимаемы.
3. Выписать уравнение баланса импульса i -ой компоненты смеси в цилиндрической системе координат, если обе компоненты несжимаемы, а движение является установившемся.
4. Вывести математический эквивалент второго закона термодинамики для "многоскоростной" модели смеси, предписывающего положительность производства энтропии.
5. Вывести математический эквивалент второго закона термодинамики для "односкоростной" модели смеси.

4 Стационарное движение двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей между двумя параллельными стенками

Рассмотрим модель механики сплошной среды, описывающую изотермическое движение двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей между двумя параллельными стенками. Будем рассматриваемую среду считать несжимаемой, т.е. примем что

$$\rho_i = \text{const} > 0, \quad i = 1, 2 \quad (72)$$

и движение предполагать установившимся (стационарным)

$$\frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (73)$$

При этих предположениях, уравнения неразрывности (45) и баланса импульса (49) примут соответственно вид

$$\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial z} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (74)$$

$$\rho_i \left(u_1^{(i)} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x} + u_2^{(i)} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial y} + u_3^{(i)} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p_i}{\partial x} + \mu_{i1} \Delta u_1^{(1)} + \mu_{i2} \Delta u_1^{(2)} + J_1^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (75)$$

$$\rho_i \left(u_1^{(i)} \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x} + u_2^{(i)} \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial y} + u_3^{(i)} \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p_i}{\partial y} + \mu_{i1} \Delta u_2^{(1)} + \mu_{i2} \Delta u_2^{(2)} + J_2^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (76)$$

$$\rho_i \left(u_1^{(i)} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x} + u_2^{(i)} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} + u_3^{(i)} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p_i}{\partial z} + \mu_{i1} \Delta u_3^{(1)} + \mu_{i2} \Delta u_3^{(2)} + J_3^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (77)$$

где $J_k^{(i)} = (-1)^{i+1} c \left(u_k^{(2)} - u_k^{(1)} \right)$, $k = 1, 2, 3$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Относительно коэффициентов вязкости μ_{ij} , $i, j = 1, 2$ предполагается, что $\mu_{11} > 0$, $\mu_{22} > 0$, $4\mu_{11}\mu_{22} - (\mu_{12} + \mu_{21})^2 > 0$.

Зачастую в моделях механики сплошных сред гипотеза о геометрии линий тока позволяет получить решения рассматриваемых задач в аналитической форме. Ниже показывается, что аналогичное положение дел имеет место и в рассматриваемой модели смесей вязких несжимаемых сред.

Рассмотрим прямолинейно-параллельное движение смесей вязких несжимаемых жидкостей между двумя параллельными стенками, простирающимися в направлении осей x_1 и x_3 до бесконечности (рис.1).

Рис. 4.1. К течению смесей вязких жидкостей между параллельными стенками

Обозначим расстояние между стенками через $2h$. Начало оси x_2 возьмем на средней линии между стенками. Из предположения о плоскопараллельности движения и из уравнений (74) следует, что

$$\vec{u}^{(i)} = (u^{(i)}, 0, 0), \quad \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_1} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (78)$$

В этом случае уравнения (75)-(77) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial x_1} = \mu_{i1} \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_3^2} \right) + \mu_{i2} \left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_3^2} \right) + \\ + (-1)^{i+1} c (u^{(2)} - u^{(1)}), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (79)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_2} = \frac{\partial p_i}{\partial x_3} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (80)$$

Из уравнений (78) и (80) непосредственно вытекает, что

$$u^{(i)} = u^{(i)}(x_2, x_3), \quad p_i = p_i(x_1), \quad i = 1, 2. \quad (81)$$

Ясно, что равенства (79) могут иметь место тогда и только тогда, когда обе части уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial x_1} = \mu_{i1} \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_3^2} \right) + \mu_{i2} \left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_3^2} \right) + \\ + (-1)^{i+1} c (u^{(2)} - u^{(1)}), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

являются постоянной величиной, которую обозначим через k_i , $i = 1, 2$.

Из равенств $\frac{\partial p_i}{\partial x_1} = k_i$ получаем, что

$$p_i = k_i x_1 + C_i, \quad i = 1, 2. \quad (82)$$

Для полного определения вида прямой (82), характеризующей изменение давления вдоль оси x_1 для i -ой составляющей смеси, т.е. для определения постоянных k_i и C_i , достаточно задать значения давлений p_i^1 и p_i^2 в каких либо двух сечениях объема, занимаемого смесью (например, при $x_1 = 0$ и $x_1 = l$).

Рассмотрим теперь задачу об определении скорости движения $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ каждой из рассматриваемых компонент смеси жидкостей между двумя параллельными стенками при условии, что постоянные k_i заданы. Для простоты примем, что $k_1 = k_2 = k$.

Для определения $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ на основании (79) и (82) имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mu_{i1} \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_3^2} \right) + \mu_{i2} \left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_3^2} \right) + \\ + (-1)^{i+1} c (u^{(2)} - u^{(1)}) = k, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (83)$$

Уравнения (83) необходимо дополнить граничными условиями. Предположим, что нижняя граница (стенка) перемещается с постоянной скоростью

V_1 , а верхняя - со скоростью V_2 . Тогда, мы приходим к следующим условиям на границе:

$$u^{(i)}|_{x_2=-h} = V_1, \quad u^{(i)}|_{x_2=h} = V_2, \quad i = 1, 2. \quad (84)$$

Решение задачи (83)-(84) сводится к рассмотрению следующих двух случаев.

1) Если $\mu_{12} + \mu_{22} \neq 0$, то сначала определим функцию $u^{(1)}$ как решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_2^2} - c \frac{\delta}{2h} u^{(1)} &= \frac{k}{\Delta} (\mu_{22} - \mu_{12}) - \frac{c}{\Delta} \psi - \frac{ck}{\Delta} x_2^2, \\ \psi &= \frac{\delta}{2h} (V_2 - V_1) x_2 + \frac{\delta}{2} (V_1 + V_2) - kh^2 \end{aligned} \quad (85)$$

при граничных условиях

$$u^{(1)}|_{x_2=-h} = V_1, \quad u^{(1)}|_{x_2=h} = V_2. \quad (86)$$

Здесь $\delta = \mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{21} + \mu_{22} > 0$, $\Delta = \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21} > 0$.

Краевая задача (85)-(86) имеет единственное решение, определяемое формулой

$$u^{(1)} = C_1 e^{\sqrt{c \frac{\delta}{\Delta}} x_2} + C_2 e^{-\sqrt{c \frac{\delta}{\Delta}} x_2} + Ax_2^2 + Bx_2 + C, \quad (87)$$

где

$$A = \frac{k}{\delta}, \quad B = \frac{1}{2h} (V_2 - V_1), \quad C = \frac{2k\Delta}{c\delta^2} - \frac{k}{c\delta} (\mu_{22} - \mu_{12}) + \frac{1}{2} (V_1 + V_2) - \frac{kh^2}{\delta},$$

$$C_1 = e^{\sqrt{c \frac{\delta}{\Delta}} h} F_1 - e^{3\sqrt{c \frac{\delta}{\Delta}} h} \frac{F_2 - e^{2\sqrt{c \frac{\delta}{\Delta}} h} F_1}{1 - e^{4\sqrt{c \frac{\delta}{\Delta}} h}}, \quad C_2 = e^{-\sqrt{c \frac{\delta}{\Delta}} h} \frac{F_2 - e^{2\sqrt{c \frac{\delta}{\Delta}} h} F_1}{1 - e^{4\sqrt{c \frac{\delta}{\Delta}} h}},$$

$$F_1 = V_1 - Ah^2 + Bh - C, \quad F_2 = V_2 - Ah^2 - Bh - C.$$

Зная теперь $u^{(1)}$, найдем $u^{(2)}$ из следующего выражения:

$$u^{(2)} = \frac{1}{\mu_{12} + \mu_{22}} (\psi + kx_2^2) - \frac{\mu_{11} - \mu_{21}}{\mu_{12} + \mu_{22}} u^{(1)}. \quad (88)$$

2) Если $\mu_{12} + \mu_{22} = 0$, то для определения $u^{(1)}$, мы приходим к следующей краевой задаче:

$$(\mu_{11} + \mu_{21}) \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_2^2} = 2k, \quad (89)$$

$$u^{(1)}|_{x_2=-h} = V_1, \quad u^{(1)}|_{x_2=h} = V_2. \quad (90)$$

Так как в этом случае $\mu_{12} + \mu_{21} \neq 0$, то решение задачи (89)-(90) единственно и имеет вид

$$u^{(1)} = \frac{k}{\mu_{11} + \mu_{21}} x_2^2 + C_1 x_2 + C_2, \quad (91)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{2h} (V_2 - V_1), \quad C_2 = \frac{1}{2} (V_1 + V_2) - \frac{kh_2^2}{\mu_{11} + \mu_{21}}.$$

Далее, определим функцию $u^{(2)}$ как решение краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_2^2} - \frac{c}{\mu_{22}} u^{(2)} = \frac{k}{\mu_{22}} \frac{\mu_{11} - \mu_{21}}{\mu_{11} + \mu_{21}} - \frac{ck}{\mu_{22}} \frac{x_2^2}{\mu_{11} + \mu_{21}} - \frac{c}{2\mu_{22}h} (V_2 - V_1)x_2 - \frac{c}{2\mu_{22}} (V_1 + V_2) + \frac{ckh^2}{\mu_{22}(\mu_{11} + \mu_{21})}, \quad (92)$$

$$u^{(2)}|_{x_2=-h} = V_1, \quad u^{(2)}|_{x_2=h} = V_2, \quad (93)$$

общее решение которой представляется в виде

$$u^{(2)} = C_1 e^{\sqrt{\frac{c}{\mu_{22}}} x_2} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{c}{\mu_{22}}} x_2} + Ax^2 + Bx + C, \quad (94)$$

где

$$A = \frac{k}{\mu_{11} + \mu_{21}}, \quad B = \frac{1}{2h} (V_2 - V_1), \quad C = \frac{2k}{c} \frac{\mu_{22}}{\mu_{11} + \mu_{21}} + \frac{1}{2} (V_1 + V_2) - \frac{kh^2}{\mu_{11} + \mu_{21}} - \frac{k}{c} \frac{\mu_{11} - \mu_{21}}{\mu_{11} + \mu_{21}},$$

$$C_1 = e^{\sqrt{\frac{c}{\mu_{22}}} h} F_1 - e^{3\sqrt{\frac{c}{\mu_{22}}} h} \frac{F_2 - e^{2\sqrt{\frac{c}{\mu_{22}}} h} F_1}{1 - e^{4\sqrt{\frac{c}{\mu_{22}}} h}}, \quad C_2 = e^{-\sqrt{\frac{c}{\mu_{22}}} h} \frac{F_2 - e^{2\sqrt{\frac{c}{\mu_{22}}} h} F_1}{1 - e^{4\sqrt{\frac{c}{\mu_{22}}} h}},$$

$$F_1 = V_1 - Ah^2 + Bh - C, \quad F_2 = V_2 - Ah^2 - Bh - C.$$

Таким образом задача о движении двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей между двумя вращающимися цилиндрами полностью решена.

Заметим, что если в уравнениях (75)-(77) мы не будем брать в расчет слагаемые, отвечающие за обмен импульсом между различными составляющими смеси (т.е. слагаемые $(-1)^{i+1} c(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)})$), то решение задачи (83)-(84) в этом случае имеет следующий вид:

$$\bar{u}^{(1)} = -\frac{k}{2\Delta} (\mu_{22} - \mu_{12})(h^2 - x_2^2) + \frac{1}{2h} (V_2 - V_1)x_2 + \frac{1}{2} (V_1 + V_2), \quad (95)$$

$$\bar{u}^{(2)} = -\frac{k}{2\Delta} (\mu_{11} - \mu_{21})(h^2 - x_2^2) + \frac{1}{2h} (V_2 - V_1)x_2 + \frac{1}{2} (V_1 + V_2). \quad (96)$$

Проведем сравнительный анализ результатов доставляемых предположенной моделью смеси и классической моделью, описывающей течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными стенками. Предположим, что обе компоненты смеси физически неразличимы, т.е. $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu$, $\mu_{12} = \mu_{21} = 0$. Тогда, из (87), (88), (95) и (96) следует, что

$$u^{(1)} = u^{(2)} = \bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(2)} = -\frac{k}{2\mu} (h^2 - x_2^2) + \frac{1}{2h} (V_2 - V_1)x_2 + \frac{1}{2} (V_1 + V_2). \quad (97)$$

Ясно, что картина движения такой смеси ничем не отличается от течения вязкой несжимаемой жидкости с теми же свойствами. Также сохраняется все качественные зависимости (расход, средняя и максимальная скорость движения, коэффициент сопротивления и др.) присущие классической модели, описывающей движение вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными стенками.

Теперь, выясним вопрос о влиянии на физическую картину течения смеси слагаемых, ответственных за обмен импульсом между ее составляющими. В соответствии с этим зададим значения коэффициентов вязкости $\mu_{11} = 0.1$, $\mu_{12} = 0.02$, $\mu_{21} = 0.01$, $\mu_{22} = 0.3$; значения перепада давления - $k = 200$; расстояние между стенками - $h = 10$; стенки будем считать неподвижными, т.е. $V_1 = 0$, $V_2 = 0$. Построим графики функций $u^{(i)}$, $\bar{u}^{(i)}$, $i = 1, 2$, изменяя значения параметра c в пределах от 0.0001 до 0.1.

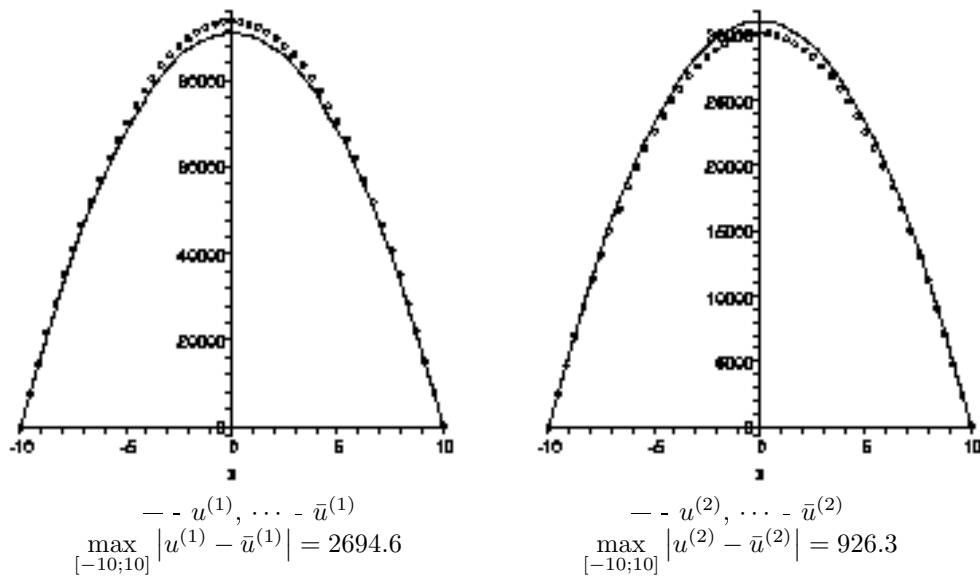


Рис. 4.2. $c = 0.0001$

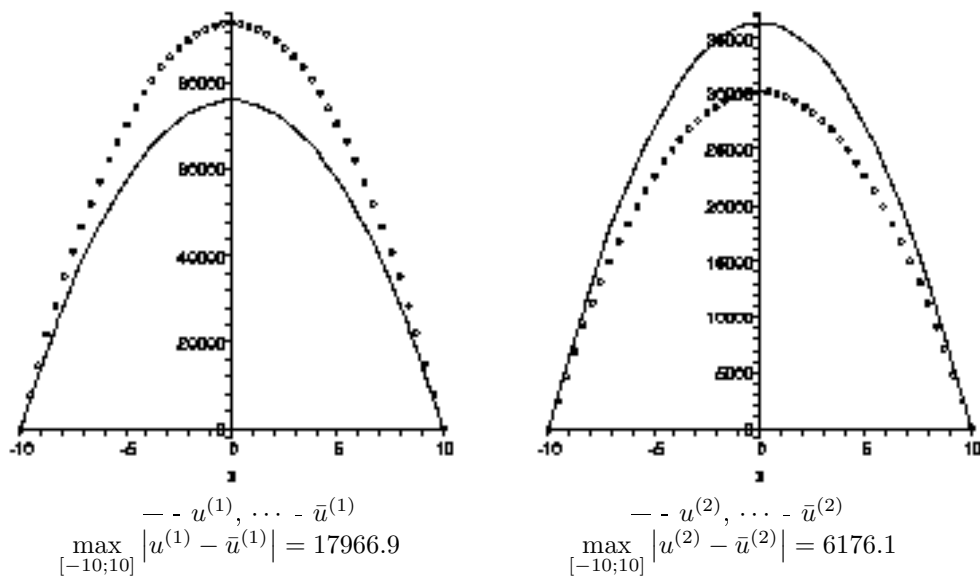


Рис. 4.3. $c = 0.001$

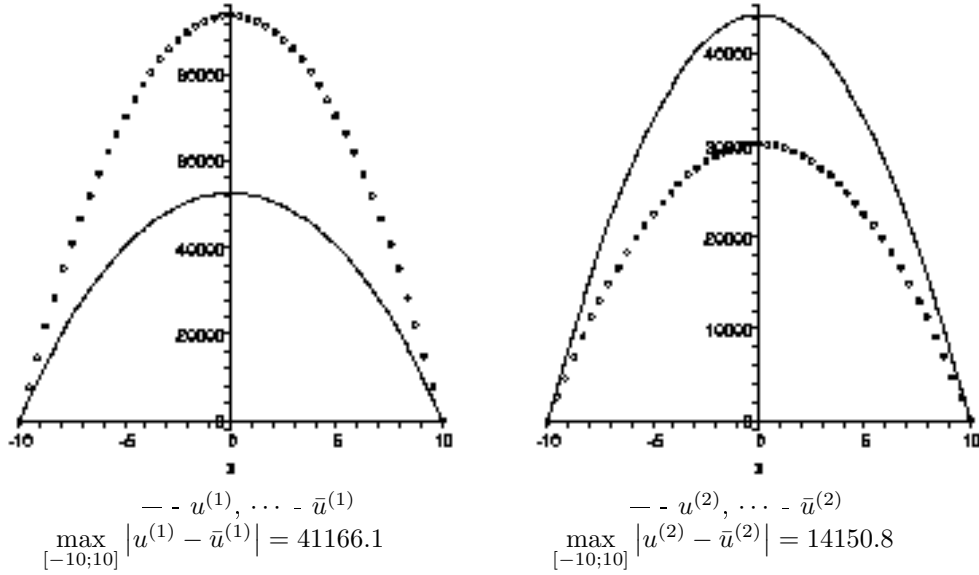


Рис. 4.4. $c = 0.01$

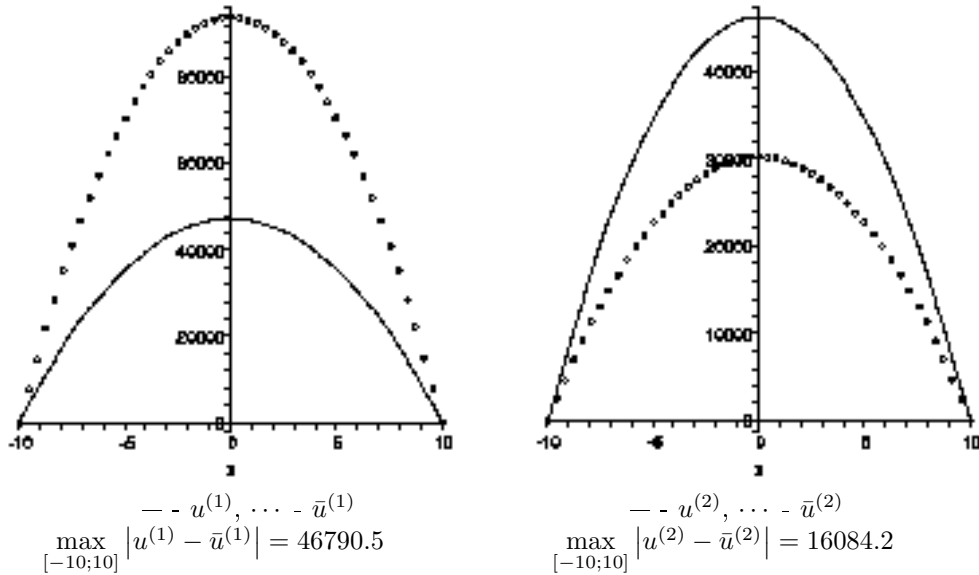


Рис. 4.5. $c = 0.1$

Из данных графиков видно, что при увеличении параметра c , максимум разности по модулю между $u^{(i)}$ и $\bar{u}^{(i)}$ возрастает. Когда c достигает значения 1, то эта разница имеет порядок 10^{27} . Таким образом, в рассматриваемой модели смеси, слагаемые ответственные за обмен импульсом между ее составляющими способны существенно влиять на физическую картину течения.

4.1 Упражнения

1. В классе гладких функций доказать единственность решения задачи (83)-(84).
2. Рассчитать объемный расход, среднюю скорость течения, максимальную скорость течения, силу трения для рассматриваемой здесь модели смеси.
3. Найти еще один способ решения задачи об установившемся течении двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей между двумя параллельными стенками. Сравнить решения.

5 Стационарное движение двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей в круглой цилиндрической трубе

Рассмотрим стационарное движение двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей в круглой цилиндрической трубе.

Выберем декартовы оси координат так, чтобы ось z была направлена по оси трубы. Обозначим через $\Sigma = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$ поперечное сечение трубы плоскостью Oxy , которое представляет собой круг радиуса R и через $C = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$ контур, ограничивающий Σ (см. Рис. 5.1). Будем искать решения, предполагая, что линии тока – прямые, параллельные оси z , иначе говоря, примем, что $u_1^{(i)} = u_2^{(i)} = 0$, $u_3^{(i)} \neq 0$, $i = 1, 2$.

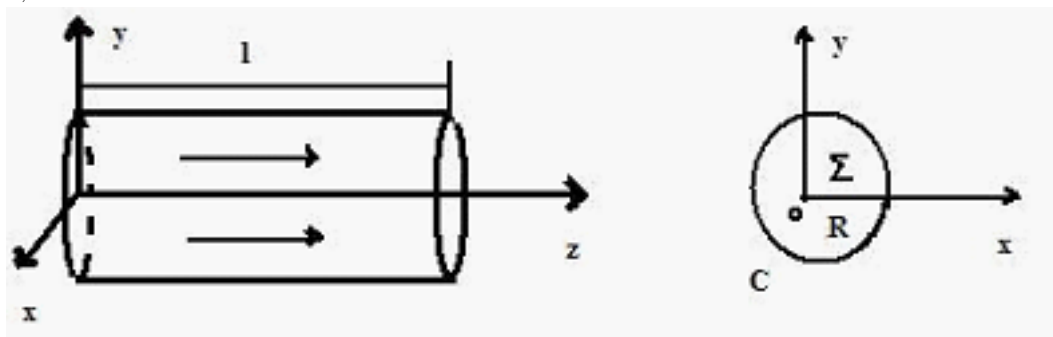


Рис. 5.1. К течению смеси вязких жидкостей в цилиндрической трубе

В этом случае система уравнений (45), (49) существенно упрощается и принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial z} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (98)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial x} = \frac{\partial p_i}{\partial y} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (99)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial z} = & \mu_{i1} \left(\frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial y^2} \right) + \mu_{i2} \left(\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial y^2} \right) + \\ & + (-1)^{i+1} c \cdot \left(u_3^{(2)} - u_3^{(1)} \right), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (100)$$

Заметим, что благодаря принятым предположениям, задача о движении смеси вязких несжимаемых жидкостей в круглой цилиндрической трубе стала линейной.

К системе уравнений (98)-(100) присоединим следующие условия:

$$u_3^{(i)}|_{x^2+y^2=R^2} = 0, \quad u_3^{(i)}|_{x^2+y^2=0} < \infty, \quad i = 1, 2, \quad (101)$$

$$p_i|_{z=0} = p_i^1, \quad p_i|_{z=l} = p_i^2, \quad i = 1, 2, \quad (102)$$

где $l = const > 0$.

Заметим, что из (98) и (99) непосредственно вытекает, что

$$u_3^{(i)} = u_3^{(i)}(x, y), \quad i = 1, 2 \quad (103)$$

и

$$p_i = p_i(z), \quad i = 1, 2. \quad (104)$$

Ясно, что равенство (100) может иметь место только тогда, когда обе части уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial z} = & \mu_{i1} \left(\frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial y^2} \right) + \mu_{i2} \left(\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial y^2} \right) + \\ & + (-1)^{i+1} c \cdot \left(u_3^{(2)} - u_3^{(1)} \right), \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

являются постоянными величинами.

Обозначив $\frac{\partial p_i}{\partial z}$ через $-k_i$ ($k_i = const > 0$, $i = 1, 2$), будем иметь

$$p_i = -k_i z + C_i, \quad i = 1, 2, \quad (105)$$

где C_i , $i = 1, 2$ - произвольные вещественные числа.

Величина

$$k_i = -\frac{\partial p_i}{\partial z} \quad (106)$$

представляет собой изменение давления вдоль оси трубы для i -ой компоненты смеси, отнесенное к единице длины трубы, и называется перепадом давления вдоль оси трубы i -ой составляющей смеси.

Для полного определения вида прямой (105), характеризующей изменение давления вдоль оси трубы для i -ой компоненты смеси, т.е. для определения перепадов давлений k_i и постоянных C_i , достаточно задать значения давлений p_i^1 и p_i^2 в каких-либо двух сечениях трубы (см. граничное условие (102)). Таким образом, подставляя в граничные условия (102) соотношения (105) получаем, что

$$p_i = -\frac{p_i^0 - p_i^1}{l} z + p_i^0, \quad i = 1, 2. \quad (107)$$

Рассмотрим теперь задачу об определении скорости движения каждой из рассматриваемых компонент смеси жидкостей $u_3^{(1)}$ и $u_3^{(2)}$ в трубе при условии, что перепады давлений k_i i -ой составляющей смеси заданы и равны $k = const > 0$.

Для определения $u_3^{(1)}$ и $u_3^{(2)}$ на основании (100) и (106) имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mu_{i1} \left(\frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial y^2} \right) + \mu_{i2} \left(\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial y^2} \right) + \\ + (-1)^{i+1} c \cdot (u_3^{(2)} - u_3^{(1)}) = -k, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (108)$$

которую дополним граничными условиями прилипания (101) на контуре C :

$$u_3^{(i)}|_{x^2+y^2=R^2} = 0, \quad u_3^{(i)}|_{x^2+y^2=0} < \infty, \quad i = 1, 2. \quad (109)$$

Складывая уравнения (108), получаем следующую задачу:

$$\Delta w = -2k, \quad (110)$$

$$w|_{x^2+y^2=R^2} = 0, \quad w|_{x^2+y^2=0} < \infty, \quad (111)$$

где $w = (\mu_{11} + \mu_{21}) u_3^{(1)} + (\mu_{12} + \mu_{22}) u_3^{(2)}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Эта задача имеет единственное решение, которое выглядит следующим образом:

$$w(x, y) = \frac{k}{2} (R^2 - (x^2 + y^2)). \quad (112)$$

Действительно, переходя в (110) к полярной системе координат, введя новые независимые переменные по формулам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, приходим к следующей краевой задаче:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = -2k, \quad (113)$$

$$w|_{r=R} = 0, w|_{r=0} < \infty. \quad (114)$$

Перепишав обыкновенное дифференциальное уравнение (113) в виде

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = -2kr, \quad (115)$$

получаем общее решение этого уравнения

$$w(r) = -\frac{k}{2} r^2 + C_1 \ln |r| + C_2, \quad (116)$$

где C_i , $i = 1, 2$ - произвольные постоянные. Подставляя (116) в граничные условия (114) и возвращаясь к декартовым координатам, в итоге, получаем решение (112) задачи (110)-(111).

Дальнейшее решение задачи (108)-(109) будет разделено на два этапа.

Этап 1. Пусть $\mu_{11} + \mu_{21} \neq 0$. Тогда, из (108) следует, что

$$u_3^{(1)}(x, y) = \frac{k}{2(\mu_{11} + \mu_{21})} (R^2 - (x^2 + y^2)) - \frac{\mu_{12} + \mu_{22}}{\mu_{11} + \mu_{21}} u_3^{(2)}. \quad (117)$$

Подставим (117) в первое уравнение (108) и получим следующую задачу для определения функции $u_3^{(2)}$:

$$\Delta u_3^{(2)} - Au_3^{(2)} = -B(R^2 - (x^2 + y^2)) + C, \quad (118)$$

$$u_3^{(2)}|_{x^2+y^2=R^2} = 0, \quad u_3^{(2)}|_{x^2+y^2=0} < \infty, \quad i = 1, 2, \quad (119)$$

где

$$A = c \frac{\delta}{\Delta} > 0, \quad B = c \frac{k}{2\Delta} > 0, \quad C = -\frac{k}{\Delta}(\mu_{11} - \mu_{21}),$$

$$\Delta = \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21} > 0, \quad \delta = \mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{21} + \mu_{22} > 0.$$

Т.к. постоянная $A > 0$, то задача (118)-(119) имеет единственное решение.

Для решения задачи (118)-(119) перейдем к полярной системе координат (r, φ) . Введем новые независимые переменные по формулам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ и перепишем (118)-(119) следующим образом:

$$\frac{d^2 u_3^{(2)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_3^{(2)}}{dr} - Au_3^{(2)} = -B(R^2 - r^2) + C, \quad (120)$$

$$u_3^{(2)}|_{r=R} = 0, \quad u_3^{(2)}|_{r=0} < \infty, \quad i = 1, 2. \quad (121)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (120) является модифицированным уравнением Бесселя, его общее решение имеет следующий вид:

$$u_3^{(2)}(r) = C_1 I_0(\sqrt{Ar}) + C_2 K_0(\sqrt{Ar}) + \frac{A(BR^2 - Br^2 - C) - 4B}{A^2}, \quad (122)$$

где $I_0(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r^2/4)^k}{(k!)^2}$ и $K_0(r) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(r\tau)}{\sqrt{\tau^2+1}} d\tau$ - модифицированные функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода соответственно, C_i , $i = 1, 2$ - произвольные постоянные.

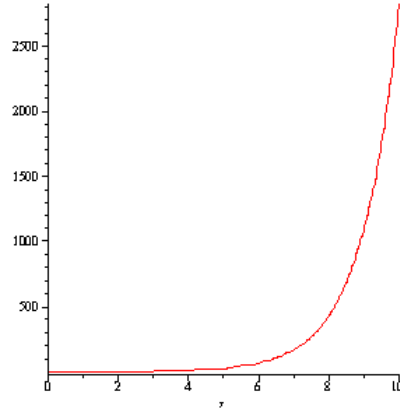


Рис. 5.2. График функции $I_0(r)$

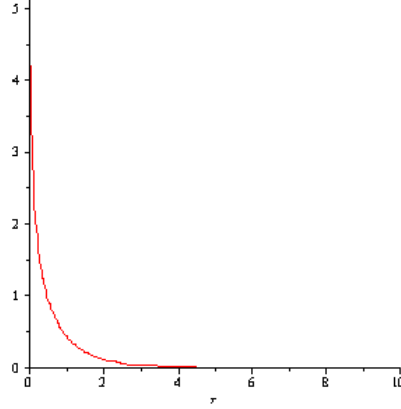


Рис. 5.3. График функции $K_0(r)$

Подставим теперь решение (122) в граничные условия (121), получим решение задачи (120)-(121):

$$u_3^{(2)}(r) = \frac{AC + 4B}{A^2 I_0(\sqrt{AR})} I_0(\sqrt{Ar}) + \frac{A(BR^2 - Br^2 - C) - 4B}{A^2}. \quad (123)$$

Из формул (117) и (123) находим, что

$$u_3^{(1)}(r) = \frac{k}{2(\mu_{11} + \mu_{21})} (R^2 - r^2) - \frac{\mu_{12} + \mu_{22}}{\mu_{11} + \mu_{21}} \left(\frac{AC + 4B}{A^2 I_0(\sqrt{AR})} I_0(\sqrt{Ar}) + \frac{A(BR^2 - Br^2 - C) - 4B}{A^2} \right). \quad (124)$$

Возвращаясь к декартовым координатам, в итоге, получим решение задачи (108)-(109) в рассматриваемом случае (т.е. когда $\mu_{11} + \mu_{21} \neq 0$):

$$u_3^{(1)}(x, y) = \frac{k}{2(\mu_{11} + \mu_{21})} (R^2 - (x^2 + y^2)) - \frac{\mu_{12} + \mu_{22}}{\mu_{11} + \mu_{21}} \left(\frac{AC + 4B}{A^2 I_0(\sqrt{AR})} I_0(\sqrt{A(x^2 + y^2)}) + \frac{A(BR^2 - B(x^2 + y^2) - C) - 4B}{A^2} \right), \quad (125)$$

$$u_3^{(2)}(x, y) = \frac{AC + 4B}{A^2 I_0(\sqrt{AR})} I_0(\sqrt{A(x^2 + y^2)}) + \frac{A(BR^2 - B(x^2 + y^2) - C) - 4B}{A^2}. \quad (126)$$

Этап 2. Пусть $\mu_{11} + \mu_{21} = 0$. Тогда, $\mu_{12} + \mu_{22} \neq 0$ (поскольку $\delta > 0$). Из (112), в этом случае следует, что

$$u_3^{(2)}(x, y) = \frac{k}{2(\mu_{12} + \mu_{22})} (R^2 - (x^2 + y^2)). \quad (127)$$

Подставим (127) в первое уравнение (108), получим следующую задачу для определения функции $u_3^{(1)}$:

$$\Delta u_3^{(1)} - A u_3^{(1)} = -B(R^2 - (x^2 + y^2)) + C, \quad (128)$$

$$u_3^{(1)}|_{x^2 + y^2 = R^2} = 0, \quad u_3^{(1)}|_{x^2 + y^2 = 0} < \infty, \quad i = 1, 2, \quad (129)$$

где

$$A = \frac{c}{\mu_{11}} > 0, \quad B = \frac{ck}{2\mu_{11}(\mu_{12} + \mu_{22})} > 0, \quad C = \frac{k}{\mu_{11}} \cdot \frac{\mu_{12} - \mu_{22}}{\mu_{12} + \mu_{22}}.$$

Решение задачи (128)-(129) проводится аналогично решению задачи (120)-(121) (с точностью до постоянных A , B и C). Переходя в (128)-(129) к полярной системе координат, получаем

$$u_3^{(1)}(r) = \frac{AC + 4B}{A^2 I_0(\sqrt{AR})} I_0(\sqrt{Ar}) + \frac{A(BR^2 - Br^2 - C) - 4B}{A^2}. \quad (130)$$

Возвращаясь к декартовым координатам, находим решение задачи (108)-(109) в случае, когда $\mu_{11} + \mu_{21} = 0$:

$$u_3^{(1)}(x, y) = \frac{AC + 4B}{A^2 I_0(\sqrt{AR})} I_0(\sqrt{A(x^2 + y^2)}) + \frac{A(BR^2 - B(x^2 + y^2) - C) - 4B}{A^2}, \quad (131)$$

$$u_3^{(2)}(x, y) = \frac{k}{2(\mu_{12} + \mu_{22})} (R^2 - (x^2 + y^2)). \quad (132)$$

Таким образом, задача (108)-(109) полностью решена.

Заметим, что если в уравнениях баланса импульса мы не будем брать в расчет слагаемые, отвечающие за обмен импульсом между различными составляющими рассматриваемой смеси жидкостей (т.е. слагаемые $(-1)^{i+1} c(\bar{u}^{(2)} - \bar{u}^1)$, $i = 1, 2$), то решение задачи (108)-(109) в этом случае имеет следующий вид:

$$\bar{u}_3^{(1)}(x, y) = \frac{k(\mu_{22} - \mu_{12})}{4\Delta} (R^2 - (x^2 + y^2)), \quad (133)$$

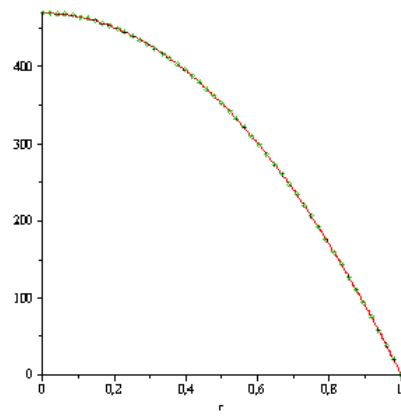
$$\bar{u}_3^{(2)}(x, y) = \frac{k(\mu_{11} - \mu_{21})}{4\Delta} (R^2 - (x^2 + y^2)). \quad (134)$$

Проведем сравнительный анализ результатов доставляемых рассматриваемой моделью смеси и классической моделью, описывающей течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе круглого поперечного сечения. Предположим, что обе компоненты смеси физически неразличимы, т.е. $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu$, $\mu_{12} = \mu_{21} = 0$. Тогда имеем

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)} = \bar{u}_3^{(1)} = \bar{u}_3^{(2)} = \frac{k}{4\mu} (R^2 - (x^2 + y^2)). \quad (135)$$

Ясно, что картина движения такой смеси ничем не отличается от течения вязкой несжимаемой жидкости с теми же свойствами. Также сохраняются все качественные зависимости (расход, средняя и максимальная скорость движения, коэффициент сопротивления и др.) присущие классической модели, описывающей движение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе круглого поперечного сечения.

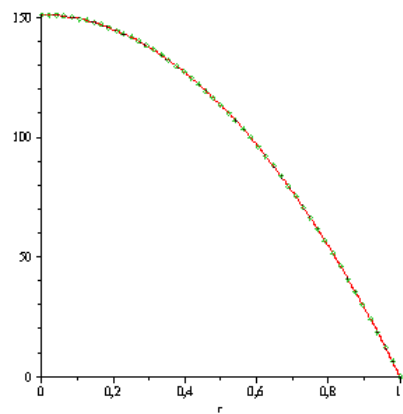
Теперь, выясним вопрос о влиянии на физическую картину течения смеси слагаемых, ответственных за обмен импульсом между ее составляющими. В соответствии с этим зададим значения коэффициентов вязкости $\mu_{11} = 0.1$, $\mu_{12} = 0.02$, $\mu_{21} = 0.01$, $\mu_{22} = 0.3$ ($\mu_{11} + \mu_{21} \neq 0$); значения перепада давления - $k = 200$; радиус трубы - $R = 1$. Построим графики функций $u_3^{(i)}$, $\bar{u}_3^{(i)}$, $i = 1, 2$, изменяя значения параметра c в пределах от 0.0001 до 1.



$$- - u_3^{(1)}, \dots - \bar{u}_3^{(1)}$$

$$\max_{[0;1]} |u_3^{(1)} - \bar{u}_3^{(1)}| = 0.0641$$

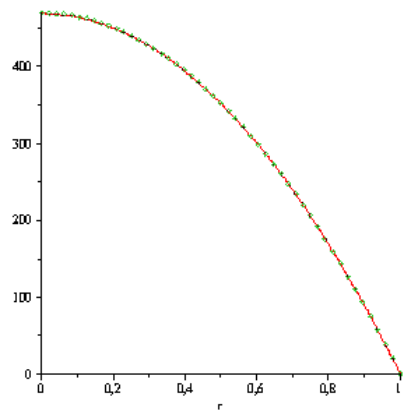
Рис. 5.4. $c = 0.0001$



$$- - u_3^{(2)}, \dots - \bar{u}_3^{(2)}$$

$$\max_{[0;1]} \left| u_3^{(2)} - \bar{u}_3^{(2)} \right| = 0.0219$$

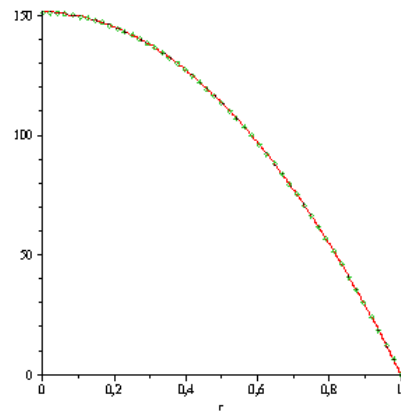
Рис. 5.5. $c = 0.0001$



$$- - u_3^{(1)}, \dots - \bar{u}_3^{(1)}$$

$$\max_{[0;1]} \left| u_3^{(1)} - \bar{u}_3^{(1)} \right| = 0.6403$$

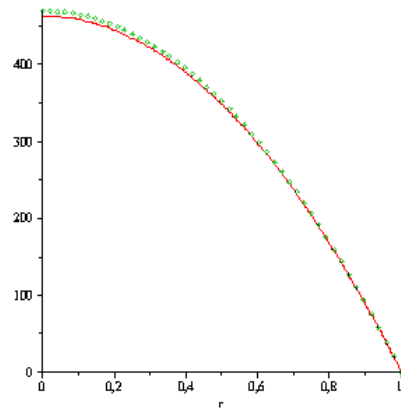
Рис. 5.6. $c = 0.001$



$$- - u_3^{(2)}, \dots - \bar{u}_3^{(2)}$$

$$\max_{[0;1]} \left| u_3^{(2)} - \bar{u}_3^{(2)} \right| = 0.2201$$

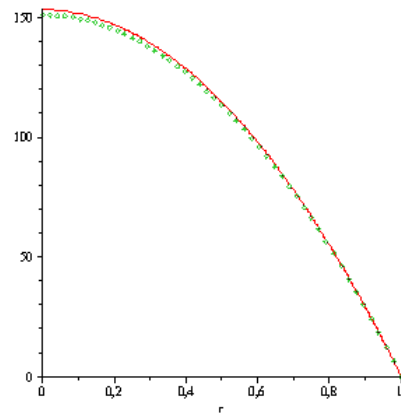
Рис. 5.7. $c = 0.001$



$$- - u_3^{(1)}, \dots - \bar{u}_3^{(1)}$$

$$\max_{[0;1]} \left| u_3^{(1)} - \bar{u}_3^{(1)} \right| = 6.3$$

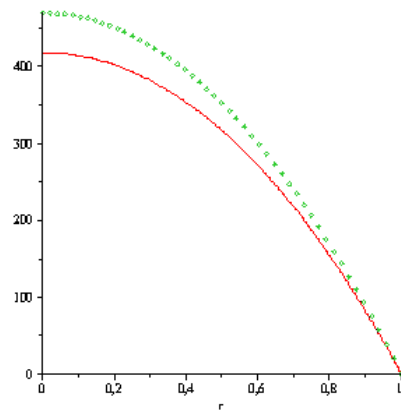
Рис. 5.8. $c = 0.01$



$$- - u_3^{(2)}, \dots - \bar{u}_3^{(2)}$$

$$\max_{[0;1]} |u_3^{(2)} - \bar{u}_3^{(2)}| = 2.2$$

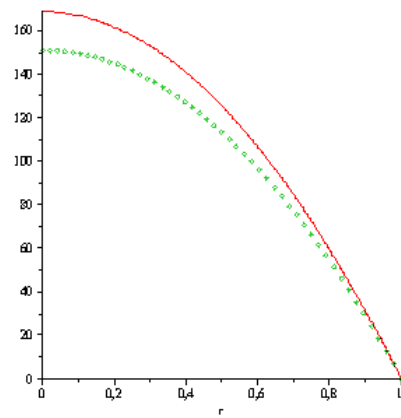
Рис. 5.9. $c = 0.01$



$$- - u_3^{(1)}, \dots - \bar{u}_3^{(1)}$$

$$\max_{[0;1]} |u_3^{(1)} - \bar{u}_3^{(1)}| = 51.2$$

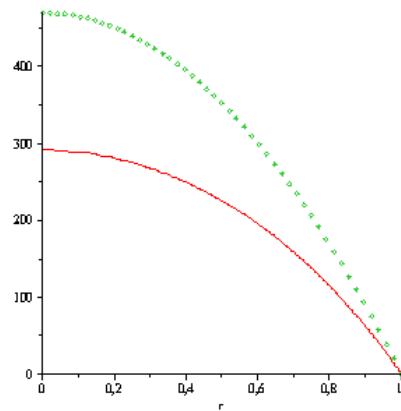
Рис. 5.10. $c = 0.1$



$$- - u_3^{(2)}, \dots - \bar{u}_3^{(2)}$$

$$\max_{[0;1]} |u_3^{(2)} - \bar{u}_3^{(2)}| = 17.6$$

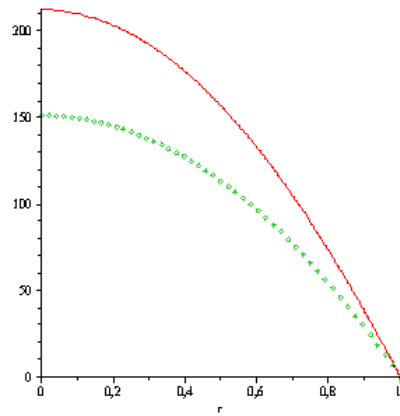
Рис. 5.11. $c = 0.1$



$$- - u_3^{(1)}, \dots - \bar{u}_3^{(1)}$$

$$\max_{[0;1]} |u_3^{(1)} - \bar{u}_3^{(1)}| = 178.4$$

Рис. 5.12. $c = 1$

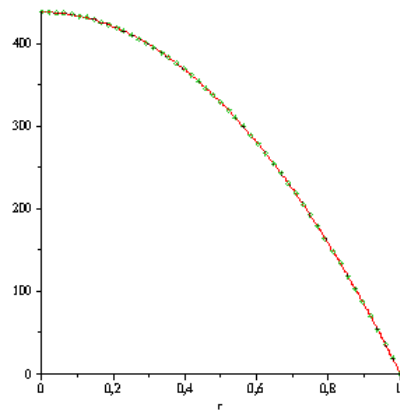


$$- - u_3^{(2)}, \dots - \bar{u}_3^{(2)}$$

$$\max_{[0;1]} \left| u_3^{(2)} - \bar{u}_3^{(2)} \right| = 61.3$$

Рис. 5.12. $c = 1$

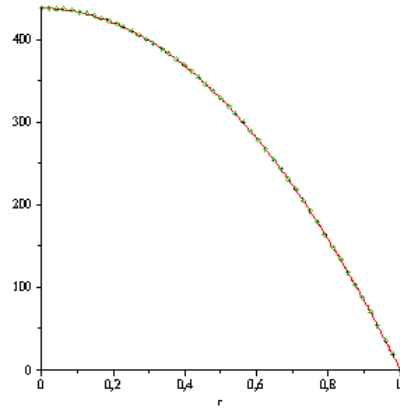
Рассмотрим теперь второй случай, когда $\mu_{11} + \mu_{21} = 0$. Нетрудно проверить, что в этом случае формулы для $u_3^{(2)}$ и $\bar{u}_3^{(2)}$ идентичны. Поэтому, графики функций $u_3^{(2)}$, $\bar{u}_3^{(2)}$ строить не будем. Зададим значения коэффициентов вязкости $\mu_{11} = 0.1$, $\mu_{12} = 0.02$, $\mu_{21} = -0.1$, $\mu_{22} = 0.3$ ($\mu_{11} + \mu_{21} = 0$); значения перепада давления - $k = 200$; радиус трубы - $R = 1$. Построим графики функций $u_3^{(1)}$, $\bar{u}_3^{(1)}$, изменяя снова значения параметра c в пределах от 0.0001 до 1.



$$- - u_3^{(1)}, \dots - \bar{u}_3^{(1)}$$

$$\max_{[0;1]} \left| u_3^{(1)} - \bar{u}_3^{(1)} \right| = 0.0233$$

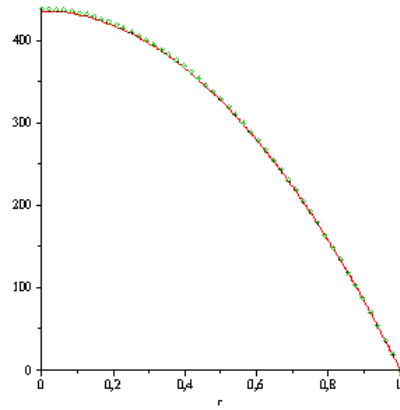
Рис. 5.14. $c = 0.0001$



$$- - u_3^{(1)}, \dots - \bar{u}_3^{(1)}$$

$$\max_{[0;1]} \left| u_3^{(1)} - \bar{u}_3^{(1)} \right| = 0.2339$$

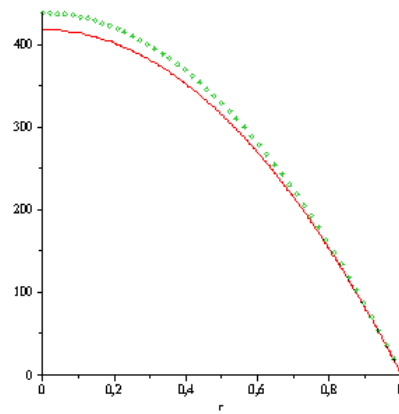
Рис. 5.15. $c = 0.001$



$$- - u_3^{(1)}, \dots - \bar{u}_3^{(1)}$$

$$\max_{[0;1]} \left| u_3^{(1)} - \bar{u}_3^{(1)} \right| = 2.3032$$

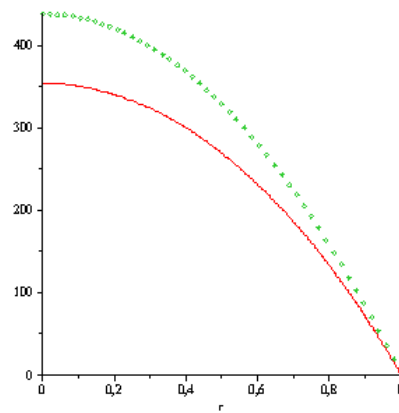
Рис. 5.16. $c = 0.01$



$$- - u_3^{(1)}, \dots - \bar{u}_3^{(1)}$$

$$\max_{[0;1]} |u_3^{(1)} - \bar{u}_3^{(1)}| = 19.9241$$

Рис. 5.17. $c = 0.1$



$$- - u_3^{(1)}, \dots - \bar{u}_3^{(1)}$$

$$\max_{[0;1]} |u_3^{(1)} - \bar{u}_3^{(1)}| = 83.9740$$

Рис. 5.18. $c = 1$

Из данных графиков видно, что при увеличении параметра c , максимум разности по модулю между $u_3^{(i)}$ и $\bar{u}_3^{(i)}$ возрастает в обоих случаях. Таким образом, в рассматриваемой модели смеси, слагаемые ответственные за обмен импульсом между ее составляющими способны существенно влиять на физическую картину течения.

5.1 Упражнения

1. В классе гладких функций доказать единственность решения задачи (108)-(109).
2. Рассчитать объемный расход, среднюю скорость течения, максимальную скорость течения, силу трения для рассматриваемой в этом разделе модели смеси.
3. Найти еще один способ решения задачи об установившемся течении двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей в круглой цилиндрической трубе. Сравнить решения.

6 Круговое движение двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей между двумя вращающимися цилиндрами

Будем рассматриваемую среду считать несжимаемой, т.е. примем что

$$\rho_i = \text{const} > 0, \quad i = 1, 2 \quad (136)$$

и движение предполагать установившимся (стационарным)

$$\frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (137)$$

При этих предположениях, уравнения неразрывности (45) и баланса импульса (49) примут соответственно вид

$$\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial z} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (138)$$

$$\rho_i \left(u_1^{(i)} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x} + u_2^{(i)} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial y} + u_3^{(i)} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_i}{\partial x} + \mu_{i1} \Delta u_1^{(1)} + \mu_{i2} \Delta u_1^{(2)} + J_1^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (139)$$

$$\rho_i \left(u_1^{(i)} \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x} + u_2^{(i)} \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial y} + u_3^{(i)} \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_i}{\partial y} + \mu_{i1} \Delta u_2^{(1)} + \mu_{i2} \Delta u_2^{(2)} + J_2^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (140)$$

$$\rho_i \left(u_1^{(i)} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x} + u_2^{(i)} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} + u_3^{(i)} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_i}{\partial z} + \mu_{i1} \Delta u_3^{(1)} + \mu_{i2} \Delta u_3^{(2)} + J_3^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (141)$$

где $J_k^{(i)} = (-1)^{i+1} c \left(u_k^{(2)} - u_k^{(1)} \right)$, $k = 1, 2, 3$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Относительно коэффициентов вязкости μ_{ij} , $i, j = 1, 2$ снова предполагается, что $\mu_{11} > 0$, $\mu_{22} > 0$, $4\mu_{11}\mu_{22} - (\mu_{12} + \mu_{21})^2 > 0$.

В дальнейшем, поскольку будет рассматриваться круговое движение двухкомпонентных смесей вязких жидкостей между двумя вращающимися цилиндрами, то нам будет удобно пользоваться уравнениями (138)-(141)

в цилиндрической системе координат $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$:

$$\frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(i)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (142)$$

$$\begin{aligned} \rho_i \left[u_r^{(i)} \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial z} + \frac{u_\varphi^{(i)}}{r} \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial \varphi} + u_z^{(i)} \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial z} - \frac{(u_\varphi^{(i)})^2}{r} \right] + \frac{\partial p_i}{\partial r} = \mu_{i1} \left(\Delta u_r^{(1)} - \frac{u_r^{(1)}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi^{(1)}}{\partial \varphi} \right) + \\ + \mu_{i2} \left(\Delta u_r^{(2)} - \frac{u_r^{(2)}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi^{(2)}}{\partial \varphi} \right) + (-1)^{i+1} c \left(u_r^{(2)} - u_r^{(1)} \right), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (143)$$

$$\begin{aligned} \rho_i \left[u_r^{(i)} \frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial z} + \frac{u_\varphi^{(i)}}{r} \frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial \varphi} + u_z^{(i)} \frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial z} - \frac{u_z^{(i)} u_\varphi^{(i)}}{r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial p_i}{\partial \varphi} = \mu_{i1} \left(\Delta u_\varphi^{(1)} - \frac{u_\varphi^{(1)}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \varphi} \right) + \\ + \mu_{i2} \left(\Delta u_\varphi^{(2)} - \frac{u_\varphi^{(2)}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial \varphi} \right) + (-1)^{i+1} c \left(u_\varphi^{(2)} - u_\varphi^{(1)} \right), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (144)$$

$$\begin{aligned} \rho_i \left[u_z^{(i)} \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial r} + \frac{u_\varphi^{(i)}}{r} \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial \varphi} + u_z^{(i)} \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z} \right] + \frac{\partial p_i}{\partial z} = \mu_{i1} \Delta u_z^{(1)} + \mu_{i2} \Delta u_z^{(2)} + \\ + (-1)^{i+1} c \left(u_z^{(2)} - u_z^{(1)} \right), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (145)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Мы будем рассматривать круговое движение смеси между двумя вращающимися цилиндрами (см. Рис. 1) считая, что траектории всех частиц среды представляют собой дуги концентрических окружностей, то есть

$$u_r^{(i)} = 0, \quad u_z^{(i)} = 0, \quad u_\varphi^{(i)} \neq 0, \quad i = 1, 2. \quad (146)$$

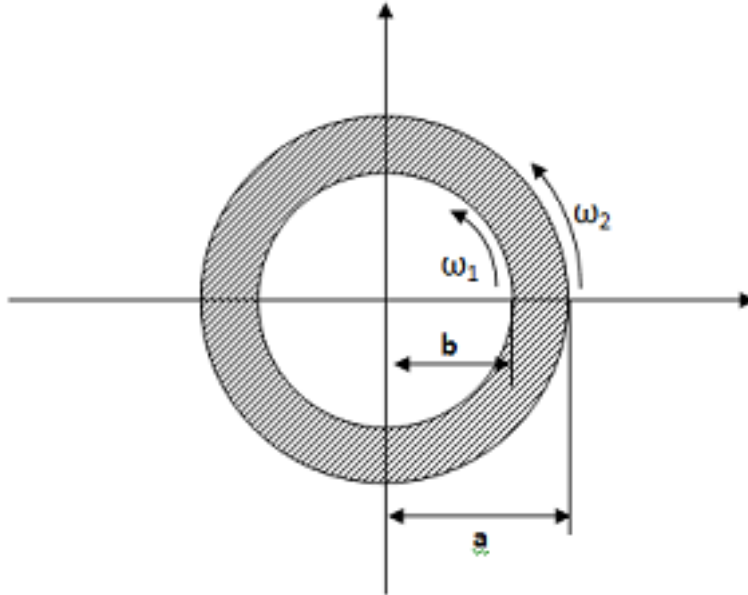


Рис. 6.1. К течению смеси вязких жидкостей между двумя вращающимися цилиндрами

При этом предположении из уравнений (142) – уравнений несжимаемости – получим:

$$\frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial \varphi} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (147)$$

Таким образом, скорость каждой частицы вдоль ее траектории остается неизменной. Эта скорость может изменяться лишь при переходе от одной частицы к другой, т.е. в зависимости от переменных r и z ($u_\varphi^{(i)} = u_\varphi^{(i)}(r, z)$, $i = 1, 2$).

Дифференциальные уравнения (143)-(145) при использовании тождеств (146), (147) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial p_i}{\partial r} = \rho_i \frac{\left(u_\varphi^{(i)}\right)^2}{r}, \quad i = 1, 2, \quad (148)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial \varphi} = & \mu_{i1} r \left(\Delta u_\varphi^{(1)} - \frac{u_\varphi^{(1)}}{r^2} \right) + \mu_{i2} r \left(\Delta u_\varphi^{(2)} - \frac{u_\varphi^{(2)}}{r^2} \right) + \\ & + (-1)^{i+1} cr \left(u_\varphi^{(2)} - u_\varphi^{(1)} \right), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (149)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial z} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (150)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Пусть внутренний цилиндр имеет радиус b и вращается с угловой скоростью ω_1 , а внешний имеет радиус a и вращается с угловой скоростью ω_2 (см. Рис. 1). Граничные условия прилипания частиц жидкости к стенкам цилиндров будут иметь вид

$$u_\varphi^{(i)} \Big|_{r=b} = \omega_1 b, \quad u_\varphi^{(i)} \Big|_{r=a} = \omega_2 a, \quad i = 1, 2. \quad (151)$$

Из уравнений (150) сразу следует, что

$$p_i = p_i(r, \varphi), \quad i = 1, 2.$$

Продифференцируем уравнения (148) по переменной φ , получим

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial r \partial \varphi} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (152)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial p_i}{\partial \varphi} = \frac{\partial p_i}{\partial \varphi}(\varphi), \quad i = 1, 2. \quad (153)$$

Продифференцируем теперь уравнение (148) по переменной z , получаем что

$$\frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial z} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (154)$$

Из последних соотношений и (147) вытекает, что скорость движения компонент смеси есть функция одной переменной r , то есть

$$u_\varphi^{(i)} = u_\varphi^{(i)}(r), \quad i = 1, 2.$$

Далее рассмотрим уравнения (149). Их левая часть зависит только от φ , а правая часть от этой переменной не зависит. Следовательно, обе части равны одной и той же постоянной величине, то есть

$$\frac{\partial p_i}{\partial \varphi} = K_i, \quad i = 1, 2. \quad (155)$$

Из (155) вытекает, что $p_i = K_i \varphi + R_i(r)$, $i = 1, 2$, но тогда давление i -ой компоненты смеси при изменении угла φ будет многозначной функцией. Для устранения этой многозначности нужно положить $K_i = 0$, $i = 1, 2$.

Уравнения (149) для определения скорости $u_\varphi^{(i)}$ i -ой компоненты смеси $i = 1, 2$, при учете равенств (154) и (155) тогда будут представляться в виде

$$\begin{aligned} \mu_{i1} \left(\frac{d}{dr} \left(r \frac{du_\varphi^{(1)}}{dr} \right) - \frac{u_\varphi^{(1)}}{r} \right) + \mu_{i2} \left(\frac{d}{dr} \left(r \frac{du_\varphi^{(2)}}{dr} \right) - \frac{u_\varphi^{(2)}}{r} \right) + \\ + (-1)^{i+1} cr (u_\varphi^{(2)} - u_\varphi^{(1)}) = 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (156)$$

или

$$\begin{aligned} \mu_{i1} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru_\varphi^{(1)}) \right] + \mu_{i2} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru_\varphi^{(2)}) \right] + \\ + (-1)^{i+1} c (u_\varphi^{(2)} - u_\varphi^{(1)}) = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (157)$$

Перепишем систему (157) в виде

$$\begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A[u_\varphi^{(1)}] \\ A[u_\varphi^{(2)}] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c & c \\ c & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\varphi^{(1)} \\ u_\varphi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (158)$$

где $A[v] = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv) \right]$. Умножим обе части (158) на матрицу, обратную к матрице $\begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix}$, получим

$$\begin{pmatrix} A[u_\varphi^{(1)}] \\ A[u_\varphi^{(2)}] \end{pmatrix} + \frac{c}{\Delta} \begin{pmatrix} -\mu_{22} - \mu_{12} & \mu_{22} + \mu_{12} \\ \mu_{21} + \mu_{11} & -\mu_{21} - \mu_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\varphi^{(1)} \\ u_\varphi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (159)$$

где $\Delta = \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21} > 0$. Вычитая теперь из первого уравнения (159) второе, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$A[v] - \frac{c\delta}{\Delta}v = 0, \quad (160)$$

где $v = u_\varphi^{(1)} - u_\varphi^{(2)}$. Граничные условия для функции v , с учетом (151), имеют вид

$$v|_{r=b} = 0, \quad v|_{r=a} = 0. \quad (161)$$

Задача (160), (161) имеет единственное решение и нетрудно видеть, что оно является нулевым, т.е. $v(r) = 0$, а значит $u_\varphi^{(1)}(r) = u_\varphi^{(2)}(r)$. Отсюда сразу же следует, что на процесс движения двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей между двумя вращающимися цилиндрами совершенно не влияет обмен импульсом между составляющими смеси и для определения скорости $u_\varphi^{(i)}(r)$ i -ой компоненты смеси мы приходим к следующей задаче:

$$A[u_\varphi^{(i)}] = 0, \quad u_\varphi^{(i)}|_{r=b} = \omega_1 b, \quad u_\varphi^{(i)}|_{r=a} = \omega_2 a, \quad i = 1, 2. \quad (162)$$

Задача (162) обладает единственным решением, которое, нетрудно проверить, имеет вид

$$u_\varphi^{(i)}(r) = \frac{1}{a^2 - b^2} \left[(\omega_2 a^2 - \omega_1 b^2) r + \frac{(\omega_1 - \omega_2) a^2 b^2}{r} \right], \quad i = 1, 2. \quad (163)$$

Из последних соотношений видно, что скорости движения обеих компонент смеси между двумя вращающимися цилиндрами одинаковы и зависят только от радиусов и угловых скоростей вращения цилиндров.

Для определения давления i -ой компоненты смеси имеем из (148) следующую формулу:

$$p_i(r) = \rho_i \int \frac{(u_\varphi^{(i)}(r))^2}{r} dr + C_i, \quad i = 1, 2, \quad (164)$$

откуда и из (164) получаем, что

$$p_i(r) = \frac{\rho_i}{(a^2 - b^2)^2} \left[(\omega_2 a^2 - \omega_1 b^2)^2 \frac{r^2}{2} + 2a^2 b^2 (\omega_1 - \omega_2) (\omega_2 a^2 - \omega_1 b^2) \ln r - \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2 a^4 b^4}{2r^2} \right] + C_i, \quad i = 1, 2. \quad (165)$$

Далее определим касательное напряжение силы вязкости i -ой компоненты смеси для кругового движения. Поскольку компоненты тензора скоростей деформаций в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} D_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, D_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}, D_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ D_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) \right), \\ D_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right), D_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (166)$$

то из формулы $\sigma^{(i)} = 2 \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} D(\vec{u}^{(j)})$, $i = 1, 2$ (переписанной в цилиндрической системе координат), в силу (146) и (166), следует, что сила вязкости i -ой компоненты смеси равна

$$\sigma_{r\varphi}^{(i)} = -\frac{2}{r^2} (\mu_{i1} + \mu_{i2}) \frac{a^2 b^2 (\omega_1 - \omega_2)}{a^2 - b^2}, \quad i = 1, 2. \quad (167)$$

Для определения силы вязкости всей смеси имеем тогда формулу

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}^{(1)} + \sigma_{r\varphi}^{(2)} = -\frac{2\delta a^2 b^2 (\omega_1 - \omega_2)}{r^2 (a^2 - b^2)}, \quad (168)$$

где $\delta = \mu_{22} + \mu_{12} + \mu_{21} + \mu_{11} > 0$.

Теперь подсчитаем момент сил вязкости i -ой компоненты смеси, распределённых по какой-либо окружности радиуса r , относительно оси симметрии. Обозначая этот момент через L_i , будем иметь:

$$L_i = \int_0^{2\pi} \sigma_{r\varphi}^{(i)} r^2 d\varphi = -4\pi (\mu_{i1} + \mu_{i2}) \frac{a^2 b^2 (\omega_1 - \omega_2)}{a^2 - b^2}, \quad i = 1, 2. \quad (169)$$

Момент сил вязкости для всей смеси тогда примет вид

$$L = L_1 + L_2 = -4\pi\delta \frac{a^2 b^2 (\omega_1 - \omega_2)}{a^2 - b^2}. \quad (170)$$

Таким образом момент сил вязкости, распределённых по любой окружности, относительно оси симметрии не зависит от радиуса этой окружности. Это значит, что если мы возьмём слой, ограниченный двумя окружностями, то моменты сил вязкости, распределённых по этим окружностям, будут равны по величине, но обратны по знаку (в силу разных направлений нормали), т.е. для моментов сил вязкости будет выполняться условие равновесия.

Итак, поставленная задача об установившемся круговом движении двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей между двумя вращающимися цилиндрами полностью решена.

Заметим, что формула (164) для определения скорости i -ой компоненты смеси, формула (165) для давления i -ой составляющей (с $\rho_1 = \rho_2 = \rho$) и формулы (167), (169) для силы вязкости и момента сил вязкости i -ой компоненты (с $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu$, $\mu_{12} = \mu_{21} = 0$), которые описывают движение двухкомпонентных смесей вязких сжимаемых жидкостей между двумя вращающимися цилиндрами (когда обе компоненты физически неразличимы) полностью совпадают с формулами, описывающими аналогичное движение вязкой несжимаемой жидкости. Соответственно данной модели смеси в этом случае присущи все физические характеристики течения, имеющиеся у модели Навье-Стокса, описывающей стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами.

Далее, зададим значения радиусов цилиндров $b = 1$, $a = 2$, $\omega_1 = 10$, $\omega_2 = 20$ и построим график функций $u_\varphi^{(i)}(r)$, $i = 1, 2$ (см. Рис. 2).

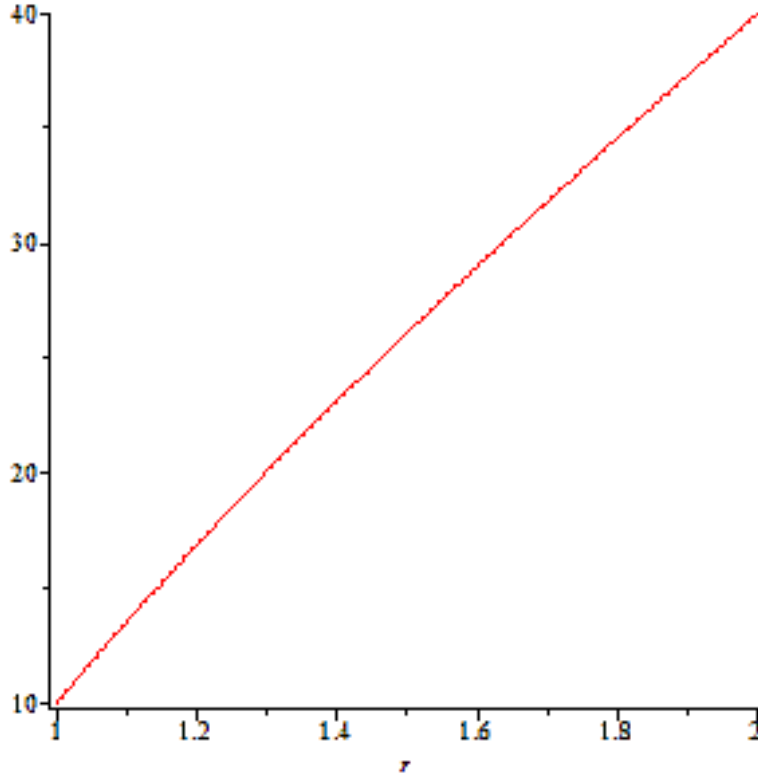


Рис. 6.2. $u_\varphi^{(i)}(r) = \frac{1}{3}(70r - \frac{40}{r})$, $i = 1, 2$

Из данного рисунка видно, что в рассматриваемом случае с увеличением радиуса r увеличивается скорость кругового движения компонент смеси.

Рассмотрим далее некоторые частные случаи. Уменьшая значение радиуса внутреннего цилиндра b до нуля, получим из (164), (165), (168) и (170):

$$\begin{cases} u_\varphi^{(i)}(r) = \omega_2 r, \\ p_i(r) = \frac{1}{2}\rho_i\omega_2^2 r^2 + C_i, \\ \sigma_{r\varphi} = 0, \\ L = 0. \end{cases} \quad (171)$$

Полученные формулы (171) представляют собой решение задачи о вращении кругового цилиндра, наполненного двухкомпонентной смесью вязких несжимаемых жидкостей. Таким образом, при установившемся движении смесь вязких несжимаемых жидкостей внутри цилиндра вращается как абсолютно твердое тело. Для поддержания равномерного вращения цилиндра со смесью вязких жидкостей не требуется момент внешних сил. Отметим еще, что если положить $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, то формулы (171) совпадают с формулами, описывающими аналогичное движение вязкой несжимаемой жидкости.

Чтобы получить решение задачи о вращении круглого цилиндра в безграничной смеси вязких жидкостей, необходимо в формулах (164), (165), (168) и (170) вначале положить

$$\omega_2 = 0,$$

а затем радиус внешнего цилиндра a увеличивать до бесконечности. В результате мы получим:

$$\begin{cases} u_{\varphi}^{(i)}(r) = \frac{\omega_1}{r} b^2, \\ p_i(r) = C_i - \frac{\rho_i \omega_1^2 b^4}{2r^2}, \\ \sigma_{r\varphi} = -\frac{2\delta b^2 \omega_1}{r^2}, \\ L = -4\pi\delta\omega_1 b^2. \end{cases} \quad (172)$$

Для поддержания равномерного движения цилиндра в неограниченной смеси жидкостей, необходимо приложить момент внешних сил, пропорциональный угловой скорости вращения цилиндра, коэффициенту вязкости δ смеси и квадрату радиуса цилиндра.

В заключение отметим, что выражение (170) для момента сил вязкости смеси может использоваться в приборах с концентрическими цилиндрами, предназначенных для экспериментального определения вязкости жидкостей. Измеряя каким либо способом момент сил вязкости смеси, мы получаем возможность по этой формуле подсчитать значение коэффициента вязкости δ смеси, а тем самым узнать (зная μ_{11} и μ_{22} – коэффициенты вязкости каждой компоненты смеси) значение $\mu_{12} + \mu_{21}$.

6.1 Упражнения

1. Сформулировать задачу о вращении кругового цилиндра, наполненного двухкомпонентной смесью вязких несжимаемых жидкостей. Найти ее решение.
2. Сформулировать задачу о вращении круглого цилиндра в безграничной смеси вязких жидкостей. Найти ее решение.